Metoda drzew w rachunku prawdopodobieństwa

Paweł STRZELECKI, Warszawa

Rachunek prawdopodobieństwa to przedmiot wyraźnie odmienny od wielu innych wykładanych na studiach matematycznych. Trudniej w nim o proste, czytelne intuicje, łatwiej o nieprzyjemne paradoksy; roczny wykład jest przesycony rozmaitymi szczegółami i trudnymi rachunkami, choć z drugiej strony studenci poznają w czasie kilkudziesięciu godzin nauki jedynie kilka naprawdę ważnych pojęć i rezultatów. Dwa z nich to niewątpliwie Centralne Twierdzenie Graniczne Levy'ego i Lindeberga oraz mocne prawo wielkich liczb Kołmogorowa; na trzecim miejscu wymieniłbym pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego i tzw. wzór na prawdopodobieństwo całkowite.

Oprócz trudności związanych z brakiem intuicji i obecnością paradoksów trafiamy też, szczególnie, gdy przyjdzie nam uczyć studentów – przyszłych nauczycieli, na barierę kultury analitycznej. Okazuje się, że studentom nie jest łatwo odróżnić zbieżność według miary od zbieżności prawie wszędzie czy w L^p; że mają kłopoty z dość elementarnymi oszacowaniami, że nie bardzo rozumieją, co to właściwie jest funkcja charakterystyczna rozkładu (rasowy probabilista prowadzący wykład zazwyczaj niechętnie zdradza, jak potężnym i potrzebnym w innych dziedzinach matematyki narzędziem jest transformata Fouriera); przykłady można by mnożyć.

Gdy się prowadzi ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa, niełatwo jest – ze wspomnianych wyżej przyczyn – wyjść poza ogólnie znany kanon prostych zadań o charakterze kombinatorycznym, dotyczących skończonej przestrzeni zdarzeń elementarnych i pokazać przykłady nieco bardziej skomplikowane, a przy tym prawdziwie ciekawe, zakorzenione w probabilistycznym opisie rzeczywistości – i to niekoniecznie tej wymyślonej dla potrzeb zadania. Chciałbym Państwu opowiedzieć o moich doświadczeniach związanych z próbą pokazywania studentom takich właśnie stosunkowo prostych, a nietrywialnych przykładów. Wszystkie one mają wspólną cechę: wykorzystują w rozmaity sposób (czasem dość sprytnie) wzór na prawdopodobieństwo całkowite, a ponadto – przynajmniej w początkowej fazie rozumowania – skwapliwie się w nich unika jawnego określenia przestrzeni probabilistycznej (co u probabilistów jest częste; w istocie ciekawe są tylko rozkłady prawdopodobieństwa, a nie same przestrzenie!). Mamy nadzieję, że skrupulatny Czytelnik niniejszego tekstu zdoła bez większych trudności w pełni sformalizować każde z zaprezentowanych niżej rozumowań.

Zacznijmy od przypomnienia: jeśli przestrzeń probabilistyczna Ω jest sumą parami rozłącznych zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$, przy czym dla każdego numeru i mamy $P(A_i) > 0$, to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia B wyraża się wzorem

$$(1) \qquad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i),$$

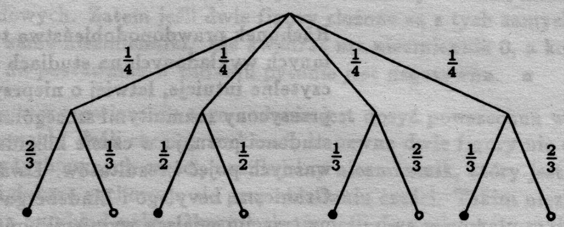
gdzie $P(B|A_i) := P(B \cap A_i)/P(A_i)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia B pod warunkiem A_i.

Wzór (1), zazwyczaj zwany wzorem na prawdopodobieństwo całkowite, to prosty sposób na liczenie, jaki ułamek powierzchni tortu pokryty jest lukrem: żeby odpowiedzieć na to pytanie, wystarczy wiedzieć, jaką część powierzchni każdego kawałka tortu zajmuje lukier i znać wielkość wszystkich kawałków. Bardzo prosty dowód pominiemy.

Czasami, by stosować ten wzór, wygodnie jest narysować drzewko, obrazujące wszystkie możliwości, z jakimi mamy do czynienia w zadaniu (stąd *metoda drzew* w tytule). Popatrzmy na następujący prościutki przykład.

Przykład 0. Dane są cztery urny: w pierwszej jest jedna kula biała i dwie czarne, w drugiej – jedna biała i jedna czarna, w trzeciej i czwartej – po dwie białe i jednej czarnej. Wybieramy losowo jedną urnę, a następnie z niej losujemy kulę; jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągniemy kulę czarną?

Zróbmy rysunek.



(Gałęzie wychodzące z głównego wierzchołka drzewa odpowiadają różnym możliwościom wyboru urny, zaś gałęzie z dolnego poziomu ilustrują możliwość wyboru czarnej lub białej kuli z odpowiedniej urny.) By odpowiedzieć na postawione pytanie, sumujemy iloczyny prawdopodobieństw wypisanych przy tych drogach w naszym drzewie, które prowadzą do wylosowania kuli czarnej:

$$P(\mathrm{Cz.}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{11}{24}.$$

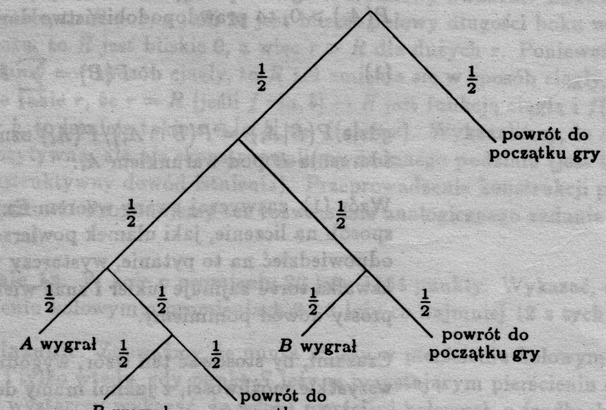
Łatwo stwierdzić, że w istocie robimy to samo, co stosując formalnie wzór na prawdopodobieństwo całkowite.

Przykład 1: zakłady w grze w orła i reszkę

Dwaj gracze, A oraz B, obserwują chłopca, który bez przerwy rzuca symetryczną monetą. Wyniki rzutów zapisywane są w postaci ciągów: na k-tym miejscu stoi litera O lub litera R w zależności od tego, czy w k-tym rzucie wypadł orzeł czy reszka. Gracz A twierdzi, że trójka OOO wystąpi w zapisie wcześniej, niż trójka ORO; gracz B jest przeciwnego zdania. Który z nich ma większe szanse wygranej w tym sporze? Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej każdego z nich?

Przed rozpoczęciem rachunków poszukajmy intuicji związanych z zadaniem. Gra robi się emocjonująca w momencie, gdy po raz pierwszy wypada orzeł; następny rzut na pewno będzie wtedy korzystny dla któregoś z graczy. Ale jeśli po parze OO wypadnie reszka, to tylko gracz B może wygrać w efekcie następnego rzutu; gracz A musi czekać na trzy kolejne orły.... Zatem większe szanse wygranej powinien mieć B.

Narysujmy teraz drzewo. Reszka w pierwszym rzucie albo dwie kolejne reszki po orle nie kończącym gry oznaczają (dla każdego z graczy) powrót do punktu wyjścia i rozpoczęcie gry od nowa. Rysunek będzie więc następujący:



Niech p oznacza prawdopodobieństwo wygranej gracza A. W naszym drzewku mamy jedną drogę kończącą się od razu wygraną A i trzy drogi (z jednego, trzech i czterech odcinków) powracające do punktu wyjścia, zatem, ze wzoru na prawdopodobieńswtwo całkowite,

$$p = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot p + \frac{1}{8} \cdot p + \frac{1}{16} \cdot p,$$

czyli $p = 2/5$. W przypadku gracza B mamy dwie drogi prowadzące bezpośrednio do wygranej i trzy drogi powracające do początku gry. Jeśli przez q oznaczymy prawdopodobieństwo wygranej gracza B, to, jak łatwo widzieć,

$$q = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \cdot q + \frac{1}{8} \cdot q + \frac{1}{16} \cdot q,$$

zatem $q = 3/5$. Okazało się, że $p + q = 1$. Zobaczymy za chwilę, w następnym przykładzie, że ten fakt też łatwo było przewidzieć.

Przykład 2: prymitywny model błądzenia

Rozpatrzymy teraz przykład, który można traktować jako bardzo prymitywny model błądzenia losowego cząstki w sieci krystalicznej. Droga wybierana jest losowo, a w niektórych miejscach sieci cząstka może się zatrzymać i „ugrzęznąć".

Punkt porusza się po krawędziach sześcianu $ABCDA'B'C'D'$ (przebywając w jednostce czasu jedną krawędź) i gdy dotrze do wierzchołka B' lub C', to się zatrzymuje. Jeśli punkt znajduje się w wierzchołku innym niż B' lub C', to może dalej poruszać się z jednakowym prawdopodobieństwem 1/3 po każdej krawędzi wychodzącej z tego wierzchołka. Za każdym razem droga wybierana jest niezależnie od poprzedniego ruchu. Załóżmy, że punkt rozpoczyna ruch z punktu A; z jakim prawdopodobieństwem

1. ruch zakończy się w punkcie B'?
2. ruch zakończy się w punkcie C'?
3. punkt nigdy nie dotrze ani do B', ani do C'?

Uwaga. Punkt B' jest połączony z A przekątną ściany bocznej, punkt C' jest połączony z A przekątną sześcianu.

Ci z Państwa, którzy słyszeli nieco o procesach stochastycznych, zauważą tu prosty, ale nietrywialny łańcuch Markowa: osiem wierzchołków sześcianu to osiem stanów procesu, a przyszłość (czyli następne położenie punktu znajdującego się w jakimś wierzchołku) zależy od przeszłości tylko poprzez teraźniejszość (nie jest bowiem ważna cała przebyta droga, a jedynie ostatnio osiągnięty wierzchołek).

Odpowiemy najpierw na ostatnie pytanie. W dwóch kolejnych ruchach punkt ma do wyboru $3 \cdot 3 = 9$ różnych dróg; niezależnie od położenia wyjściowego co najmniej jedna z nich (a czasem więcej) prowadzi do B' lub C'. Ponieważ kolejne ruchy są od siebie niezależne, to prawdopodobieństwo p_n tego, że punkt nie dotrze do B' ani do C' w ciągu $2n$ kolejnych ruchów, nie przekracza liczby $(9-1)^n/9^n$. Mamy więc

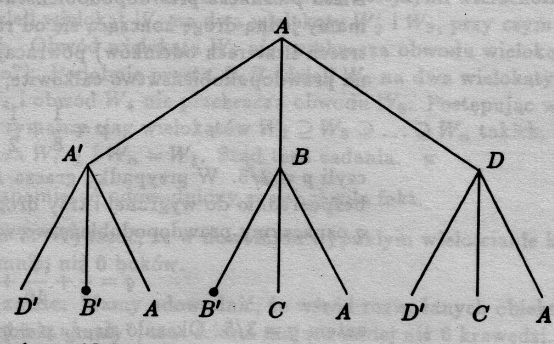
$$0 \leq p_n \leq \left(\frac{8}{9}\right)^n \longrightarrow 0 \qquad \text{dla } n \to \infty.$$

Zatem zdarzenie polegające na tym, że punkt nigdy nie dotrze ani do B', ani do C', ma prawdopodobieństwo równe zeru.

(Wnikliwy Czytelnik może przeprowadzić takie samo rozumowanie dla poprzedniego przykładu; pozwala to od razu przewidzieć, że suma szans wygranych obu graczy A i B powinna być równa 1.)

Zajmijmy się teraz pierwszym pytaniem. Oznaczmy przez $p_A, p_B, p_C, \ldots$ prawdopodobieństwa zdarzeń polegających odpowiednio na tym, że punkt startujący z $A, B, C, \ldots$ dotrze do B'. Z uwagi na symetrię położenia wierzchołków $p_C = p_{D'}$.

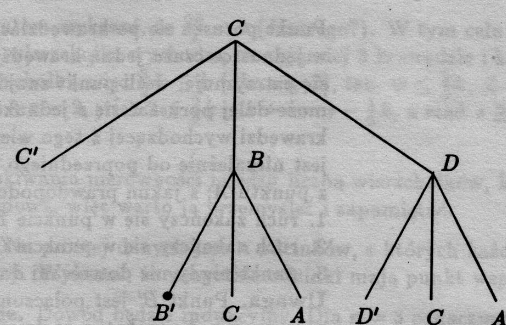
Rysujemy drzewko:



i natychmiast widzimy, że

$$p_A = \frac{3}{9}p_A + \frac{2}{9} + \frac{2}{9}p_C + \frac{2}{9}p_{D'} = \frac{1}{3}p_A + \frac{2}{9} + \frac{4}{9}p_C$$

(każdą drogę długości 2 nasz poruszający się punkt „wybiera" z prawdopodobieństwem 1/9!). To jedno równanie, a niewiadome mamy dwie; drugie równanie dostaniemy rysując drzewko obrazujące losy punktu startującego z wierzchołka C.



Nietrudno teraz stwierdzić, że

$$p_C = \frac{2}{9}p_A + \frac{1}{9} + \frac{2}{9}p_C + \frac{1}{9}p_{D'} = \frac{2}{9}p_A + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}p_C.$$

Rozwiązując otrzymany układ równań dostaniemy $p_A = 4/7$.

Ponieważ już wiemy, że punkt na pewno nie będzie błądzić nieskończenie długo, to prawdopodobieństwo, że ruch zakończy się w C', jest równe $1 - 4/7 = 3/7$. Oczywiście, można ten wynik uzyskać podobnie, jak obliczyliśmy p_A, nie korzystając z odpowiedzi na pytanie nr 3.

Przykład 3: zadanie o trzech strzelcach

Trzech strzelców, A, B i C, ma odbyć wspólny pojedynek. Zasady pojedynku są następujące: strzelcy stoją w wierzchołkach trójkąta równobocznego, jako pierwszy strzela A, potem B, potem C, potem znów A itd.; jeśli któryś ze strzelców znika ze sceny, to pojedynek ciągnie się dalej między pozostałymi dwoma. A trafia w cel z prawdopodobieństwem 0,3, C – z prawdopodobieństwem 0,5, zaś B wcale nie chybia. Każdy z nich strzela w jednego z innych lub w powietrze w ten sposób wybierając cel, żeby z największym prawdopodobieństwem wygrać pojedynek. Gdzie powinien wycelować swój pierwszy wystrzał strzelec A: w powietrze, w B, czy w C? (Zakładamy, że wystrzały w powietrze są na pewno chybione, a strzelcy znają nawzajem swe umiejętności.)

Intuicja może być tu następująca: słabeuszowi A nie opłaca się „wychylać" – być może powinien więc swój pierwszy strzał oddać w powietrze, tak, by na pewno spudłować.

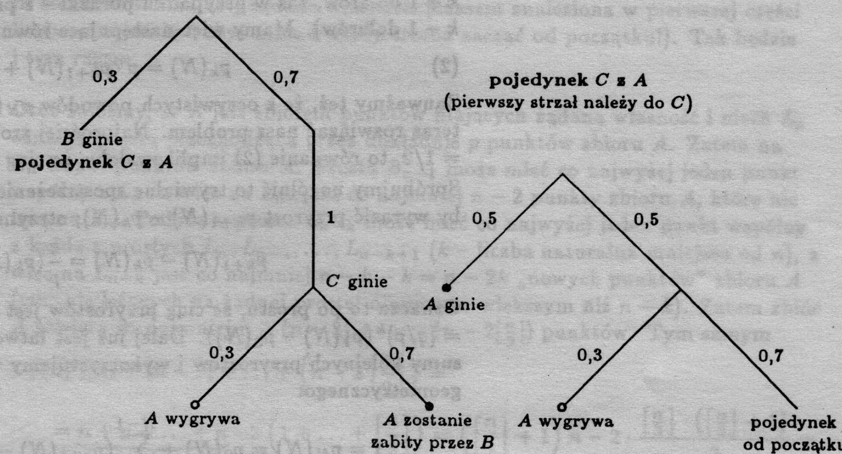
Jeśli A zdecyduje się oddać swój pierwszy strzał do C, to dalszy rozwój wypadków następujący: albo trafi i wtedy zaraz zginie, zabity przez B; albo nie trafi (z prawdopodobieństwem 0,7), wtedy B na pewno zabije C, jako groźniejszego ze swoich przeciwników, i A będzie miał okazję oddać jeden strzał do B (albo uda mu się trafić – prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe 0,3, albo zginie zabity następnym strzałem strzelca B). Zatem

$$P(A \text{ przeżyje}) = 0{,}3 \cdot 0 + 0{,}7 \cdot 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}21.$$

Gdyby A zdecydował się na pudłowanie, to rzecz jest jeszcze prostsza: B swoim pierwszym strzałem na pewno zabije C i A będzie miał okazję oddać jeden strzał do B. Żeby przeżyć pojedynek, musi trafić, a więc w tym przypadku

$$P(A \text{ przeżyje}) = 0{,}3 > 0{,}21.$$

A co w przypadku, gdy A odda swój pierwszy strzał do B? Naszkicujmy tym razem dwa drzewa:



Możemy teraz zapisać dwa równania. Drzewko po lewej stronie przekonuje nas, że

$$P(A \text{ przeżyje}) = 0{,}3 \cdot P(A \text{ przeżyje pojedynek z } C) + 0{,}7 \cdot 1 \cdot 0{,}3 \stackrel{\text{ozn.}}{=} 0{,}3q + 0{,}21,$$

zaś prawdopodobieństwo q przeżycia przez A pojedynku z C spełnia, jak widać dzięki drzewku po prawej stronie, zależność

$$q = 0{,}5(0{,}3 + 0{,}7 \cdot q).$$

Z obu powyższych warunków dostajemy natychmiast

$$P(A \text{ przeżyje}) = 0{,}21 + \frac{9}{130} < 0{,}3.$$

Oznacza to, że strzelec A ma największe szanse przeżycia pojedynku, jeśli swój pierwszy strzał odda w powietrze. Wnikliwy Czytelnik sprawdzi bez kłopotu, że sytuacja nie zmieni się, jeśli prawdopodobieństwo, że A trafia w cel, będzie dowolną liczbą z przedziału $(0, \frac{1}{2})$.

Przykład 4: klasyczne zadanie o ruinie gracza

Ostatnim przykładem stosowania wzoru na prawdopodobieństwo całkowite będzie klasyczne zdanie o ruinie gracza. Problem sformułowany jest zazwyczaj następująco: gracz ma początkowo kapitał $k\$$ i zamierza grać w ruletkę, stawiając kolejno po 1\$ na czerwone lub czarne, aż do momentu, gdy jego kapitał osiągnie $N\$$, albo do chwili, gdy będzie doszczętnie zrujnowany.

(Przypomnijmy, że ruletka ma 37 pól: 18 z nich jest czerwonych, 18 czarnych, a jedno zielone. Jeśli postawimy np. na czarne, a wypadnie czerwone lub zielone, to tracimy stawkę; jeśli zaś wypadnie czarne, to dostajemy z powrotem podwojoną stawkę.)

Ruletka w Las Vegas ma 18 pól czarnych, 18 czerwonych i dwa zielone.

Zatem, po każdej grze kapitał naszego gracza zmienia się o jeden: wzrasta w przypadku „sukcesu", a spada w przypadku „porażki". Widzimy też, że prawdopodobieństwo „sukcesu" p i prawdopodobieństwo „porażki" q są następujące:

$$p = \frac{18}{37}, \qquad q = \frac{19}{37}.$$

Oznaczmy przez $p_k(N)$ prawdopodobieństwo zdarzenia, że gracz rozpoczynający grę z kapitałem k zdoła powiększyć go do N, zaś przez $r_k(N)$ – prawdopodobieństwo, że gracz z kapitałem k zostanie zrujnowany przez kasyno, zanim jego kapitał osiągnie N.

Najpierw obliczmy $p_k(N)$. Drzewo jest tak proste, że nie warto go rysować; po pierwszej grze gracz nadal chce uciułać N dolarów, ale zmienia się jego kapitał początkowy (w przypadku sukcesu, czyli z prawdopodobieństwem p, wzrasta do $k+1$ dolarów, zaś w przypadku porażki – z prawdopodobieństwem q – maleje do $k-1$ dolarów). Mamy więc następujące równanie:

(2) $$p_k(N) = p \cdot p_{k+1}(N) + q \cdot p_{k-1}(N).$$

Zauważmy też, że z oczywistych powodów $p_N(N) = 1$ oraz $p_0(N) = 0$. Możemy teraz rozwiązać nasz problem. Najprościej zrobić to następująco: gdyby $p = q = 1/2$, to równanie (2) implikowałoby, że ciąg $\left(p_k(N)\right)_{k=0,1,\dots}$ jest arytmetyczny. Spróbujmy uogólnić to trywialne spostrzeżenie i przepiszmy (2) w takiej postaci, by wyrazić przyrost $p_{k+1}(N) - p_k(N)$; otrzymamy

$$p_{k+1}(N) - p_k(N) = \frac{q}{p}\left(p_k(N) - p_{k-1}(N)\right).$$

Oznacza to po prostu, że ciąg przyrostów jest geometryczny, $p_{k+1}(N) - p_k(N) = (q/p)^k\left(p_1(N) - p_0(N)\right)$. Dalej już jest łatwo, zapisujemy $p_N(N)$ w postaci sumy kolejnych przyrostów i wykorzystujemy wzór na sumę N wyrazów ciągu geometrycznego:

$$1 = p_N(N) = p_0(N) + \sum_{k=0}^{N-1}\left(p_{k+1}(N) - p_k(N)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{q}{p}\right)^k \left(p_1(N) - p_0(N)\right) = \frac{(q/p)^N - 1}{q/p - 1} \cdot p_1(N).$$

Stąd $p_1(N) = \dfrac{(q/p) - 1}{(q/p)^N - 1}$; teraz tylko powtarzamy poprzedni zabieg, by w efekcie dostać wynik

$$p_k(N) = p_0(N) + \sum_{l=0}^{k-1}\left(p_{l+1}(N) - p_l(N)\right) = \sum_{l=0}^{k-1} p_1(N) \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^l = \frac{(q/p)^k - 1}{(q/p)^N - 1}.$$

Tą samą metodą liczymy prawdopodobieństwo $r_k(N)$ – musimy rozwiązać równanie

(3) $$r_k(N) = p \cdot r_{k+1}(N) + q \cdot p_{k-1}(N), \qquad r_0(N) = 1 - r_N(N) = 1.$$

Łatwo sprawdzić, że $r_k(N) = 1 - p_k(N)$. Ponadto

$$p_k(N) \simeq \left(\frac{q}{p}\right)^{k-N} \qquad \text{dla } 0 \ll k \ll N.$$

Prawdopodobieństwo, że graczowi uda się zrealizować swój cel i uciułać N dolarów, maleje więc wykładniczo do zera wraz ze wzrostem różnicy $N - k$... W tabelce poniżej (gwoli przestrogi dla nieroztropnych) podajemy kilka przykładowych wartości $p_k(N)$, dla kapitału początkowego $k = 100$ i różnych wartości zamierzonego zysku N.

N	200	500	1000	2000	5000
$p_{100}(N)$ (ruletka 37-polowa)	0,0045	$4{,}03 \cdot 10^{-10}$	$7{,}32 \cdot 10^{-22}$	$2{,}42 \cdot 10^{-45}$	$8{,}72 \cdot 10^{-116}$
$p_{100}(N)$ (ruletka z Las Vegas)	0,000027	$4{,}98 \cdot 10^{-19}$	$6{,}58 \cdot 10^{-42}$	$1{,}15 \cdot 10^{-87}$	$6{,}14 \cdot 10^{-225}$

Czytelnik widzi więc, że ciułanie przy grze w ruletkę jest zajęciem wysoce nieopłacalnym (przynajmniej z probabilistycznego punktu widzenia). Jeśli zdarzy się tak, że będziemy mieć 100 dolarów i zechcemy podwoić swój kapitał w kasynie, to najlepiej od razu postawić wszystko na czerwone lub czarne – wtedy prawdopodbieństwo, że zrealizujemy swój zamiar, będzie bliskie 1/2. Kasyna często zabezpieczają się przed takim postępowaniem graczy, ograniczając z góry dozwolone stawki (gdy się gra w ruletkę np. na polskim promie Pomerania, to wolno postawić jednorazowo nie więcej, niż 4 marki fińskie...).

Dodajmy, że gdyby $p = q = 1/2$, to mielibyśmy $p_k(N) = k/N$, czyli – przy kapitale wyjściowym 100 stawek – zamiar uciułania 5000 stawek byłby znacznie łatwiejszy do zrealizowania, niż zamiar uciułania 200 stawek w prawdziwej ruletce (nawet tej 37-polowej).

Na zakończenie, tym razem nieco inną metodą, rozwiążemy jeszcze jeden problem (istotny z punktu widzenia właścicieli kasyn gry). Jeśli już wiemy, że zrujnujemy każdego zapamiętałego ciułacza z prawdopodobieństwem bardzo bliskim 1, to ciekawi nas jeszcze jedno: jak dużo czasu, średnio rzecz biorąc, taki nieszczęśnik spędzi w naszym kasynie? Innymi słowy, jeśli przez τ oznaczymy numer tej z kolejnych gier, po której kapitał gracza przyjmie wartość 0 lub N (to oczywiście jest zmienna losowa, można by ją nazwać *momentem wyjścia z kasyna*), to jaka będzie wartość oczekiwana τ?

Zauważmy, że zmienna losowa τ nie zależy od przyszłości w następującym sensie: jeśli (przy dowolnym $l \in \mathbb{N}$) znamy rezultaty gier $1, 2, \ldots, l$, to oczywiście potrafimy powiedzieć, czy $\tau \le l$, czy też $\tau > l$. Probabiliści powiedzą uczenie, że τ jest momentem Markowa (nie podamy tu formalnej definicji, zainteresowany Czytelnik odnajdzie ją np. w monografii P. Billingsley'a *Prawdopodobieństwo i miara*).

Oto szkic rozwiązania naszego problemu. Niech X_i oznacza zmianę kapitału gracza w i-tej grze. Zmienna X_i, jak wiemy, ma następujący rozkład i wartość oczekiwaną:

$$P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = -1) = p, \qquad \mathsf{E}X_i = 2p - 1.$$

Literą S oznaczmy łączną zmianę kapitału gracza do momentu wyjścia z kasyna. Zmienna losowa S też ma bardzo prosty rozkład; przyjmuje mianowicie tylko dwie wartości ($N - k$, jeśli gracz wychodzi z kasyna z zamierzonym zyskiem w kieszeni, oraz $-k$, w przypadku, gdy gracz jest zrujnowany). Mamy więc

$$P(S = N - k) = 1 - P(S = -k) = p_k(N), \qquad \mathsf{E}S = -k + N \cdot p_k(N).$$

Ponadto, łączna zmiana kapitału to suma zmian w kolejnych grach aż do momentu wyjścia z kasyna τ, czyli

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_\tau$$

(S jest sumą losowej liczby zmiennych X_i). Zauważmy, że znamy wartość oczekiwaną lewej strony oraz każdego ze składników występujących po prawej stronie. Do powiązania obu tych informacji posłuży nam tzw. *tożsamość Walda*: gdy zmienne losowe X_i mają ten sam rozkład i są niezależne, zaś τ jest momentem Markowa o wartościach naturalnych, to

$$\mathsf{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_\tau) = \mathsf{E}\tau \cdot \mathsf{E}X_1. \tag{4}$$

Ścisły (niezbyt trudny, ale nieco techniczny) dowód tego faktu można znaleźć w prawie każdym podręczniku rachunku prawdopodobieństwa, my podamy tylko oczywistą intuicję: wartość sumy takich samych składników otrzymuje się, mnożąc ilość składników przez wartość jednego składnika.

Dzięki tożsamości Walda możemy zakończyć rachunki:

$$\mathsf{E}\tau = \frac{\mathsf{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_\tau)}{\mathsf{E}X_1} = \frac{\mathsf{E}S}{\mathsf{E}X_1} = \frac{-k + N \cdot p_k(N)}{2p - 1} \simeq$$
$$\simeq \frac{k}{1 - 2p} \qquad \text{dla } 0 \ll k \ll N.$$

Widzimy więc, że dla ruletki 37-polowej średni czas przebywania naszego ciułacza w kasynie jest równy w przybliżeniu $37 \cdot k$, zaś dla ruletki z Las Vegas w przybliżeniu $19 \cdot k$.

Wnikliwy Czytelnik zechce teraz rozwiązać

Zadanie 1. Wykazać, że gdyby $p = q = 1/2$, to mielibyśmy

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{E}\tau = \lim_{N\to\infty} k(N-k) = +\infty.$$

(Nie należy w tym celu używać tożsamości Walda, wystarczy skorzystać ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.) Istnieje więc kilka powodów po temu, by do osiemnastu pól czerwonych i osiemnastu czarnych dodać co najmniej jedno zielone...

I jeszcze jedno zadanie (Wnikliwy Czytelnik powinien je bez większych kłopotów rozwiązać!). Potraktujmy je jako swoisty komentarz do sporów na temat pożytków płynących z nauczania rachunku prawdopodobieństwa.

Zadanie 2 (o czterech kłamcach). Jeśli czterej kłamcy, A, B, C i D, mówią prawdę z prawdopodobieństwem $1/3$ (niezależnie od siebie) i wiadomo, że prawdziwe jest następujące zdanie:

"A twierdzi, iż B przeczy, jakoby C powiedział, że D skłamał.",

to jakie jest prawdopodobieństwo, że D powiedział prawdę?