Czy możemy usłyszeć wymiar przestrzeni?

Tadeusz NADZIEJA, Wrocław

Przestrzeń w której żyjemy jest trójwymiarowa, to widzi każdy. Celem naszym jest wykazanie, że można to również usłyszeć.

Zacznijmy od przedstawienia dwóch powszechnie znanych faktów doświadczalnych.

(1) Sygnał dźwiękowy nadany w danym punkcie będzie odebrany w punkcie oddalonym od niego o r po czasie $T(r)$ zależnym tylko od odległości od źródła dźwięku. Dalej dla uproszczenia będziemy zakładać, że źródło dźwięku znajduje się w początku układu współrzędnych. O funkcji T zakładamy, że jest dodatnia dla $r > 0$, dwukrotnie różniczkowalna i $T(0) = 0$.

(2) Intensywność sygnału maleje wraz z odległością, tzn. jeśli w źródle dźwięku sygnał miał intensywność f, to w punkcie oddalonym o r będzie miał intensywność $\alpha(r)f$. Zakładamy, że α jest funkcją nieujemną i dwukrotnie różniczkowalną. Naturalnym jest też założenie, że w nieskończoności α znika.

Załóżmy też dodatkowo, że:

(3) możemy nadać dowolny sygnał dźwiękowy.
Założenie to nie należy do oczywistych faktów doświadczalnych, ale wyda się naturalnym każdemu, kto kiedykolwiek słuchał np. muzyki współczesnej.

Przejdźmy teraz do matematycznej interpretacji naszych założeń oraz faktów z nich wynikających.

Źródło dźwięku powoduje małe zmiany gęstości powietrza, których rozprzestrzenianie się opisuje równanie fali

(1) $$a^{-2}u_{tt} = \Delta u,$$

gdzie $u(p,t)$ oznacza kompresję gazu w punkcie p i chwili t. Współczynnik a jest pewną stałą fizyczną, którą dla uproszczenia przyjmiemy równą 1. Przypomnijmy jeszcze, że kompresja gazu jest to względna zmiana gęstości gazu spowodowana przez źródło dźwięku.

Ponieważ rozpatrujemy punktowe źródło dźwięku, więc fala dźwiękowa $u(p,t)$ będzie funkcją radialnie symetryczną spełniającą równanie (1), które przyjmie postać

(2) $$u_{tt} = u_{rr} + \frac{n-1}{r}u_r.$$

Parametr n w równaniu jest wymiarem przestrzeni, w której rozpatrujemy rozchodzenie się dźwięku.

Z naszych założeń wynika, że istnieją funkcje dodatnie, dwukrotnie różniczkowalne $T(r)$, $\alpha(r)$ takie, że dla dowolnej dwukrotnie różniczkowalnej funkcji f, funkcja $u(r,t) := \alpha(r)f(t - T(r))$ jest rozwiązaniem równania (2).

Obliczmy odpowiednie pochodne funkcji u:

$$u_{tt} = \alpha f'', \quad u_r = \alpha' f - \alpha T' f', \quad u_{rr} = \alpha f - 2\alpha' T' f' - \alpha T'' f' + \alpha(T')^2 f''$$

i wstawmy je do równania (2). Otrzymujemy

(3) $$\alpha f'' = \frac{n-1}{r}\alpha' f - \frac{n-1}{r}\alpha T' f' + \alpha'' f - (2\alpha' T' + \alpha T'')f' + \alpha(T')^2 f''.$$

Ponieważ równość (3) ma zachodzić dla dowolnej funkcji f (wystarczy zakładać, że zachodzi dla dostatecznie szerokiej klasy funkcji np. wielomianów), więc sumy współczynników przy f, f' i f'' muszą się zerować. W szczególności porównując współczynniki przy f'' dostajemy $\alpha = \alpha(T')^2$, co przy założeniach $\alpha > 0$, $T(0) = 0$, pozwala wyznaczyć $T(r) = r$. Wykorzystując postać funkcji T i przyrównując do zera współczynniki przy f' i f dostajemy

(4) $$2\alpha' + \frac{n-1}{r}\alpha = 0$$

oraz

$$\alpha'' + \frac{n-1}{r}\alpha' = 0. \tag{5}$$

Ogólne rozwiązanie równania (4) ma postać $\alpha(r) = Cr^{(-n)/2}$, gdzie C jest pewną stałą. Założyliśmy, że funkcja α jest dodatnia i znika w nieskończoności. Tak więc $n > 1$.

Podstawiając α' i α'' do równania (5) otrzymujemy równanie na n, którego jedynym rozwiązaniem jest $n = 3$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że jedynie w przestrzeni trójwymiarowej możliwe jest rozchodzenie się fal dźwiękowych tak, aby były spełnione warunki (1), (2) i (3).