W 100 rocznicę urodzin Stefana Banacha (30 III 1892–31 VIII 1945)

„Banach Contraction Principle”
czyli
zasada odwzorowań zwężających

Jarosław GÓRNICKI, Rzeszów

Doniosłość osiągnięć człowieka weryfikuje czas. Wielkość matematyków zwykło się mierzyć uniwersalnością wskazanych metod i uzyskanych rezultatów. Zainteresowani matematyką wiedzą jak wielki wpływ na jej rozwój wywarły prace Euklidesa, J. Newtona, L. Eulera, C. Gaussa, B. Riemanna, G. Cantora czy D. Hilberta. Wśród znakomitych matematyków XX wieku nie można pominąć Polaka – Stefana Banacha. Powszechnie jest on uważany za jednego z twórców ważnego kierunku współczesnej matematyki – analizy funkcjonalnej.

Spróbujmy na przykładzie jednego twierdzenia zobaczyć na czym polega fenomen metod wskazanych przez S. Banacha i jego kontynuatorów. Zadanie to jest niełatwe, gdyż metody te nadal należą do tzw. matematyki wyższej.

S. Banach początkowo studiował matematykę samodzielnie. Przez krótki czas uczęszczał na Uniwersytet Jagielloński słuchając wykładów prof. S. Zaremby. Następnie wstąpił na Politechnikę Lwowską, gdzie zdał tzw. pierwszy egzamin, świadczący o zaliczeniu dwóch początkowych lat studiów inżynierskich – był to półdyplom. Studia te przerwał wybuch I wojny światowej. Matematyką interesował się Banach nadal. Poznawał ją z literatury i rozmów z matematykami, nie odbywając regularnych studiów.

Nie przeszkodziło mu to przedstawić Uniwersytetowi Jana Kazimierza we Lwowie, w 1920 roku, tezy doktorskiej: *Sur les opérations dans les ensambles abstraicts et leur application aux équations intégrales* (O operacjach na zbiorach abstrakcyjnych i ich zastosowaniach do równań całkowych) ogłoszonej drukiem w czasopiśmie Fundamenta Mathematicae t. III (1922), str. 133–181. Od tego momentu rozpoczyna się błyskotliwa kariera naukowa. Oto kilka dat:

rok 1920 – nie mając ukończonych studiów S. Banach otrzymuje asystenturę matematyki przy Wydziale Mechanicznym Politechniki Lwowskiej;

rok 1920 – uzyskanie doktoratu na UJK;

30 VI 1922 – habilitacja na UJK;

22 VII 1922 – nominacja na profesora nadzwyczajnego UJK;

rok 1924 – S. Banach zostaje członkiem korespondentem Polskiej Akademii Umiejętności;

17 IX 1927 – nominacja na profesora zwyczajnego UJK;

rok 1929 – wspólnie z H. Steinhausem zakłada i wydaje czasopismo *Studia Mathematica* publikujące prace z analizy funkcjonalnej;

rok 1931 – ukazuje się dzieło „*Teorja operacyj* t. I, Operacje linjowe”;

rok 1932 – jako pierwszy tom Monografii Matematycznych ukazuje się francuskojęzyczna wersja *Théorie des opérations linéaires* – jedno z najważniejszych dzieł matematycznych XX wieku;

17 VII 1935 – wpisanie przez S. Banacha pierwszego problemu do tzw. *Księgi Szkockiej* (ostatni, 193 problem wpisany jest pod datą 31 V 1941, jego autorem jest Hugo Steinhaus);

rok 1936 – plenarny odczyt na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Oslo;

rok 1939 – S. Banach zostaje laureatem Wielkiej Nagrody Akademii.

W swojej pracy doktorskiej S. Banach dowodzi m.in. twierdzenia, które obecnie w światowej literaturze matematycznej nosi nazwę *Banach Contraction Principle*. Jest ono cytowane we wszystkich podręcznikach analizy funkcjonalnej. Współcześnie formułujemy je następująco:

Twierdzenie Banacha – zasada odwzorowań zwężających.
Niech (M,d) będzie zupełną przestrzenią metryczną i niech $T : M \to M$ będzie kontrakcją (odwzorowaniem zwężającym), tzn. spełnia warunek

$$\bigvee_{0<L<1} \bigwedge_{x,y\in M} d(Tx,Ty) \le L\cdot d(s,y)\,.$$

Wtedy odwzorowanie T ma dokładnie jeden punkt stały w zbiorze M, tj. taki punkt $x\in M$, że $Tx=x$; co więcej dla każdego $x_0\in M$ ciąg iteracji $\{T^n x_0\}$ jest zbieżny do tego punktu stałego.

Poświęcimy trochę więcej uwagi metodom dowodu tego twierdzenia.

Dowód I (niekonstruktywny – tylko do „co więcej").
Niech $a=\inf\{d(x,Tx) : x\in M\}$. Dla $\varepsilon>0$ wybieramy $x\in M$ taki, że $d(x,Tx)\le a+\varepsilon$. Wówczas

$$a\le d(Tx,T^2x)\le L\cdot d(x,Tx)\le L\cdot(a+\varepsilon)\,.$$

Ponieważ $L<1$, zaś $\varepsilon>0$ może być dowolnie małe, więc $a=0$. Dla $\varepsilon>0$ określamy teraz zbiory $M_\varepsilon=\{x\in M : d(x,Tx)\le\varepsilon\}$, które są niepuste i domknięte. Ponadto dla $x,y\in M_\varepsilon$,

$$d(x,y)\le d(x,Tx)+d(Tx,Ty)+d(Ty,y)\le 2\cdot\varepsilon+L\cdot d(x,y)\,,$$

czyli

$$\operatorname{diam}(M_\varepsilon)\le\frac{2\cdot\varepsilon}{1-L}\xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{}0\,.$$

Stosując zatem twierdzenie Cantora do rodziny zbiorów $\{M_\varepsilon\}$, gdy $\varepsilon\downarrow 0$, otrzymujemy $\bigcap_{\varepsilon>0} M_\varepsilon=\{x_0\}$, który jest jedynym punktem stałym odwzorowania T. □

Kolejny dowód jaki zaprezentujemy będzie dla odmiany konstruktywny. Tak właśnie dowodził tego twierdzenia S. Banach. Jak zobaczymy jest to coś więcej niż dowód – to zastosowanie metody kolejnych przybliżeń. Właśnie ze względu na metodę (i możliwość zastosowania jej w innych sytuacjach) ten, a nie inny dowód podawany jest w podręcznikach. Jego znajomość należy obecnie do elementarnego wykształcenia każdego matematyka.

Dowód II (konstruktywny).
Wybieramy dowolnie punkt $x_0\in M$. Jeżeli $Tx_0=x_0$, to przechodzimy do wykazania jedyności punktu stałego. W przypadku, gdy $Tx_0\ne x_0$ definiujemy iteracyjnie ciąg $\{x_n\}$ w następujący sposób: $x_{n+1}=Tx_n$, $n=0,1,2,\ldots$ (lub równoważnie $x_n=T^n x_0$). Wówczas dla dowolnych $n,p\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
d(x_n,x_{n+p}) &= d(T^n x_0,T^{n+p}x_0)\le L^n\cdot d(x_0,T^p x_0)\le\\
&\le L^n\cdot[d(x_0,Tx_0)+d(Tx_0,T^2x_0)+\ldots+d(T^{p-1}x_0,T^p x_0)]\le\\
(*)\qquad &\le L^n\cdot(1+L+L^2+\ldots+L^{p-1})\cdot d(x_0,Tx_0)\le\\
&\le\frac{L^n}{1-L}\cdot d(x_0,Tx_0)\,.
\end{aligned}$$

To oznacza, że ciąg $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Ponieważ przestrzeń M jest zupełna, więc istnieje $x\in M$ taki, że $x=\lim_{n\to\infty}x_n$. Tak określony punkt x jest punktem stałym odwzorowania T! Korzystając z ciągłości T, mamy:

$$Tx=T(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}Tx_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x\,.$$

Jest to jedyny punkt stały. Gdyby istniały dwa punkty $x,y\in M$, $x\ne y$ takie, że $Tx=x$, $Ty=y$, to

$$d(x,y)=d(Tx,Ty)\le L\cdot d(x,y)<d(x,y)\,,$$

co jest niemożliwe. □

Dodatkowo, gdy $p \to +\infty$, we wzorze (*) otrzymujemy oszacowanie „skuteczności" przybliżania punktu stałego:

$$d(x_n, x) \le \frac{L^n}{1-L} \cdot d(x_0, Tx_0)\,.$$

Twierdzenie to znalazło zastosowanie w rozmaitych fragmentach matematyki oraz stało się inspiracją do poszukiwania różnorodnych jego uogólnień. Zobaczmy teraz na „szkolnych" przykładach jak w praktyce wygląda jego zastosowanie.

Przykład 1.
Wykażemy, że równanie

$$(**) \qquad x^k - (1+k)\cdot(1-x) = 0\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

ma w przedziale $(0,1)$ dokładnie jeden pierwiastek. Równanie (**) możemy zapisać w postaci: $x = 1 - \frac{x^k}{1+k}$. Przedział $[0,1]$ z naturalną metryką $d(x,y) = |x-y|$ jest przestrzenią zupełną. Odwzorowanie $T : [0,1] \to [0,1]$ określone wzorem

$$Tx = 1 - \frac{x^k}{1+k}\,, \quad x \in [0,1]\,,$$

jest kontrakcją. Dla $x, y \in [0,1]$, mamy:

$$|Tx - Ty| = |1 - \frac{x^k}{1+k} - 1 + \frac{y^k}{1+k}| = \frac{1}{1+k}\cdot|y^k - x^k| =$$
$$= \frac{1}{1+k}\cdot|x-y|\cdot|x^{k-1} + x^{k-2}\cdot y + \ldots + x\cdot y^{k-2} + y^{k-1}| \le$$
$$\le \frac{k}{1+k}\cdot|x-y|\,.$$

Zatem na podstawie twierdzenia Banacha równanie $Tx = x$ ma w zbiorze $[0,1]$ dokładnie jedno rozwiązanie. Ponieważ $T(0) \ne 0$, $T(1) \ne 1$, więc rozwiązanie należy do zbioru $(0,1)$.

Zwróćmy uwagę, że w tym rozumowaniu nie korzystaliśmy z rachunku różniczkowego, a ponadto za pomocą procesu iteracyjnego:

$$\begin{cases} x_0 \in (0,1)\,, \\ x_{n+1} = 1 - \frac{(x_n)^k}{1+k}\,, \quad n = 0,1,2,\ldots\,, \end{cases}$$

możemy z dowolną dokładnością zlokalizować pierwiastek równania (**).

Przykład 2.
Wiele zagadnień można opisać za pomocą równań różniczkowych postaci

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t))\,, \ t \in [0,T]\,, \\ x(0) = \xi \text{ – to jest tzw. warunek początkowy,} \end{cases}$$

gdzie $f(t,x)$ jest ciągłą funkcją rzeczywistą.

Na przykład biorąc równanie różniczkowe: $x'(t) = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, zgadujemy, że posiada ono nieskończenie wiele rozwiązań postaci $x(t) = c \cdot e^t$, ale tylko jedno spełniające warunek $x(0) = \xi$.

Zasadnicze pytanie w teorii równań różniczkowych jest następujące: kiedy równanie (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie i, oczywiście, jak je wyznaczyć? Klasyczne rezultaty uzyskali tu m.in. L. Euler, A. Cauchy (1844), R. Lipschitz (1876), G. Peano (1890). Jeden z nich teraz omówimy.

Rozważmy przestrzeń $C[0,T]$ funkcji ciągłych $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$ ze standardową normą supremum $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(t)| : t \in [0,T]\}$. Tak określona przestrzeń jest zupełna. Całkując obustronnie równanie (1) otrzymujemy równoważne sformułowanie:

$$x(t) = \xi + \int_0^t f(s, x(s))\, ds\,.$$

Zatem rozwiązanie równania różniczkowego (1) to nic innego jak punkt stały odwzorowania $F : C[0,T] \to C[0,T]$ opisanego wzorem:

$$(2) \qquad (Fx)(t) = \xi + \int_0^t f(s, x(s))\,ds\,.$$

Nasze pytania sprowadzają się więc do pytań o istnienie, jednoznaczność i możliwość wskazania punktu stałego tak określonej operacji F.

Jednym z klasycznych rezultatów jest wynik Lipschitza, który udowodnimy opierając się na twierdzeniu Banacha.

Twierdzenie (R. Lipschitz, 1876).
Jeżeli $f : [0,T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest funkcją ciągłą i spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$ względem drugiej zmiennej, tzn.

$$\bigwedge_{x,y\in\mathbf{R}} |f(t,x) - f(t,y)| \le L \cdot |x - y|\,, \quad t \in [0,T]\,,$$

to rozwiązanie równania różniczkowego (1) istnieje i jest jedyne.

Dowód (metodą remetryzacji A. Bieleckiego [1]).
Samo odwzorowanie F opisane wzorem (2) nie musi być kontrakcją w przestrzeni $C[0,T]$ z normą supremum. Zmieniając jednak normę (w sposób równoważny) w przestrzeni $C[0,T]$ możemy spowodować, że w nowej normie odwzorowanie F będzie kontrakcją.

Dla dowolnego $\lambda \ge 0$ definiujemy normę w przestrzeni $C[0,T]$:

$$\|x\|_\lambda = \max\{e^{-\lambda\cdot L\cdot t} \cdot |x(t)| : t \in [0,T]\}\,.$$

Oczywiście $\|\cdot\|_0$ pokrywa się ze standardową normą supremum, a ponieważ

$$e^{-\lambda\cdot L\cdot T} \cdot \|x\|_0 \le \|x\|_\lambda \le \|x\|_0\,,$$

więc wszystkie λ-normy są równoważne. Wykonajmy niezbędne rachunki:

$$|(Fx)(t)| - (Fy)(t)| = \left| \int_0^t f(s, x(x))\,ds - \int_0^t f(s, y(s)\,ds \right| \le$$

$$\le \int_0^t |f(s, x(x)) - f(s, y(s))|\,ds \le \int_0^t L \cdot |x(s) - y(s)|\,ds =$$

$$= \int_0^t L \cdot e^{\lambda Ls} \cdot e^{-\lambda Ls} \cdot |x(s) - y(s)|\,ds =$$

$$= \int_0^t L \cdot e^{\lambda Ls} \cdot \|x - y\|_\lambda\,ds =$$

$$= \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda Lt} - 1) \cdot \|x - y\|_\lambda \le \frac{1}{\lambda} \cdot e^{\lambda\cdot L\cdot t} \cdot \|x - y\|_\lambda\,.$$

Mnożąc obie strony nierówności przez $e^{-\lambda Lt}$ i biorąc maksimum z lewej strony, otrzymujemy:

$$\|Fx - Fy\|_\lambda \le \frac{1}{\lambda} \cdot \|x - y\|_\lambda\,.$$

Zatem dla $\lambda > 1$, odwzorowanie F jest kontrakcją względem normy $\|\cdot\|_\lambda$.
Na podstawie twierdzenia Banacha istnieje dokładnie jeden element $x \in C[0,T]$ (jedna funkcja) taki, że $Fx = x$, który jest szukanym rozwiązaniem równania (1). □

Wiemy już, że rozwiązanie istnieje, ale nie wiemy, czemu jest równe. Gdy przypomnimy sobie teraz konstruktywny dowód twierdzenia Banacha, to stwierdzimy, że rozwiązanie x możemy z dowolną dokładnością aproksymować za pomocą ciągu funkcji określonych indukcyjnie:

$$(3) \qquad \begin{cases} x_0(t) = \xi\,, \\ x_{n+1}(t) = \xi + \int_0^t (s, x_n(s))\,, ds\,, \quad \text{n=0,1,2,\dots} \end{cases}$$

Dysponując tą obserwacją możemy wyliczyć (a nie zgadnąć!) rozwiązanie równania: $x'(t) = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, z warunkiem początkowym $x(0) = 1$. Wówczas odpowiednie równanie całkowe ma postać

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Korzystając ze wzoru (3), otrzymujemy:

$$x_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Granicą tego ciągu jest funkcja $x(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$.

Z pomocą twierdzenia Banacha można udowodnić (lub uprościć dotychczasowe dowody) wiele ważnych faktów, np. twierdzenie o funkcji uwikłanej, twierdzenie Stone'a–Weierstrassa o aproksymacji [9], twierdzenie o niezmienniczości obszaru.

Czas wreszcie wspomnieć o inspirującej roli twierdzenia Banacha. Analizując jego założenia łatwo możemy przekonać się, że są one w opisanej sytuacji optymalne.

Samo twierdzenie doczekało się różnorodnych uogólnień. Na przykład teza twierdzenia pozostaje prawdziwa w przypadku, gdy odwzorowanie T jest ciągłe, choć nie jest kontrakcją, ale

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|T^n|} < 1, \text{ gdzie } |T^n| = \sup\left\{\frac{d(T^n x, T^n y)}{d(x,y)} : x \neq y\right\}$$

(inaczej: gdy T jest odwzorowaniem ciągłym i któraś jego iteracja T^k jest kontrakcją).

Z drugiej strony twierdzenie Banacha sprowokowało cały szereg pytań. Najbardziej inspirującym okazało się pytanie o warunki gwarantujące istnienie punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających, tzn. spełniających warunek:

$$\bigwedge_{x,y\in M} d(Tx, Ty) \leq d(x,y)\,.$$

Pokusa była wielka. Weźmy bowiem zbiór wypukły domknięty i ograniczony w przestrzeni unormowanej $(E, \|\cdot\|)$ oraz odwzorowanie nieoddalające $T : C \to C$, punkt $z \in C$, $\varepsilon > 0$. Przekształcenie $T_\varepsilon x = \varepsilon \cdot z + (1-\varepsilon)\cdot Tx$ jest już na zbiorze C kontrakcją: dla dowolnych $x, y \in C$,

$$\begin{aligned}\|T_\varepsilon x - T_\varepsilon y\| &= \|\varepsilon \cdot z + (1-\varepsilon)\cdot Tx - \varepsilon\cdot z - (1-\varepsilon)\cdot Ty\| \leq \\ &\leq (1-\varepsilon)\cdot\|Tx - Ty\| \leq (1-\varepsilon)\cdot\|x-y\|\,.\end{aligned}$$

Na podstawie twierdzenia Banacha dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje punkt $x_\varepsilon \in C$ taki, że $T_\varepsilon x_\varepsilon = x_\varepsilon$. Wówczas

$$\begin{aligned}\|x_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| &= \|T_\varepsilon x_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| = \|\varepsilon\cdot z + (1-\varepsilon)\cdot Tx_\varepsilon\| \leq \\ &\leq \varepsilon\cdot\|x - Tx_\varepsilon\| \leq \varepsilon\cdot \operatorname{diam} C\,.\end{aligned}$$

Wobec dowolności liczby $\varepsilon > 0$, $\inf\{\|x - Tx\| : x \in C\} = 0$. Wynik ten nie gwarantuje istnienia punktu stałego, ale pokazuje, że w tej sytuacji istnieją punkty, które są dowolnie mało przesuwane.

Jeżeli C jest dodatkowo zbiorem zwartym (jest to bardzo mocne założenie), to punkt stały oczywiście istnieje. $H(x) = \|x - Tx\|$ jest funkcją rzeczywistą ciągłą i jako taka osiąga infimum na zbiorze zwartym – gwarantuje to twierdzenie Weierstrassa. W przeciwnym wypadku może być różnie, na przykład: w przestrzeni c_0, ciągów rzeczywistych zbieżnych do zera z normą $\|\{x_n\}\| = \max\{|x_n| : n = 1, 2, \ldots\}$ określamy zbiór

$$\mathcal{C} = \{\{x_n\} \in c_0 : 0 \leq x_n \leq 1\,, \quad n = 1, 2, \ldots\}$$

i odwzorowanie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ wzorem $T(x_1, x_2, \ldots) = (1, x_1, x_2, \ldots)$. Jest to izometria, która nie ma w zbiorze $\mathcal{C}$ punktu stałego. Ciąg, który byłby punktem stałym tego odwzorowania spełniałby warunek $1 = x_1 = x_2 = \ldots$, natomiast $(1, 1, \ldots) \notin c_0$.

Dopiero w 1965 roku nastąpiła prawdziwa eksplozja wyników. Niezależnie od siebie ukazały się prace F. E. Browdera [2], [3], D. Göhde [5], W. A. Kirka [6], które pokazały, że przy pewnych geometrycznych warunkach nałożonych na przestrzeń i zbiór można zagwarantować istnienie punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających. Spowodowało to zintensyfikowanie badań nad geometryczną strukturą przestrzeni Banacha i doprowadziło do powstania metrycznej teorii punktów stałych (patrz [4]). W ten oto sposób za sprawą jednego twierdzenia odkryte zostały nowe obszary matematyki.

W rozprawie doktorskiej S. Banach wprowadził również pojęcie liniowej przestrzeni unormowanej zupełnej, które to przestrzenie za sprawą M. Frécheta zyskały miano przestrzeni Banacha. Ich znaczenie w matematyce zostało ugruntowane dzięki najważniejszemu dziełu S. Banacha „Théorie des opérations linéaires" oraz wynikom uzyskanych przez grupę jego współpracowników tworzących tzw. lwowską szkołę matematyczną. Byli to H. Steinhaus, S. Mazur, J. Schauder, S. Ulam, M. Kac, W, Orlicz, S. Kaczmarz, H. Auerbach.

Własności wyrażone w określeniu przestrzeni Banacha zapewniają, że jest to ogólny obiekt abstrakcyjny, który obejmuje bogatą klasę przestrzeni, jakie często występują w praktyce matematycznej. Dzięki przestrzeniom Banacha można odejść od badania sytuacji w konkretnych przestrzeniach (co wymaga czasem dużej pomysłowości) na rzecz badania umiejętnie określonych sytuacji ogólniejszych. Niejednokrotnie jest to nie tylko bardziej efektywne, ale również łatwiejsze, gdyż w obrazie badanego obiektu uwypuklone są najistotniejsze jego cechy, zaś różnorodne, mniej istotne szczegóły pozostają w tle. I to jest jedna z idei Banacha.

Gdy się obecnie o tym pisze wygląda to bardzo prosto i naturalnie. Zatem, gdzie tkwi istota tego pomysłu? Oczywiście w umiejętnym odkryciu wspólnych, najważniejszych cech badanych obiektów.

I jeszcze jedno, dzieło S. Banacha ukazało po raz pierwszy skuteczność podejścia geometrycznego i algebraicznego do badania problemów analizy liniowej. Współcześnie metody te nadal są rozwijane i stanowią jeden z ważniejszych sposobów badania problemów analizy nieliniowej, w której jeszcze wiele zagadnień czeka na rozwiązanie.

Studiowanie prac S. Banacha i analizy funkcjonalnej to przyjemność i wspaniała przygoda.

Literatura

1. A. Bielecki, *Une remarque sur la méthode de Banach–Cacciopoli–Tikhonov dans la théorie des équations différentielles ordinaires*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 4 (1956), 261–264.
2. F. E. Browder, *Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 53 (1965), 1272–1276.
3. F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 54 (1965), 1041–1044.
4. K. Goebel, W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge University Press 1990.
5. D. Göhde, *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nachr. 30 (1965), 251–258.
6. W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 1004–1006.
7. R. D. Mauldin (ed.), *The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Cafe*, Birkhäuser, Boston 1981.
8. Z. Pawlikowska–Brożek, *Stefan Banach w świetle wspomnień*, w „Matematyka przełomu XIX i XX wieku" pod redakcją S. Fudalego, Szczecin 1990, str. 101–112.
9. J. Zemánek, *A simple proof of the Weierstrass–Stone theorem*, Comment. Math. 20 (1987), 495–497.