Realistyczne podejście do procentów – także z użyciem kalkulatora

Harie BROEJMAN, Uniwersytet w Utrechcie

z pomocą Leena STREEFFLANDA, Instytut Freudentala w Utrechcie

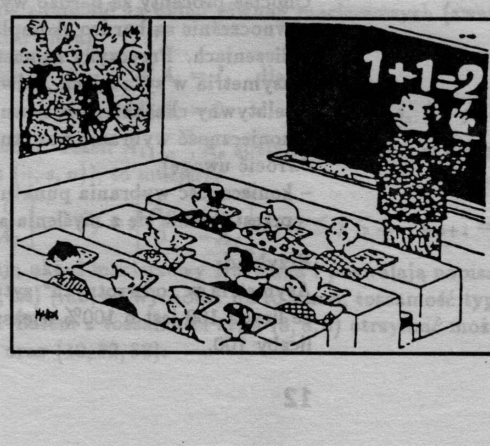
Wprowadzenie

W ciągu ostatnich piętnastu lat założenia programu nauczania matematyki w Holandii zmieniły się znacząco dokonując w podejściu do nauczania przesunięcia z „mechanicznego" lub czasem „strukturalnego" na realistyczne.

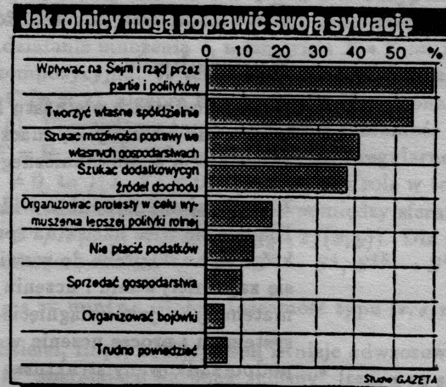
Z mechanicznego punktu widzenia matematyka jest zbiorem zasad i algorytmów. Kładzie się więc nacisk na sprawdzenie i zastosowanie tych zasad w zadaniach, które są analogiczne do rozwiązywanych poprzednio. Wiele uwagi poświęca się zapamiętywaniu i uczeniu „trików". Ze strukturalnego punktu widzenia matematyka, jako osiągnięcie poznawcze, jest zorganizowanym dedukcyjnym systemem i proces uczenia w szkolnej edukacji matematycznej powinien być podporządkowany strukturze tego systemu.
Podejście realistyczne jest tym, za którym opowiadają się ludzie skupieni wokół Instytutu Freudentala. Podejście to może być określone za pomocą zwrotów: „powtórne odkrywanie", „różne poziomy konkretu i abstrakcji", „uwarunkowanie bardziej przez przyczyny historyczno-genetyczne niż przez metodę systematyczną, właściwą przedmiotowi", „odnoszenie znaczenia do realiów".
Dla podejścia realistycznego charakterystyczne jest zwrócenie uwagi na potrzebę aktywnego zaangażowania uczniów w tworzenie sytuacji zrozumiałej i znajdowanie strategii rozwiązującej zadanie oraz preferowanie w nauczaniu przykładów zastosowań matematyki w codziennym życiu. Przyjmując mechaniczny lub strukturalny punkt widzenia nauczano matematycznych algorytmów poprzez wykład i demonstrację. W szczególności, przy zagadnieniach takich jak „procenty" trudna jest nie tylko zmiana mechanicznego (strukturalnego) podejścia, lecz także drogi nauczania.

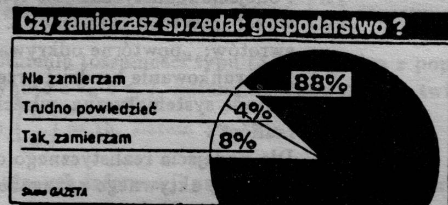
Zanim zatem zaczniemy myśleć o zmianie nauczania i uczenia się procentów musimy przynajmniej przeanalizować, czy i jak stosuje się procenty w życiu codziennym i szkolnym. Zanim zaczniemy dyskutować, czy rozpocząć nauczanie od definicji, czy intuicji wspartej wiedzą, którą uczniowie już posiadają, trzeba wziąć pod uwagę trudności występujące przy stosowaniu procentów.

Niezależnie od powyższego, w pracy z uczniami chcemy przyjąć jako podstawowy cel następujące aspekty rachowania (inteligentnego używania liczb):
1. umiejętność sensownego szacowania,
2. umiejętność przeprowadzania rozumowań dotyczących liczb bez używania algorytmów,
3. umiejętność sensownej interpretacji wyników.



W szczególności, pierwszy z wymienionych aspektów – sensowne szacowanie – jest niezbędny, gdyż często używa się procentów w bardzo ogólnych zadaniach. W wielu pozaszkolnych sytuacjach stosujemy procenty niezbyt dokładnie, np. pięćdziesiąt dwa procent to trochę więcej niż połowa, a prawie sześćdziesiąt procent to więcej niż pięćdziesiąt cztery procent. Podobnie, 8% to dwa razy więcej niż 4%.





Przy analizowaniu używania kalkulatorów zwracaliśmy także uwagę na to, jak nauczyć używania klawisza „%" i „pamięć", ponieważ te klawisze mogą pomóc uczniom w zorganizowaniu ich pracy obliczeniowej. Nie narzucaliśmy tej organizacji, lecz wymuszaliśmy na uczniach planowanie ich działania. Chcielibyśmy uczynić z uczniów mistrzów w posługiwaniu się własnymi kalkulatorami. Oznacza to używanie przez nich kalkulatorów w sposób sprawny (tzn. wykorzystaj wszystkie możliwości, jakie daje ci to narzędzie) i krytyczny (tzn. użyj, gdy jest to konieczne lub użyteczne).

Jednak znów musimy – my i nasi uczniowie – być świadomi trudności, jakie napotykamy w pracy z procentami, zanim rozpoczniemy pracę z kalkulatorem. Jest to niezwykle ważne, gdyż analiza klawisza „%" pokazuje, że wiele kalkulatorów przysparza uczniom więcej problemów, niż pomocy. Przykładem jest zapytanie kalkulatora, ile wynosi 5% liczby 200 poprzez sekwencję uderzeń: $\boxed{200}\,\boxed{\times}\,\boxed{5}\,\boxed{\%}\,\boxed{=}$

Trudności z procentami

Chociaż procenty są bardzo wygodnym narzędziem do opisu danych, to równocześnie są bardzo skomplikowane dla kogoś, kto startuje w takich obliczeniach. Przyczyny są następujące:
- asymetria w sytuacjach „odwrotnych" (patrz przykład),
- relatywny charakter procentu,
- konieczność wybrania punktu odniesienia (wielkości, na którą naprawdę należy zwrócić uwagę),
- konieczność wybrania punktu startu (wielkości, która jest podstawą obliczeń),
- przestawienie się z myślenia addytywnego na multiplikatywne.

Przykład:
Asymetria w „odwrotnych" sytuacjach staje się jasna, gdy dostrzeże się, że liczba 100 jest o 100% większa od liczby 50, ale 50 stanowi „tylko" 50% liczby 100.

Wiele informacji o trudnościach uczniów uzyskaliśmy analizując rozwiązania następującego zadania:

Pracownicy fabryki dowiedzieli się, że począwszy od następnego miesiąca ich pensja będzie zmniejszona o 10%. Pracownicy przerwali pracę. Po negocjacjach zarząd obiecał podwyższyć płacę o 10% za trzy miesiące. A zatem – wydaje się – wszystko znów będzie dobrze. Czy to prawda?
Tak, gdyż ....
Nie, gdyż..

Odpowiedzi dzieci:
– Tak, gdyż najpierw wziąłeś 10% i potem oddałeś te 10%. Masz zatem to samo, co wtedy, gdy zaczynałeś.
– Nie, gdyż oni obliczyli podwyżkę o 10% z nowej pensji pracowników.
– Nie, gdyż oni opuścili trzy miesiące po 10%, czyli 30%.

Relatywny charakter procentów

Innym rodzajem trudności są sprawy związane ze względnością procentów. Oznacza to, że „czysty" procent nie może być podstawą do porównań czynionych bez odniesienia do konkretnego przypadku. Zadanie cytowane niżej zwraca uwagę na to, że „czyste" procenty nie mogą być porównywane w żaden sposób:

Agnieszka i Andrzej są bliźniętami.
Agnieszka: Obydwoje dostaliśmy 10% rabatu, a jednak nie otrzymaliśmy tej samej kwoty. Ja dostałam 10 guldenów, a ty dostałeś tylko 5. To nie jest właściwe wobec bliźniąt, prawda?
Andrzej: Przeżyję to.
Czy jest możliwe, że ten sam procent rabatu nie stanowi takiej samej kwoty?

„Punkt odniesienia" i „punkt startu"

Zadania o relatywnym charakterze procentów są konieczne ze względu na jego znaczenie przy dokonywaniu wyboru punktu odniesienia i punktu startu w zadaniu.

Ilustracją tych komplikacji jest zadanie o liczniku na parkingu (Groendaal i in. 1992):

Ostatnio miejska rada Tiburga zdecydowała o zmianie starych liczników parkingowych na nowe. Oczywiście, parking będzie droższy.

Ramki I i II pokazują zmianę:

I	II
25 centów = 12 1/2 min 1 gulden = 50 min	25 centów = 10 min 1 gulden = 40 min

O jaki procent podrożała opłata parkingowa?
Napisz jak znalazłeś swoją odpowiedź.

Większość dzieci odpowiedziała na pytanie: „o ile procent został skrócony czas parkowania". Ich rozumowanie zostało przeprowadzone przy założeniu, że punktem odniesienia jest czas parkowania, a nie opłata za parkowanie.

Niektóre dzieci wybrały właściwy punkt odniesienia (opłata parkingowa), ale źle rozpoczęły rozwiązywanie, tj. od nowej taryfy, zamiast od starej.

Od addytywności do multyplikatywności

Najistotniejszą własnością procentów, choćby ze względu na schematyzację, jest potrzeba przestawienia się z ujęcia addytywnego na multyplikatywne – od: p procent więcej lub mniej, do: $(1+p/100)$ razy. Przestawienie to jest konieczne dla krytycznego i skutecznego użycia kalkulatora przy rozwiązywaniu bardziej skomplikowanych zadań. Ma to nawet większe znaczenie, jeśli w kalkulatorze funkcja „%" jest drugą możliwością pracy jakiegoś klawisza lub nie ma w ogóle klawisza „%".

$$100\% + p\% \Rightarrow (1+p/100)\boxed{\times}\ldots \Rightarrow \boxed{1\ldots}\boxed{\times}$$

Dla uczniów 10–12-letnich bardzo wygodne są kalkulatory takie jak: *Galaxy 9x* lub *Math Explorer*, które pomagają przy pokonywaniu trudności w zamianie rozumowań na multyplikatywne. W tych kalkulatorach przekład polecenia: „pięć procent z dwustu" jest następujący: 5% × 200 = . Kolejne napisy w wyświetlaczu kierują właściwie uwagę ucznia.

W naszym doświadczeniu nie chcieliśmy zmuszać uczniów do dokonania wspomnianego zwrotu, lecz spowodować, by stał się on istotną częścią procesu matematyzacji. Tym niemniej, w celu zachęcenia uczniów, koniecznym było użycie odpowiedniego kalkulatora i dobranie zadań wymagających pewnego wysiłku.

Przedstawimy dwa przykłady: „upadek stowarzyszenia" (z załączonymi rozwiązaniami uczniów) i „fabryka samochodów".

Upadek stowarzyszenia:
W 1970 r. stowarzyszenie liczyło 200 000 członków.
W 1971 r. 20 000 członków odeszło.
W 1972 r. liczba członków wynosiła 162 000.
W 1973 r. następne 16 200 osób opuściło stowarzyszenie.
Czy w 1990 r. jacyś członkowie odejdą, jeśli ich liczba cały czas będzie zmniejszać się w ten sposób?
W którym roku liczba członków stowarzyszenia będzie połową liczby z 1970 r.?

Jedno z dzieci zaczęło zapisywać, co się działo ze stowarzyszeniem rok po roku:

1970 200.000 leden
1971 180.000 leden $- 0{,}1 = \frac{1}{10} \times \frac{9}{10}$ 0,9 $\boxed{90\%}$
1972 162.000 leden $-\frac{1}{10}; \times\frac{9}{10} \times 0{,}9$ $\boxed{90\%}$
1973 145.800 $-\frac{1}{10}; \times\frac{9}{10} \times 0{,}9$ $\boxed{90\%}$

Od 1970 do 1971 roku odeszło 20 000 osób. – Uczniowie byli zachęcani do zapisania tego na różne sposoby: (0,1 = 1/10), co zmierzało do zapisania wyniku (×9/10 lub 0,9), a to oznacza wzięcie 90%, itd.

juni 70 200.000 - 20.000 = $\frac{9}{10}$ van 200.000 (180.000)
$\frac{10}{10}(1) - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$
71 180000 - 18.000 = $\frac{9}{10}$ van 180.000 (162.000)
$1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$
$\frac{9}{10}$ van $\frac{9}{10}$ van = 200.000 = $\frac{81}{100} \times$ 200000 = 162.000
9 9 81

Po tych wstępnych badaniach uczniowie zostali zachęceni do użycia mnożenia od samego początku:

1970 200.000
1971 0,9 × 200000 = 180.000
1972 0,9 × 0,9 × 200.000 = 162.000
1973 0,9 × 0,9 × 0,9 × 200.000 = 145.800
1974 0,9 × 0,9 × 0,9 × 0,9 × 200000 = 131.220
1975 = 118.098
1976 = 106.228,2
1977 = 95.659

Po napisaniu formuły dla 1974 roku wyrażonej przez powtarzające się mnożenia, uczniowie zaczęli odnosić sie z niechęcią do kontynuowania tej drogi. Przewidywali, że braknie im miejsca na kartce, a poza tym praca zaczęła ich nudzić. Wtedy nauczyciel zasugerował podjęcie obliczeń z użyciem kalkulatora i kontunuowanie ich dla lat następnych (po 1974 r.), z równoczesnym pamiętaniem o pytaniach postawionych na wstępie. Począwszy od danych z 1974 r. kolejne naciskanie klawiszy $\boxed{0}\,\boxed{.}\,\boxed{9}\,\boxed{\times}$ i odczytywanie wyników następowało coraz szybciej i szybciej. Ten sposób manipulacji kalkulatorem skłonił uczniów do wiary w pełną skuteczność ich metody.

$\boxed{131220} \to \boxed{0}\,\boxed{.}\,\boxed{9}\,\boxed{\times} \to$

$\boxed{118090} \to \boxed{0}\,\boxed{.}\,\boxed{9}\,\boxed{\times} \to$

$\boxed{106228} \to \boxed{0}\,\boxed{.}\,\boxed{9}\,\boxed{\times} \to$

$\boxed{95659} \to \boxed{0}\,\boxed{.}\,\boxed{9}\,\boxed{\times} \to$......

Dała ona odpowiedź, że liczba członków stowarzyszenia spadnie do połowy już po siedmiu latach.

Uwaga: Postępowanie takie przygotowuje do zrozumienia istoty problemów związanych z dwukrotnym skróceniem czasu lub czasem potrzebnym na podwojenie w przypadku wzrostu eksponencjalnego lub kumulowania odsetek.

Fabryka samochodów:

Japoński rzemieślnik udoskonalił przekładnię. W wyniku tego zużycie energii spadło o 40%. Tymczasem spółka naftowa wynalazła rodzaj paliwa, które może obniżyć zużycie o 35% dotychczasowego. Ponadto firma konstruktorska próbuje opracować patent na łożysko, dający 25% obniżki zużycia paliwa. Zakładając, że wszystkie firmy odniosą sukces, otrzymamy perputuum mobile, gdyż wszystkie obniżki razem zredukują o 100% zużycie paliwa. Można więc jeździć całkiem bez paliwa!!! Czy to prawda? Wyjaśnij, dlaczego.

Przy bardziej skomplikowanych obliczeniach procentowych konieczne było wykonanie rachunków na kartce. W tym momencie tylko mała grupa uczniów zaczynała używać klawisza pamięci do zachowania tych liczb, których chcieli znów użyć. Oczywiście, nie musieli używać tego klawisza. Mogli posługiwać się kartką i ołówkiem.

Używanie pamięci będzie jednak bardzo pomocne, gdyby ktoś – na przykład – musiał sprawdzić następujący rachunek hotelowy:

CAMPING TOLL:			
Description		Amount	VAT
Long lease	for this period	1324,00	0
Service	for this period	774,00	2
PROVISIONS:			
Kind			
Water		123,00	1
Gas		103,65	2
Elecricity		74,00	2
Antenna		93,60	2
	Subtotal	2597,25	
	VAT 1 6,00%	7,38	+
	VAT 2 18,50%	193,38	+
	Total:	Hfl. 2693,01	

Opisz dwa różne sposoby sprawdzenia tego rachunku.

Niebawem napiszemy więcej o specyficznych kłopotach, które pojawiają się, gdy chcemy, by uczniowie korzystali z klawisza pamięci w swoich kalkulatorach.

Uczenie się (i nauczanie procentów)

Powyższa analiza wyjaśnia, że realistyczne wprowadzenie procentów jest możliwe. Naukę można rozpoczynać bez formalnej definicji, przez objaśnianie przykładów takich, jak: 50% mniej do zapłacenia, obniżka o 25%, 10% więcej itd. Po tym wprowadzeniu w procenty, przez zastosowanie nieformalnej wiedzy o ułamkach zwykłych, można dalej pracować nad własnościami asymetrii i względności procentów. Nawet zadania dotyczące znajdowania punktu odniesienia i punktu startu są możliwe do rozwiązywania tak długo, jak długo można używać jedynie prostych przykładów procentów, takich jak 50, 25, 75, 10, 35 (bliskie 1/3), 20 itp.

Niezwykle ważna zmiana rozumowania z addytywnego na multyplikatywne może być forsowana przez podsunięcie jednej grupie dzieci kalkulatorów, które wyświetlają procenty jako ułamki zwykłe, a drugiej grupie innych kalkulatorów. Jeśli dzieci obserwują wyświetlacz i uczą się w ten sposób schematów postępowania, stwierdzą rozbieżność: u jednych 5% z 200 to zero, u drugich 5% z 200 to dziesięć.

Oczywiście, zagadnienia te nie mogą być zrealizowane w ciągu 2 lub 3 godzin. Uczniowie potrzebują co najmniej 4 spotkań trwających około 1,5 godz. Czas taki jest niezbędny dla prawdziwego zrozumienia tego problemu.

Wreszcie jest czas na bardziej formalną definicję, jeśli chce się używać procentów w sytuacjach trudniejszych, niż przedstawione, lub porównywalnych. Jednak przez cały czas staramy się dać uczniom zadania, w których tylko częścią jest rachunek procentowy.

Przypis tłumacza: W sierpniu bieżącego roku w szkołach holenderskich nastąpi zmiana programów nauczania. Na poziomie szkół podstawowych (do 12 roku życia) znacznie więcej czasu poświęci się geometrii, redukując treści z arytmetyki i algebry. Zarówno nauczanie geometrii jak i arytmetyki podporządkowane ma być filozofii, która w tym artykule nazwana jest „podejściem realistycznym".

Pracownicy Instytutu Freudenthala i Uniwersytetu, kształcący nauczycieli, przygotowują studentów i już pracującą w szkołach kadrę do zmiany sposobu nauczania przez prezentację odpowiednich ciągów zadań i udostępnianie opracowań przeprowadzonych badań.

Przedstawiony artykuł jest ilustracją fragmentu tych przygotowań.

Zofia MUZYCZKA