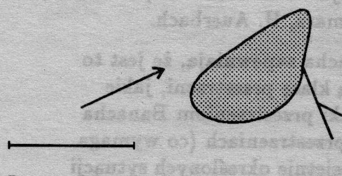
Krotności odwzorowań peanowskich:

# O pewnym mniej znanym twierdzeniu Hurewicza

*W. DĘBSKI i J. MIODUSZEWSKI, Katowice*

Przez odwzorowanie *peanowskie* rozumiemy odwzorowanie ciągłe odcinka domkniętego prostej rzeczywistej na podzbiór płaszczyzny mający wnętrze niepuste. Ilość punktów, w których jest przyjęta dana wartość, nazywana jest jej *krotnością*. Odwzorowanie *krotności skończonej* to odwzorowanie, którego wszystkie wartości mają krotność skończoną.

Hurewicz (1933) dowiódł, że *odwzorowanie krotności skończonej mające* (dla swoich wartości) *nie więcej niż dwie krotności nie może być peanowskie.* Przedtem, z prac Hahna (1913) i Mazurkiewicza (1915), było wiadomo, że *odwzorowanie nie może być peanowskim, jeśli krotności jego wartości są* $\leq 2$.



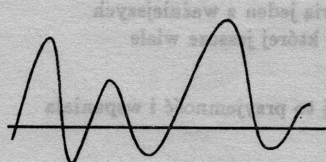
Rys. 1. Odwzorowanie peanowskie

Twierdzenie Hurewicza jest mało znane i nie przeszło do kursu topologii, chociaż w tej ogólności, w jakiej zostało tu wypowiedziane powinno się w nim znaleźć. Oryginalny dowód Hurewicza to dowód twierdzenia od razu o wiele ogólniejszego, wymagającego wyjścia poza elementarne środki topologii, które tu będą użyte.

To ogólne brzmienie i komentarz co do środków dowodowych, do których wypada się wtedy uciec, będą dane w końcowej części artykułu.

1. **Pewne twierdzenie pomocnicze.** Wartość $y$ odwzorowania $f : X \to Y$ nazwijmy *wartością otwartości*, jeśli dla każdego punktu $x$, w którym jest przyjęta, leży we wnętrzu obrazu jakkolwiek wziętego otoczenia $U$ punktu $x$, tj. $y \in \operatorname{int} f(U)$ – jeśli użyć ogólnie przyjętej symboliki.

Wartości nie będące wartościami otwartości są dla odwzorowań ciągłych – przy naturalnych założeniach co do przestrzeni – raczej wyjątkowe: dla funkcji rzeczywistych są to wartości, których poziomice nie trafiają wykresów w ekstremach lokalnych.



Rys. 2. Jeszcze Schoenflies (1900), a potem Sierpiński (1912, ale nie zakładając ciągłości), wiedzieli, że poziomic przecinających wykres w ekstremach właściwych jest co najwyżej przeliczalnie wiele.

Niech $X$ będzie przestrzenią metryczną zwartą i niech $B$ będzie jej ustaloną bazą przeliczalną. Niech $f$ będzie odwzorowaniem ciągłym, przestrzeni $X$ na przestrzeń metryczną $Y$. Usuńmy z $Y$ brzegi zbiorów $f(A)$, gdzie $A$ są domknięciami zbiorów z bazy $B$. Usuwamy w ten sposób przeliczalnie wiele zbiorów domkniętych rzadkich (brzegi zbiorów domkniętych są rzadkie (i domknięte); zbiory $f(A)$ są domknięte, będąc podzbiorami zwartymi przestrzeni metrycznej). Usuwamy więc z $Y$ zbiór I-ej kategorii typu $F_\sigma$. *Pozostała $G_\delta$-a gęsta składa się z samych wartości otwartości odwzorowania $f$.*

Rozumowanie to zawiera treść twierdzenia, z którego będziemy korzystali.

2. **Sformułowanie twierdzenia i dowód.** To, czego dowiedziemy, będzie nieco szczegółowsze.

**Twierdzenie.** *Wartości dwu najwyższych krotności nie mogą być wartościami otwartości odwzorowania peanowskiego, jeśli leżą we wnętrzu obrazu.*

Wobec tego, że wartości otwartości odwzorowania peanowskiego tworzą podzbiór gęsty obrazu (czego dowiedliśmy wcześniej i nawet ogólniej), z wypowiedzianego twierdzenia wynika, że *odwzorowanie peanowskie musi mieć wśród swoich wartości co najmniej trzy o różnych krotnościach*, co się pokrywa z treścią zapowiedzianego na wstępie twierdzenia.

D o w ó d  t w i e r d z e n i a. Niech $f : I \to E^2$ będzie odwzorowaniem ciągłym, krotności skończonej, odcinka domkniętego prostej w płaszczyznę i niech $y$ będzie wartością tego odwzorowania leżącą we wnętrzu obrazu. Niech

$$f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}, \quad x_i \neq x_j, \text{ jeśli } i \neq j.$$

Przyjmijmy, że $y$ jest wartością otwartości i że liczba $k$ jest jedną z dwu najwyższych krotności odwzorowania $f$.

Niech $U_j$ będą przedziałami wokół $x_j$, wzajemnie rozłącznymi. Wartość $y$ leży we wnętrzu każdego ze zbiorów $f(U_j)$. Niech $W$ będzie obszarem wokół punktu $y$ zawartym w przekroju zbiorów $\operatorname{int} f(U_j)$.

Zbiór zwarty zerowymiarowy, a więc nie zawierający kontinuów wielopunktowych, nie rozcina żadnego obszaru płaskiego; ogólnie: zbiór zwarty wymiaru nie większego od $n-2$ nie rozcina żadnego obszaru przestrzeni $E^n$.

Tu i dalej skorzystać trzeba z lematu Janiszewskiego „o dochodzeniu do brzegu": składowe podzbioru otwartego kontinuum mają punkty skupienia na brzegu tego podzbioru. Zbiory spójne niezwarte nie mają na ogół tej własności, na co przykładem może być słynna „miotełka" Knastera–Kuratowskiego – zbiór spójny, który po usunięciu już jednego punktu zostaje pozbawiony kontinuów wielopunktowych.

Weźmy pod uwagę jeden ze zbiorów $U_j$, niech będzie to zbiór $U_1$, a w nim otoczenie $U$ punktu $x_1$ na tyle małe, by $f(\overline{U})$ zawierało się we wnętrzu obszaru $W$. Nadal $y \in \operatorname{int} f(\overline{U})$ (jest nawet $y \in \operatorname{int} f(U)$, bo $y$ jest wartością otwartości). Z obu wymienionych przesłanek wynika, że brzeg zbioru $f(U)$ rozcina obszar płaski $W$. Na mocy znanych twierdzeń o rozcinaniu, zbiór rozcinający obszar zawiera kontinuum wielopunktowe. Niech więc $C$ będzie kontinuum wielopunktowym zawartym w brzegu zbioru $f(\overline{U})$ i przy tym takim, że żadna z wartości odwzorowania $f$ przyjęta na końcach przedziału $U$ nie należy do $C$.

Jeśli $c \in C$, to $c \in f(U)$, bo wartości przyjęte na brzegu zbioru $U$ (prościej: na końcach przedziału $U$) nie należą do $C$. Ponieważ brzeg zbioru $f(\overline{U})$ jest rzadki w obszarze $W$, więc punkt $c$ jest granicą ciągu punktów zbioru $W$ leżących poza zbiorem $f(\overline{U})$. Punkty tego ciągu są wartościami odwzorowania $f$ przyjętymi na punktach zbioru $U_1$ (bo $f(U_1) \supset W$), przy tym leżącymi poza zbiorem $(\overline{U})$. Ich punkty skupienia leżą poza zbiorem $U$ i są przeprowadzane przez odwzorowanie $f$ na punkt $c$. Punkt $c$ jest więc wartością odwzorowania $f$ w co najmniej jednym punkcie spoza $U$. Ponieważ punkt $c$ – jako punkt zbioru $W$ – jest przyjęty jako wartość w każdym ze zbiorów (rozłącznych) $U_j$, więc jest wartością odwzorowania $f$ w co najmniej $k+1$ punktach.

W przypadku, kiedy liczba $k$ jest najwyższą krotnością, dowód jest zakończony, wobec otrzymanej sprzeczności.

W przypadku, który pozostał, rozważmy odwzorowanie $f$ zawężone do $f^{-1}(C)$. Z poprzedniego rozumowania, wobec dowolności $c$, odwzorowanie to jest stałej krotności (najwyższej dla $f$), tj. tej samej krotności $r$ dla każdej wartości.

Niech $c'$ będzie wartością otwartości rozważanego odwzorowania zawężonego. Jest $f^{-1}(c') = \{c'_1, \ldots, c'_r\}$, gdzie wszystkie $c'_j$ są różne. Niech $V_j$ będą otoczeniami otwartymi punktów $c'_j$, załóżmy, że wzajemnie rozłącznymi. Wartość $c'$ leży we wnętrzach względem $C$ zbiorów $f(V_j)$.

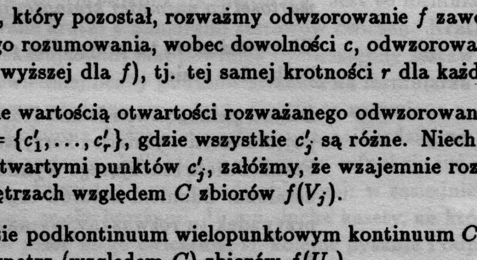
Niech $C'$ będzie podkontinuum wielopunktowym kontinuum $C$ zawartym w przekroju wnętrz (względem $C$) zbiorów $f(U_j)$.

Mamy

$$f^{-1}(C') = C'_1 \cup \ldots \cup C'_r,$$

gdzie $C'_j = V_j \cap f^{-1}(C')$. Zbiory $C'_j$ są wzajemnie rozłączne (leżąc we wzajemnie rozłącznych zbiorach $V_j$) i są zwarte (co wynika ze zwartości $f^{-1}(C')$ przy rozłączności zbiorów otwartych $V_j$). Ponieważ kontinuum $C'$ leży w przekroju zbiorów $f(U_j)$, więc każdy punkt tego kontinuum jest przyjęty jako wartość w każdym ze zbiorów $V_j$, co znaczy, że w każdym ze zbiorów $C'_j$, przy tym dokładnie raz, bo $V_j$ są wzajemnie rozłączne. Stąd wniosek, że odwzorowanie $f$ zawężone do $C'_j$ jest (dla każdego $j$) wzajemnie jednoznaczne, a wobec zwartości, jest homeomorfizmem na continuum $C'$.

Zatem, wszystkie $C'_j$ są podkontinuami woielopunktowymi odcinka $I$, a więc odcinkami, przy tym wzajemnie rozłącznymi. Kontinuum $C'$ jest więc łukiem leżącym we wnętrzu płaskim zbioru $f(I)$.




Rys. 3

Niech $c''$ będzie punktem łuku $C'$ nie będącym jego końcem (p. rys. 3). Punkty $c''_j$ przeciwobrazu $f^{-1}(c'') = \{c''_1, \ldots, c''_r\}$ są punktami wewnętrznymi odcinków $C'_j$. Zatem suma $C'_1 \cup \ldots \cup C'_r$ jest otoczeniem przeciwobrazu $f^{-1}(c'')$ punktu $c''$; nadmieńmy, że jest to przeciwobraz pełnego odwzorowania $f$, bo krotność wartości leżących na $C$ jest najwyższa. Jako obraz otoczenia przeciwobrazu punktu $c''$, obraz sumy odcinków $C'_j$ powinien być otoczeniem punktu $c''$ w $f(I)$. Ale z drugiej strony wiemy, że leży na łuku $C'$, rzadkim w $f(I)$. Sprzeczność.

**3. Uwagi.** Odwzorowanie peanowskie, jeśli jest krotności skończonej, musi mieć (jak było dowiedzione) wartości co najmniej trzech krotności. *Czy wszelkie trójki się realizują?* Klasyczne odwzorowanie zbudowane przez Peanę ma wartości jedynie krotności 1, 2 i 4. Pólya zbudował odwzorowanie peanowskie z krotnościami jedynie 1, 2 i 3. Te klasyczne odwzorowania, jak i inne uznane już za klasyczne, zbudowane przez Hilberta i Sierpińskiego, są odwzorowaniami nieprzywiedlnymi w tym znaczeniu, że jeśli z dziedziny usunąć zbiór otwarty, to obraz się zmniejszy. Wartości krotności 1 tworzą wtedy zbiór gęsty typu $G_\delta$ pokrywający się z wartościami otwartości odwzorowania. *Czy*, tak jak we wszystkich znanych przykładach, *muszą się wtedy pojawić wartości krotności* 2*?* Książka Sierpińskiego „Wstęp do teorii mnogości i topologii" jest najlepszym źródłem wiadomości o wspomnianych klasycznych odwzorowaniach peanowskich (p. także artykuł drugiego z autorów w angielskojęzycznym wydaniu tego czasopisma i w *Delcie* Nr 7 z r. 1977).

To, czego dowiódł Hurewicz, jest twierdzeniem o wiele ogólniejszym i orzeka zgrubsza tyle, że *jeśli przestrzeń metryczna ośrodkowa nie odbiega za wiele własnościami od rozmaitości* – spełniając tzw. warunek ($\alpha$) Hurewicza – *to każde jej odwzorowanie ciągłe, którego obrazem jest przestrzeń* (metryczna ośrodkowa) *o wymiarze większym o* $m$ *od wymiaru przestrzeni odwzorowywanej, musi mieć wartości co najmniej krotności* $m+2$.

W rozważanym tu przypadku odwzorowanie podwyższało wymiar o 1, stąd liczba 3 w tezie.

Dowód pełnego twierdzenia Hurewicza wymaga jednak wejścia w rozwinięte pojęcia teorii wymiaru i korzysta z jednego raczej trudnego twierdzenia Freudenthala szacującego wymiar zbiorów wartości o krotności wyższej niż ustalona. Zdaniem autorów tego artykułu, każde wyjście poza elementarny przypadek tu rozważany, wymaga już tych zaawansowanych środków.

**Literatura**

W. Hurewicz, *Über dimensionserhohende stetige Abbildungen*, Journal für reine und angewadte Mathematik 169 (1933), 71–78.

W. Sierpiński, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, II wyd., Warszawa 1947.