O pewnej grze topologicznej

Józef BANAŚ, Rzeszów

Celem niniejszego artykułu jest opisanie pewnej prostej gry topologicznej i wskazanie związków tej gry z różnymi interesującymi własnościami topologicznymi prostej, płaszczyzny, przestrzeni metrycznej itp.

Załóżmy, że X jest przestrzenią topologiczną, tzn. X jest zbiorem niepustym, w którym wyróżniono pewną rodzinę podzbiorów, zwanych zbiorami otwartymi, przy czym zbiór pusty oraz X należą do tej rodziny, a ponadto suma dowolnej ilości zbiorów tej rodziny też poza tę rodzinę nie wychodzi.

Będziemy dodatkowo zakładać, że X ma tzw. własność Hausdorffa, co oznacza, że każde dwa punkty $x, y \in X$, różne między sobą, można włożyć w zbiory otwarte i rozłączne.

Przykładów przestrzeni topologicznych Hausdorffa można podać bardzo wiele. Oto niektóre z nich.

Przykład 1. Weźmy płaszczyznę $\mathbb{R}^2$. Nazwijmy zbiorami otwartymi zbiory X, $X \subset \mathbb{R}^2$ o tej własności, że dla każdego $x \in X$ istnieje $K(x,r)$ (koło o środku x i promieniu $r > 0$) takie, że $K(x,r) \subset X$.

Przykład 2. Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, gdzie za otwarte będziemy uważać zbiory $A \subset \mathbb{Q}$ o tej własności, że dla każdego $x \in X$ istnieje $r > 0$ takie, że wszystkie liczby wymierne z przedziału $(x-r, x+r)$ należą do A.

Przykład 3. Niech M będzie dowolnym zbiorem niepustym i niech ρ będzie metryką w tym zbiorze, tzn. funkcją, która każdej parze punktów $x, y \in M$ przyporządkowuje liczbę nieujemną $\rho(x,y)$, zwaną odległością punktów x i y, przy czym spełnione są pewne naturalne warunki dotyczące metryki. Wtedy (M, ρ) nazywa się przestrzenią metryczną. W przestrzeni tej zbiory otwarte określa się podobnie jak w Przykł. 1, tzn. $A \subset M$ jest otwarty, jeżeli dla każdego $x \in A$ istnieje $r > 0$ takie, że $K(x,r) = \{y \in M : \rho(x,y) < r\} \subset A$.

Załóżmy dalej, że X jest topologiczną przestrzenią Hausdorffa. Zdefiniujemy teraz grę topologiczną, zwaną grą Choqueta. Załóżmy więc, że dwóch graczy β i α wybiera na przemian zbiór otwarty i niepusty w X w ten sposób, że β wybiera V_1, a następnie α wybiera $U_1 \subset V_1$. Później β wybiera zbiór otwarty $V_2 \subset U_1$ itd. Otrzymujemy w ten sposób następujący ciąg zbiorów:

$$V_1 \supset U_1 \supset V_2 \supset U_2 \supset V_3 \supset U_3 \supset \ldots$$

Będziemy mówić, że α wygrywa, jeżeli $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \emptyset$. W przeciwnym przypadku powiemy, że wygrywa β.

Zróbmy na początek uwagę świadczącą o tym, że definicja „wygrywania" jest postawiona poprawnie. Zachodzi bowiem następujące

Twierdzenie 1. Dla każdego możliwego wyboru α i β mamy, że

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n .$$

Rzeczywiście, mamy $U_n \subset V_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$, więc

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n .$$

Z drugiej strony

$$V_{n+1} \subset U_n , \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \text{skąd} \quad \bigcap_{n=2}^{\infty} V_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n .$$

Ale $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=2}^{\infty} V_n$ (bo $\{V_n\}$ jest zstępujący), więc

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n .$$

Daje to (łącznie z poprzednią inkluzją) żądaną równość.

Przyjmiemy teraz następującą definicję.

Definicja. Będziemy mówić, że X jest przestrzenią faworyzującą α, jeżeli dla α istnieje zawsze strategia wygrywająca.

W dalszym ciągu podamy kilka przykładów przestrzeni faworyzujących α oraz opiszemy pewne klasy takich przestrzeni.

Przykład 4. Weźmy płaszczyznę $\mathbf{R}^2$ z Przykł. 1. Pokażemy, że jest to przestrzeń faworyzująca gracza α. Opiszemy więc strategię α. Niech β wybierze pewien zbiór otwarty V_1. Wtedy α wybiera zbiór otwarty $U_1 \subset V_1$ i niech U_1 będzie kołem otwartym $K(x_1, r_1)$ takim, żeby koło domknięte $\overline{K}(x_1, r_1)$ zawierało się w V_1. Podobnie postępuje α w każdym następnym kroku wybierając ciąg zstępujący kół $\{K(x_n, r_n)\}$ takich, żeby $\overline{K}(x_n, r_n)$ zawierało się w V_n oraz dodatkowo, żeby $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Wtedy $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n \supset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{K}(x_n, r_n)$, zaś ten ostatni iloczyn składa się dokładnie z jednego punktu, na mocy twierdzenia Cantora. Ostatecznie oznacza to, że $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \neq \emptyset$, a więc α wygrywa.

Przykład 5. Weźmy teraz przestrzeń topologiczną liczb wymiernych $\mathbf{Q}$ (por. Przykł. 2.). Pokażemy, że ta przestrzeń nie jest faworyzująca α, lecz przeciwnie. Opierać się będziemy na dobrze znanym fakcie, że zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, czyli wszystkie liczby wymierne można ustawić w ciąg $\{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$. Załóżmy teraz, że gracz β postępuje w następujący sposób: najpierw β wybiera pewien dowolny przedział otwarty $V_1 \subset \mathbf{Q}$ (tzn. wszystkie liczby wymierne leżące w pewnym przedziale otwartym (a, b)) i taki, żeby $w_1 \notin V_1$. Następnie α wybiera jakiś zbiór otwarty $U_1 \subset V_1$. Dalej β wybiera przedział otwarty $V_2 \subset U_1$ tak, żeby $w_2 \notin V_2$. Zauważmy, że także $w_1 \notin V_2$. Postępując tak w analogiczny sposób β wybierze w n-tym kroku przedział otwarty $V_n \subset \mathbf{Q}$ taki, że $w_i \notin V_n$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $V_n \subset U_n \subset V_{n-1}$. Zauważmy, że $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n = \emptyset$ (dowód tego prostego faktu pozostawiamy Czytelnikowi). Oznacza to, że β wygrywa, a więc Q jest przestrzenią faworyzującą β.

Okazuje się, że klasa przestrzeni faworyzujących α składa się z przestrzeni mających jakieś dobre własności. Mamy bowiem

Twierdzenie 2. Każda przestrzeń metryczna zupełna jest przestrzenią faworyzującą α.

Dowód tego twierdzenia zasadza się na wspomnianym uprzednio (por. Przykł. 4.) twierdzeniu Cantora:

Jeżeli w przestrzeni metrycznej zupełnej mamy ciąg zstępujący zbiorów domkniętych i niepustych $\{U_n\}$ taki, że średnica tych zbiorów zmierza do zera, to część wspólna ciągu $\{U_n\}$ składa się z dokładnie jednego punktu.

Przestrzeń metryczną nazywamy *zupełną*, jeżeli każdy ciąg $x_1, x_2, \ldots$ spełniający warunek Cauchy'ego (tzn. taki, że $\bigwedge\limits_{\epsilon} \bigvee\limits_{k} \bigwedge\limits_{n>k} |p_n - p_k| \leq \epsilon$) jest zbieżny.

Poza tym dowód nie różni się niczym od dowodu z Przykładu 4, należy tylko koła zastępować kulami.

Na zakończenie podamy jeszcze dwa twierdzenia adresowane do bardziej zaawansowanych Czytelników. Pomijamy dowody tych twierdzeń.

Twierdzenie 3. Jeżeli przestrzeń topologiczna jest lokalnie zwarta, to faworyzuje ona gracza α.

Przestrzeń jest *lokalnie zwarta*, jeśli dla każdego x punktu istnieje zbiór otwarty G taki, że $x \in G$ i domknięcie zbioru G jest zwarte.

Twierdzenie 4. Jeżeli przestrzeń jest faworyzująca dla α, to jest ona przestrzenią Baire'a.

Przestrzeń Baire'a – taka, że każda przeliczalna suma zbiorów nigdziegęstych jest zbiorem brzegowym.

Reasumując można powiedzieć, że klasa przestrzeni topologicznych Hausdorffa, które faworyzują α zawiera w sobie z jednej strony wszystkie przestrzenie metryzowalne w sposób zupełny oraz wszystkie przestrzenie lokalnie zwarte, z drugiej zaś strony zawiera się w klasie przestrzeni Baire'a.