O twierdzeniu Pitagorasa i jego uogólnieniach

Elżbieta BOBIK, Wrocław

Skutecznym i od dawna znanym sposobem opanowania materiału, faktu, czy pojęcia jest przyjrzenie mu się w różnych szerszych kontekstach. Chciałabym zaproponować takie właśnie podejście do twierdzenia Pitagorasa. Zajmie ono więcej czasu niż rutynowa lekcja na ten temat, ale za to da uczniom możliwość posmakowania matematyki takiej, jaką ona jest naprawdę i nauczy ich czegoś więcej niż jednego tylko matematycznego twierdzenia. Proponowany przeze mnie sposób pracy z twierdzeniem Pitagorasa dobrze się też nadaje na tzw. lekcję powtórzeniową. To, w jaki sposób nauczyciel skorzysta z tego artykułu by urozmaicić i ożywić swoje lekcje, będzie już zależało jedynie od jego twórczej pomysłowości.

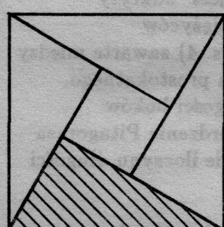
Historia twierdzenia Pitagorasa

Twierdzenie zwane dziś twierdzeniem Pitagorasa znane było już w starożytności, źródła historyczne świadczą o tym, że większość cywilizacji antycznych doszła niezależnie do sformułowań równoważnych przynajmniej niektórym przypadkom szczególnym twierdzenia Pitagorasa, czy też twierdzenia do niego odwrotnego.

Na przykład Egipcjanie od niepamiętnych czasów wiedzieli, że trójkąt o bokach 3, 4, 5 jednostek jest prostokątny i wykorzystali ten fakt do wyznaczania kąta prostego w terenie, za pomocą sznura z dwunastu węzłami w równych odstępach. Ten sam fakt znany był w Chinach (znał go Szang Hao już ok. 1100 r. p.n.e.) i prawdopodobnie też na terenach Syrii i obecnego Meksyku.

Hindusi wyznaczali kąt prosty posługując się innym trójkątem prostokątnym, mianowicie trójkątem o bokach 5, 12 i 13 jednostek. Twierdzenie Pitagorasa pojawia się u nich po raz pierwszy w „Sulwasutrze", księdze pochodzącej z VII–V w. p.n.e., wydaje się jednak, że znane było już o wiele wcześniej.

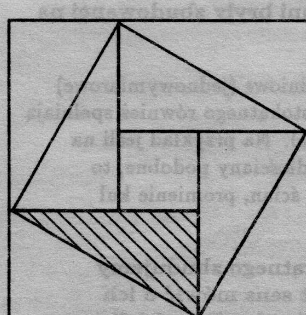
U Babilończyków twierdzenie Pitagorasa znajdujemy już w epoce Hammurabiego (ok. 1800-1600 r. p.n.e.). Ich teksty klinowe z tego okresu zawierają wiele zadań rozwiązywanych z zastosowaniem twierdzenia Pitagorasa. Zachowała się też tabliczka sprzed ponad 1000 r. p.n.e. przedstawiająca tabelę piętnastu trójek liczb całkowitych, będących bokami trójkątów prostokątnych (tzw. trójki pitagorejskie).



Rys. 1

W starożytnej Grecji odkrycie i dowód twierdzenia Pitagorasa przypisuje się Pitagorasowi (VI w. p.n.e.), chociaż nie jest wykluczone, że były one dziełem któregoś z jego uczniów, gdyż mieli oni zwyczaj wszystkie swe osiągnięcia przypisywać swojemu mistrzowi.

Najstarszy dokument zawierający twierdzenie Pitagorasa wraz z dowodem to „Elementy" Euklidesa, pochodzące z IV w. p.n.e. Euklides podaje dwa powszechnie dziś znane dowody, jeden za pomocą konstrukcji figur pomocniczych, drugi korzystający z teorii proporcji. W „Elementach" znajduje się też dowód twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.



Rys. 2

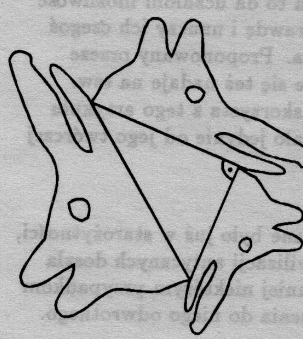
Hindusi znali dowód twierdzenia Pitagorasa oparty na zasadach zupełnie różnych od tych, które znajdujemy u Euklidesa. Najstarszy znany zapis tego dowodu pochodzi z „Korony wiedzy" Bhaskary (XII w.), choć przypuszcza się, że znany on był już wiele wieków wcześniej. Cały dowód składał się z rysunku (rys. 1) i napisu „patrz". Łatwo zauważyć, że pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej równe jest czterokrotnie wziętemu polu danego trójkąta prostokątnego dodanemu do pola kwadratu zbudowanego na różnicy dwóch przyprostokątnych. Stąd po obliczeniu pól i przeprowadzeniu redukcji otrzymujemy twierdzenie Pitagorasa.

W Chinach twierdzenie Pitagorasa z dowodem znał Czen-cy, który żył w tym samym czasie co Pitagoras (VI w. p.n.e.). Chiński dowód twierdzenia Pitagorasa, podobny nieco do hinduskiego, opierał się na rysunku (rys. 2), według którego kwadrat zbudowany na sumie przyprostokątnych może być przedstawiony w postaci sumy kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej i czterech trójkątów przystających do danego.

Wszystkie te dowody, o których wspominałam i wiele innych, poczynając od starożytnych, a kończąc na dziewiętnastowiecznych, można znaleźć m.in. w książce Szczepana Jeleńskiego „Śladami Pitagorasa".

Figuralne twierdzenie Pitagorasa

W swojej pierwotnej wersji twierdzenie Pitagorasa mówiło nie o kwadratach długości boków trójkąta ale o polach kwadratów zbudowanych na tych bokach. Dopiero w VII w. zauważono, że twierdzenie to jest prawdziwe nie tylko dla kwadratów, ale również dla dowolnych figur płaskich. Mianowicie, **jeżeli na trzech bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy płaskie figury podobne, to suma pól figur zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu figury zbudowanej na przeciwprostokątnej.**

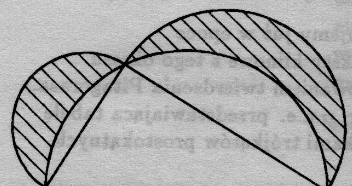


Rys. 3

Słowa „na bokach trójkąta budujemy figury podobne" należy rozumieć w ten sposób, że rozważamy figury podobne, których skala podobieństwa jest równa stosunkowi długości boków, na których są one zbudowane.

Gdy dysponujemy twierdzeniem Pitagorasa, to dowód jego wersji figuralnej jest elementarny i wykorzystuje jedynie fakt, że stosunek pól figur podobnych równy jest kwadratowi skali (rys. 3).

Tak sformułowane twierdzenie Pitagorasa umieszczone było w XVIII w. przez Komisję Edukacji Narodowej w programie nauczania szkolnego, właściwe twierdzenie Pitagorasa omawiane było dopiero po figuralnym, jako jego szczególny przypadek. Figuralne twierdzenie Pitagorasa można jeszcze znaleźć w popularnym w okresie międzywojennym podręczniku Łomnickiego.

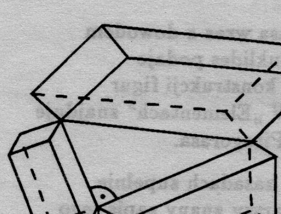


Rys. 4

Ładnym zastosowaniem figuralnego twierdzenia Pitagorasa jest odkryty i rozwiązany (innymi metodami) w starożytności problem księżyców Hipokratesa. Tak nazywają się obszary (zakreskowane na rys. 4) zawarte między półokręgami zbudowanymi na trzech bokach danego trójkąta prostokątnego. Problem polega na wyrażeniu sumy pól księżyców przez długości boków trójkąta. Proste rozumowanie wykorzystujące figuralne twierdzenie Pitagorasa pokazuje, że suma ta jest równa polu trójkąta, a więc połowie iloczynu długości jego przyprostokątnych.

Korzystając z faktu, że stosunek pól figur podobnych, niekoniecznie płaskich, jest równy kwadratowi skali podobieństwa, można otrzymać dalsze rozszerzenie figuralnego twierdzenia Pitagorasa w wersji dla figur dwuwymiarowych, do wersji dla figur trójwymiarowych, a następnie jednowymiarowych (rys. 5).

Jeżeli na trzech bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy bryły podobne, to suma pól powierzchni brył zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu powierzchni bryły zbudowanej na przeciwprostokątnej.



Rys. 5

Łatwo zauważyć, że odpowiadające sobie elementy liniowe (jednowymiarowe) figur czy brył zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego również spełniają twierdzenie Pitagorasa (stanowią trójki pitagorejskie). Na przykład jeśli na bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy prostopadłościany podobne, to twierdzenie Pitagorasa będą spełniały ich przekątne ścian, promienie kul opisanych itd.

Innymi słowy, **jeżeli na bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy jednowymiarowe figury podobne takie, że jest sens mówić o ich długości (na przykład odcinki), to suma kwadratów długości figur zbudowanych na przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości figury zbudowanej na przeciwprostokątnej.**

Metryczne twierdzenie Pitagorasa
W XIX w. twierdzenie Pitagorasa w wersji metrycznej, tzn. mówiące nie o polach kwadratów lecz o kwadratach długości boków, legło u podstaw pojęcia metryki geometrii euklidesowej, a później stało się też prototypem metryk przestrzeni nieeuklidesowych. Do dziś twierdzenie to uogólnione „na n wymiarów" daje podstawę definicji wszelkich przestrzeni metrycznych.

Przypatrzmy się jak wygląda ten związek metrycznego twierdzenia Pitagorasa z pojęciem metryki, czyli odległości, w przestrzeni n-wymiarowej.

Na początku zauważamy, że jeżeli na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych dany jest odcinek c, to twierdzenie Pitagorasa można wówczas sformułować w następujący sposób.

Kwadrat długości odcinka c jest równy sumie kwadratów długości jego rzutów na osie układu współrzędnych

$$c^2 = c_1^2 + c_2^2 .$$

Twierdzenie to daje się rozszerzyć na przypadek, gdy c nie leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez osie x i y. Wystarczy wprowadzić trzecią oś z, by po kilku prostych rachunkach otrzymać trójwymiarową wersję metrycznego twierdzenia Pitagorasa

$$c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 ,$$

gdzie c_k oznacza długość rzutu odcinka c na k-tą oś.

Wydaje się, że tę procedurę można kontynuować i tak jest w istocie. Jeśli ponadto wiemy, że w przestrzeni o n wymiarach odległość od punktu $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ do punktu $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ wynosi

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2} ,$$

to łatwo już stąd wyprowadzić n-wymiarową wersję metrycznego twierdzenia Pitagorasa, która zgodnie z naszymi oczekiwaniami ma postać

$$c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots + c_n^2 .$$

Wzór na długość przekątnej prostopadłościanu n-wymiarowego
W ścisłym związku z metrycznym twierdzeniem Pitagorasa pozostają analogiczne wzory na przekątną prostokąta, prostopadłościanu i ogólnie prostopadłościanu n-wymiarowego (przyjmujemy, że prostokąt jest prostopadłościanem dwuwymiarowym). Wzory te można uważać za alternatywne sformułowanie twierdzenia Pitagorasa.

Figuralne twierdzenie Pitagorasa dla prostopadłościanu n-wymiarowego
Podobnie jak z metrycznego twierdzenia Pitagorasa, również z figuralnego można wyprowadzić analogiczne twierdzenia dotyczące prostopadłościanów n-wymiarowych. Mianowicie **pole figury zbudowanej na przekątnej prostopadłościnu n-wymiarowego jest równe sumie pól figur zbudowanych na jego różnych krawędziach.** Ponadto dla prostopadłościanu trójwymiarowego pole to jest równe połowie sumy pól figur zbudowanych na przekątnych jego ścian.

Mówiąc tutaj figury mamy oczywiście na myśli figury podobne, płaskie, trójwymiarowe lub o większej liczbie wymiarów. Dla figur jednowymiarowych otrzymujemy twierdzenie analogiczne do figuralnego twierdzenia Pitagorasa dla figur jednowymiarowych: **kwadrat długości figury jednowymiarowej zbudowanej na przekątnej prostopadłościanu n-wymiarowego jest równy sumie kwadratów długości figur podobnych zbudowanych na jego n różnych bokach.**

Przestrzenne twierdzenie Pitagorasa
Najdalej idące uogólnienie figuralnego twierdzenia Pitagorasa było dziełem Charlesa Tinseau, który w roku 1780 udowodnił następujące twierdzenie, nazywane przestrzennym twierdzeniem Pitagorasa.

Jeśli w przestrzeni trójwymiarowej wprowadzić prostokątny układ współrzędnych, to między polem figury P, a polami jej rzutów F_1, F_2, F_3 na płaszczyzny wyznaczone przez osie układu zachodzi związek

$$P(F)^2 = P(F_1)^2 + P(F_2)^2 + P(F_3)^2 .$$

Można zauważyć piękną analogię z metrycznym twierdzeniem Pitagorasa w wersji trójwymiarowej, gdzie zamiast pól występują długości.

Przestrzenne twierdzenie Pitagorasa można np. zastosować do dowodu następującego ciekawego faktu, też czasem nazywanego przestrzennym analogiem twierdzeniem Pitagorasa.

W czworościanie $ABCD$, w którym wszystkie kąty przy wierzchołku D są proste, zachodzi zależność między polami ścian

$$P(\triangle ABC)^2 = P(\triangle ABD)^2 + P(\triangle BCD)^2 + P(\triangle CDA)^2 .$$

Mówiąc nieściśle, ale za to bardziej poglądowo, chodzi tu o czworościan, który powstaje przez dowolne odcięcie naroża sześcianu, czy też jednej z ośmiu części trójwymiarowego układu współrzędnych.

Jedynka trygonometryczna

Warto uświadomić sobie, że wzór, zwany potocznie jedynką trygonometryczną:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 ,$$

prawdziwy dla każdej liczby rzeczywistej x, jest uogólnieniem twierdzenia Pitagorasa, wyrażonym w języku funkcji trygonometrycznych:

W trójkącie prostokątnym o kącie ostrym α zachodzi związek:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 .$$

Sferyczne twierdzenie Pitagorasa.

Kolejnym uogólnieniem twierdzenia Pitagorasa jest jego rozszerzenie na wszystkie trójkąty leżące na powierzchni sfery, o ile tylko są one eulerowskie. Warunek, że mają być eulerowskie przyjmuje się po to, by nie dopuścić do rozważań trójkątów o zbyt dziwacznych kształtach. Mianowicie trójkąt eulerowski to taki, który mieści się w jednej półsferze i długość każdego z jego boków jest mniejsza od połowy obwodu koła wielkiego.

Dla wszystkich eulerowskich trójkątów sferycznych, mających dokładnie jeden kąt prosty prawdziwe jest metryczne twierdzenie Pitagorasa, tzn. kwadrat długości przeciwprostokątnej równy jest sumie kwadratów długości przyprostokątnych.

Łatwo można sprawdzić, że dla trójkątów o większej ilości kątów prostych twierdzenie Pitagorasa nie jest prawdziwe. Wystarczy porównać trójkąty wyznaczone przez dwa południki i różne łuki równika.

Twierdzenie cosinusów

Twierdzenia równoważne twierdzeniu cosinusów po raz pierwszy podają Euklides (IV w. p.n.e.) i Heron (I w. n.e.). W obecnym brzmieniu twierdzenie to pochodzi od Lazare Carnota (1753-1823 r.) i dlatego zwane jest też czasem wzorem Carnota.

Twierdzenie to mówi, że **kwadrat długości boku trójkąta równy jest sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków przez cosinus kąta między nimi zawartego, tzn., że w dowolnym trójkącie zachodzi następująca zależność między bokami a, b, c i kątem γ leżącym naprzeciw boku c.**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma .$$

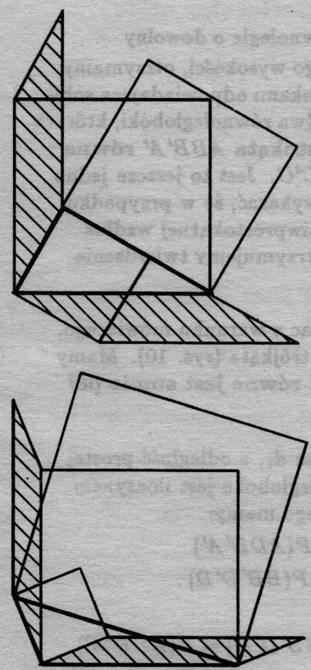
Tym razem mamy do czynienia z rozszerzeniem twierdzenia Pitagorasa na trójkąty dowolne, niekoniecznie prostokątne.

Zależności między bokami trójkąta i jego kątem, występującej w twierdzeniu cosinusów, można również nadać interpretację geometryczną w języku pól powierzchni. Oznaczmy kwadraty zbudowane na bokach a, b, c, trójkąta dowolnego K_a, K_b, K_c odpowiednio. Przyjmijmy jeszcze, że kwadraty K_a i K_b

budujemy nie na zewnątrz trójkąta lecz po stronie jego wnętrza. Mamy wówczas następujące zależności między ich polami

$$P(K_c) = P(K_a) + P(K_b) - 2ab\cos\gamma =$$
$$= P(K_a) + P(K_b) - 2ab\sin(90^\circ - \gamma) =$$
$$= \begin{cases} P(K_a) + P(K_b) - 2P(R) & \text{dla kąta ostrego } \gamma \\ P(K_a) + P(K_b) - 2P(R) & \text{dla kąta rozwartego } \gamma \end{cases}$$

gdzie R jest równoległobokiem o bokach a, b i kącie ostrym $|90^\circ - \gamma|$.



Rys. 6

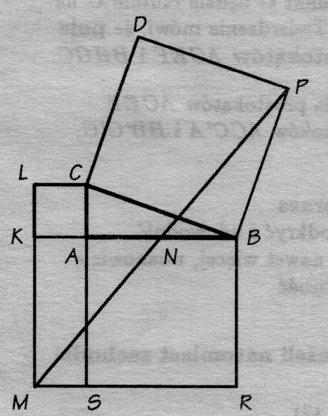
Można więc powiedzieć, że **dla dowolnego trójkąta o bokach a, b, c pole kwadratu zbudowanego na boku c, leżącym maprzeciw kąta γ równe jest sumie pól kwadratów zbudowanych na pozostałych bokach pomniejszonych (dla γ ostrego) lub powiększonych (dla γ rozwartego) o pola równoległoboków zbudowanych z tychże boków a, b złożonych pod kątem $|90^\circ - \gamma|$ (patrz rys. 6).**

Twierdzenie cosinusów można łatwo przeformułować tak, by nie występowała w nim funkcja trygonometryczna. Zamiast niej wprowadzamy pojęcie rzutu. Dostajemy wówczas jeszcze jedną ciekawą wersję uogólnienia twierdzenia Pitagorasa na trójkąty dowolne:

Kwadrat długości boku trójkąta leżącego naprzeciw kąta rozwartego (ostrego) jest równy sumie kwadratów pozostałych boków zwiększonej (zmiejszonej) o podwojony iloczyn długości jednego z boków danych przez długość rzutu drugiego na kierunek pierwszego.

Afiniczne twierdzenie Pitagorasa

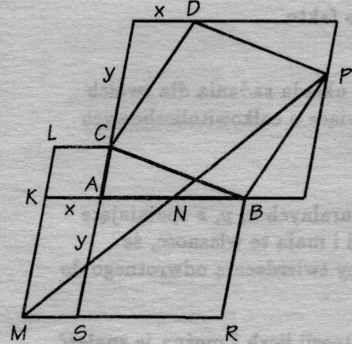
Dla trójkąta prostokątnego prawdziwe jest następujące twierdzenie. Jeżeli z punktu M (rys. 7) położonego na przecięciu przedłużeń boków RS i LK kwadratów skonstruowanych odpowiednio na boku AB i AC trójkąta prostokątnego ABC poprowadzimy prostą tak, że przecina ona bok AB w środku N, to punkt P wybrany na prostej MN tak, że $MN = NP$, jest wierzchołkiem kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej CB tego trójkąta.



Rys. 7

Istotnie, zauważmy, że $\triangle AMN \equiv \triangle BPN$, a zatem $AM = BP$. Ale również $BC = AM$, więc $BC = BP$. Pokazaliśmy, że P jest wierzchołkiem równoległoboku zbudowanego na BC. Aby równoległobok ten był kwadratem, trzeba jeszcze wykazać, że $\sphericalangle CBP = 90^\circ$. Mamy $\sphericalangle MAN = \sphericalangle BPN$, a $\sphericalangle MAN = \sphericalangle MAS + \sphericalangle BAS$ oraz $\sphericalangle PBN = \sphericalangle PBC + \sphericalangle CBA$, a ponieważ $\sphericalangle CBA = \sphericalangle MAS$, więc ostatecznie $\sphericalangle PBC = \sphericalangle BAS = 90^\circ$. Czwarty wierzchołek D kwadratu nietrudno teraz wyznaczyć.

Analogiczną konstrukcję możemy przeprowadzić dla nieprostokątnego trójkąta ABC o bokach a, b, c (rys. 8). Przedłużamy bok AB o dowolny odcinek x poza punkt A, a bok AC o dowolny odcinek y też poza punkt A. Konstruujemy równoległoboki $ASMK$ o bokach x, y, $ACLK$ o bokach b, x, $ABRS$ o bokach a, y. Przez środek N odcinka AB i przez punkt M prowadzimy prostą i wybieramy na niej punkt P tak, by $MN = NP$. Konstruujemy równoległobok $BPDC$ o bokach BP i c. Okazuje się, że **pole równoległoboku $BPDC$ jest równe sumie pól równoległoboków $ACLK$ i $ABRS$.**



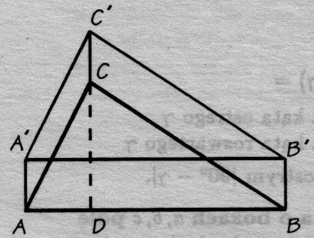
Rys. 8

Jest to jeszcze jedno uogólnienie twierdzenia Pitagorasa na trójkąty dowolne. Można go nazwać wersją afiniczną, gdyż rys. 8 przedstawia afiniczny obraz figury zwanej „spodniami Pitagorasa" (rys. 7), za pomocą której ilustruje się to twierdzenie w wersji pierwotnej.

Dla udowodnienia sformułowanego przed chwilą twierdzenia oznaczamy $\sphericalangle NAS = \alpha$. Wówczas pole równoległoboku $BPDC$ można wyrazić w następujący sposób:

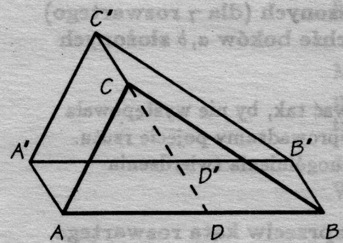
$$P(BPDC) = (b+y)(a+x)\sin(180^\circ - \alpha) - 2\frac{xy}{2}\sin\alpha - 2\frac{ba}{2}\sin(180 - a) =$$
$$= bx\sin\alpha + ay\sin\alpha =$$
$$= P(ACLK) + P(ABRS).$$

Translacyjne twierdzenie Pitagorasa
Jeżeli dowolny trójkąt ABC (rys. 9) przesuniemy równolegle o dowolny wektor $\vec{r}$ w kierunku wyznaczonym przez jedną z jego wysokości, otrzymamy przystający do niego trójkąt $A'B'C'$. Połączmy odcinkami odpowiadające sobie wierzchołki obu trójkątów. Otrzymamy prostokąt i dwa równoległoboki, których pola związane są następującą zależnością: **pole prostokąta $ABB'A'$ równe jest sumie pól równoległoboków $ACC'A'$ i $BB'C'C$.** Jest to jeszcze jedno uogólnienie twierdzenia Pitagorasa, gdyż nietrudno wykazać, że w przypadku trójkąta prostokątnego przesuniętego o długość przeciwprostokątnej wzdłuż wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego otrzymujemy twierdzenie równoważne twierdzeniu Pitagorasa.



Rys. 9

Uogólnienie to można posunąć jeszcze dalej rezygnując z warunku mówiącego, że translacja ma mieć kierunek zgodny z wysokością trójkąta (rys. 10). Mamy wówczas zależność: **pole równoległoboku $ABB'A'$ równe jest sumie pól równoległoboków $ACC'A'$ i $BB'C'C$.**



Rys. 10

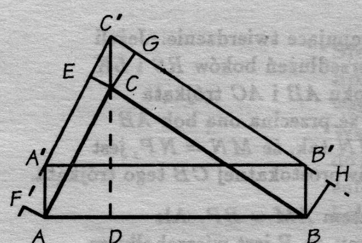
Oznaczmy odległość prostej DC' od prostej AA' przez d_1, a odległość prostej DC' od prostej BB' przez d_2. Ponieważ pole równoległoboku jest iloczynem boku przez wysokość opadającą na ten bok, wobec tego mamy:

$$P(ACC'A') = CC' \cdot d_1 = AA' \cdot d_1 = P(ADD'A')$$
$$P(BB'C'C) = CC' \cdot d_2 = BB' \cdot d_2 = P(BB'D'D).$$

Sumując oba pola otrzymujemy

$$P(ACC'A') + P(BB'C'C) = P(ADD'A') + P(BB'D'D) = P(ABB'A').$$

Z udowodnionego przed chwilą twierdzenia można wyprowadzić jego wersję dla prostokątów. Przypuśćmy, że kierunek wektora translacji jest równoległy do wysokości CD (rys. 11). Niech punkt E będzie rzutem C na prostą $C'A'$ i punkt F rzutem A na prostą $C'A'$. Dalej niech punkt G będzie rzutem C na prostą $C'B'$ i punkt H rzutem B na prostą $C'B'$. Twierdzenie mówi, że **pole prostokąta $ABB'A'$ równe jest sumie pól prostokątów $ACEF$ i $BHGC$.**



Rys. 11

Dowód jest oczywisty. Wystarczy zauważyć, że pola prostokątów $ACEF$ i $BHGC$ są równe odpowiednio polom równoległoboków $ACC'A$ i $BB'C'C$, a następnie zastosować twierdzenie poprzednie.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa
Dysponując twierdzeniem cosinusów bardzo łatwo odkryć i udowodnić twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa, a nawet więcej, mianowicie **jeżeli długości boków trójkąta spełniają zależność**

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

to kąt leżący naprzeciw boku c jest prosty. Jeżeli natomiast zachodzi nierówność

$$c^2 < a^2 + b^2 \quad (c^2 > a^2 + b^2),$$

to kąt ten jest ostry (rozwarty).

Można też znaleźć inne elementarne dowody tego faktu.

Trójki pitagorejskie
Dla nauczyciela matematyki, zwłaszcza gdy sam układa zadania dla swoich uczniów pożytecznym może być twierdzenie mówiące o całkowitoliczbowych rozwiązaniach równania

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

zwanego równaniem Pitagorasa. Trójki liczb naturalnych x, y, z spełniające to równanie nazywają się trójkami pitagorejskimi i mają tę własność, że trójkąty o bokach x, y, z są prostokątne (na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa).

Twierdzenie, o którym mowa, jest twierdzeniem teorii liczb i można je znaleźć wraz z dowodem np. w książce W. Sierpińskiego „Wstęp do teorii liczb".

A oto treść twierdzenia:

Wszystkie rozwiązania równania Pitagorasa nie mające wspólnego dzielnika większego od 1, w których y jest liczbą parzystą otrzymujemy zę wzorów

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

biorąc jako m, n wszystkie układy liczb naturalnych względnie pierwszych, z których jedna jest parzysta oraz $m > n$. Ponadto każde rozwiązanie otrzymujemy w taki sposób tylko jeden raz.

A oto lista dziesięciu takich trójek pitagorejskich, obliczonych za pomocą powyższego twierdzenia.

x	3	5	15	7	21	9	35	11	45	33
y	4	12	8	24	20	40	12	60	28	56
z	5	13	17	25	29	41	37	61	53	69

Zauważmy, że w kilku przypadkach w komplecie liczb x, y, z występują dwie sąsiednie liczby naturalne. Nasuwa się pytanie, czy dużo jest trójkątów pitagorejskich, których boki mają tę własność. Okazuje się, że dużo.

Już Pitagoras wiedział, że dla dowolnego naturalnego n liczby

$$x = 2n + 1, \quad y = 2n^2 + 2n, \quad z = 2n^2 + 2n + 1$$

stanowią trójki pitagorejskie, przy czym, jak widać, liczby y i z różnią się dokładnie o jeden. Jest to bardzo proste do sprawdzenia. Skoro $z = y + 1$, to z $x^2 + y^2 = (y+1)^2$ otrzymujemy $x^2 = 2y + 1$. Liczba x jest więc nieparzysta, czyli postaci $2n + 1$. Obliczenie y z otrzymanego równania kończy sprawdzenie. Jak widać trójek pitagorejskich zawierających dwie sąsiednie liczby naturalne jest przynajmniej tyle co liczb naturalnych. Żeby się przekonać, że nie jest ich więcej wystarczy zauważyć, że wszystkich trójek liczb naturalnych jest dokładnie tyle samo co liczb naturalnych.

Trójkąty prostokątne o bokach naturalnych mają wiele innych ciekawych własności, o których nie było mowy w tym artykule. Zainteresowanym polecam książkę W. Sierpińskiego „Trójkąty pitagorejskie".

Literatura

[1] „Czy umiecie się dziwić", opracowane przez redakcję Małej Delty, Ossolineum 1978.

[2] „Encyklopedia szkolna – matematyka", Warszawa 1988.

[3] „Historia matematyki", 3 tomy, pod red. A. P. Juszkiewicza, W-wa 1975–77.

[4] Sz. Jeleński, „Śladami Pitagorasa", Warszawa 1974.

[5] W. Sierpiński, „Trójkąty pitagorejskie", Warszawa 1954.

[6] W. Sierpiński, „Wstęp do teorii liczb", Warszawa 1965.

[7] K. Skurzyński, „Pitagorejskie dytyramby", w czasopiśmie Gradient – kufer matematyków, nr 1, marzec 1992.