Nauczyciel, reforma nauczania matematyki i mikrokomputer

Marek LEGUTKO, Kraków

1. Kalkulatory a reforma nauczania matematyki

Przed dwudziestu laty W.W.Sawyer napisał: „Byłoby bardzo pożądane przewidzieć w sposób naukowy zmiany w nauczaniu, jakie spowoduje wzrost automatyzacji. Automatyzacja umożliwia zastąpienie przez maszynę każdej czynności człowieka, fizycznej czy umysłowej, którą da się sprowadzić do pewnej ustalonej reguły. Większość współczesnych czynności ludzkich da się sprowadzić do tego rodzaju reguł, a znaczna część nauczania polega na przekazywaniu odpowiednich reguł postępowania. Takie nauczanie staje się oczywiście przestarzałe. Automatyzacja przyczyni się do tego, że działalność ludzka skupi się na czynnościach, które wymagają specyficznych cech człowieka – oryginalności, intuicji, inicjatywy, rozumienia." [13]. W szczególności byłoby pożądane przewidzieć zmiany w nauczaniu matematyki, jakie spowoduje powszechna dostępność technicznych narzędzi rachunku (przede wszystkim kalkulatorów). „Podobnie jak wprowadzenie maszyny do pisania spowodowało, że nowe pokolenie nie umie i nie musi umieć pisać kaligraficznie, tak wynalazek elektronicznych kalkulatorów spowoduje w przyszłości spadek znaczenia umiejętności tradycyjnego rachowania na liczbach wielocyfrowych." [11]

Założenie, że w ciągu kilku lat tanie kalkulatory będą w Polsce ogólnie dostępne było jedną z ważniejszych przesłanek zmian w programie nauczania matematyki, jakich dokonano w związku z reformą oświaty w latach siedemdziesiątych. Zmiany w zakresie nauki rachunku były chyba najgłębsze. Okres wprowadzania w szkole podstawowych algorytmów działań na liczbach skrócono o dwa lata (pierwotnie nawet o trzy!) – obecnie obejmuje on klasy I - VI (w programie z 1963 roku – klasy I - VIII). Nauka rachunku uległa skróceniu także w związku ze zmiejszeniem liczby godzin matematyki w planie szkolnym (w klasach I - VIII o 17 godzin). Przy czym w komentarzu do programu przypomina się, że „Umiejętności posługiwania się algorytmami wykonywania działań sposobem pisemnym doprowadzamy do biegłości." [10] W podręcznikach szkolnych, napisanych do nowego programu matematyki, kształcenie sprawności rachunkowej zeszło na dalszy plan. Wyeliminowano zresztą zadania prowadzące do bardziej złożonych rachunków. Teraz bardziej akcentuje się kształcenie pojęć m.in. przez szersze wykorzystywanie interpretacji geometrycznej (np. oś liczbowa już od klasy I), wcześniejsze stosowanie symboliki literowej, stosowanie grafów (np. przy wprowadzaniu dzielenia ułamków w podręczniku dla klasy V).

Kształcenie umiejętności posługiwania się „Urządzeniami do obliczeń" jest wymagane dopiero w szkole średniej (w każdej klasie), poza tym w programie klasy pierwszej przewiduje się naukę o algorytmach, przybliżeniach, stosowaniu kalkulatorów [8]. Pierwotnie przewidywano też obowiązkową naukę wykonywania obliczeń przy zastosowaniu kalkulatorów w klasie V szkoły podstawowej [9]. Niestety – wobec kłopotów związanych z brakiem dostatecznej liczby kalkulatorów, z niedostatecznym „rozpracowaniem" metodycznym tej tematyki – przy pierwszej korekcie programu uzdrowiono sytuację przez usunięcie odpowiedniego hasła z programu szkoły podstawowej. (Pozostawiono zalecenie stosowania kalkulatorów w uwagach o realizacji programu.) W celach nauczania nadal jednak zakłada się, że „w rezultacie uczenia się matematyki w szkole podstawowej każdy uczeń osiągnie co najmniej ... umiejętność posługiwania się najbardziej rozpowszechnionymi narzędziami rachunku ...)." [10]. W podręcznikach matematyki napisanych do tego programu można znaleźć różne teksty i zadania dotyczące mniej lub bardziej bezpośrednio kalkulatorów i minikomputerów. (W podręcznikach W.Zawadowskiego są nawet teksty krótkich programów komputerowych [14]).

Zmiana podejścia do nauki rachunku wiąże się oczywiście nie tylko ze zmianami układu treści oraz czasu przeznaczonego na ich realizację. Dawniej wszechwładnie królował liniowy tok nauczania, w którym dopiero po wyuczeniu jednej partii materiału programowego można było przejść do opracowywania następnej. Nowy program, nowe podręczniki wprowadzają dodatkowo spiralny tok nauczania. Niektóre treści mają być wprowadzone jedynie propedeutycznie, bez wyuczania; powróci się do nich później, na wyższym poziomie. Nauczyciele przyzwyczajeni do przekazywania wiedzy przez jej wyuczanie usiłują w ten sposób przekazać obszerniejszy materiał przygotowany z myślą o spiralnym toku nauczania. Wiąże się to z powszechnie odczuwanym przeciążeniem programu.

Nowy program matematyki dość radykalnie zmienił podejście do nauki rachunku. U podstaw tej zmiany tkwiło założenie, że uczniowie będą się posługiwać kalkulatorami i innymi narzędziami rachunku. W powszechnej praktyce szkolnej nie udało się niestety zrealizować tego założenia. Dobre przygotowanie uczniów w zakresie rachunku pozostaje nadal jednym z celów powszechnego wykształcenia. Jakie przygotowanie można osiągnąć – przy tak dużym skróceniu czasu nauki rachunku, przy dosyć dużej zmianie stylu nauczania, przy praktycznej rezygnacji z uczenia posługiwania się technicznymi narzędziami rachunku? Wraz z wielką rzeszą nauczycieli matematyki oczekuję pilnej odpowiedzi na te ważne pytania.

2. Mikrokomputer, do tablicy!

Po prawdziwym „trzęsieniu ziemi", jakie spowodowała wizja zalewu szkoły przez tanie kalkulatory, po niepowodzeniu, jakim zakończyła się próba wprowadzenia kalkulatorów do masowego nauczania matematyki, mówi się coraz głośniej o konieczności wprowadzenia do tego nauczanmia mikrokomputerów. Dla wielu nauczycieli jest to przejaw kolejnej mody lansowanej przez tych, którzy chcą płaszczykiem nowoczesności przykryć stare bolączki szkoły. Nie po raz pierwszy zresztą.

Były w szkole GRAFOSKOPY,
była kiedyś TESTÓW era,
teraz znowu przyszła moda
na użycie KOMPUTERA!

Na razie nie ma w szkole komputerów, nie ma więc problemów z ich wykorzystaniem na lekcjach matematyki. W najbliższej przyszłości mikrokomputery mają jednak trafić do wszystkich szkół średnich w związku z wprowadzeniem do programu tych szkół nowego przedmiotu o nazwie Elementy Informatyki. Realna staje się tym samym obawa nauczycieli, że zostaną rzuceni na głęboką wodę „skomputeryzowanej" matematyki.

Wizja „mikrokomputera przy tablicy" wiąże się z nadziejami nauczycieli na uzdrowienie nauczania matematyki. Na razie jednak przeważają obawy. Jakim „uczniem" powinien być mikrokomputer, jakim będzie?

– Czy ma być prymusem, który zna odpowiedzi na wszystkie pytania, który szybko i efektywnie przekazuje swoją wiedzę i który mógłby któregoś dnia zastąpić nauczyciela?

– Czy ma być dyskutantem, który stawia wciąż nowe pytania (nauczyciel może nie znać odpowiedzi nas niektóre z nich), który oczekuje na pytania i sam, z własnej woli, żadnej wiedzy nie przekaże?

– Czy ma być dyletantem, który sam nic nie wie – wszystko mu trzeba podać, wciąż go trzeba programować?,

Nasuwają się dalsze pytania. Jaki jest wzajemny stosunek matematyki „szkolnej" i „wpisanej w komputer"? Czy włączenie mikrokomputerów do nauczania matematyki nie spowoduje nowego „trzęsienia ziemi" w szkolnym krajobrazie matematycznym? Czy można efektywnie wykorzystywać mikrokomputer w tradycyjnym nauczaniu matematyki? Na podjęcie decyzji o wprowadzaniu mikrokomputerów na lekcje matematyki w masowym nauczaniu jest stanowczo za wcześnie. Najbliższe lata winny być okresem zbierania i analizowania doświadczeń nauczycieli, którzy próbują z własnej woli włączyć komputer do nauczania matematyki.

3. Cele stosowania komputera na lekcjach matematyki

Nauczanie matematyki w masowym wydaniu podlega nieustannej ostrej krytyce. W szkołach średnich dominuje styl wykładowy, który wiąże się często z werbalizmem. Pojęcia matematyczne, ogólne twierdzenia dotyczące tych pojęć, podaje się w oderwaniu od szerokiej bazy konkretnych przykładów, często podaje się je po prostu na „wiarę". Zbyt szybkie uogólnianie, podawanie zbyt wielu reguł postępowania bez szansy na ich zrozumienie prowadzi do kalekiej wiedzy, do zdegenerowanego formalizmu. Wiedza uczniów nie ma zaplecza intuicji. Uczniowe nie mają wyobraźni przestrzennej... Najcenniejsze są te zastosowania komputera, które służyć będą wyeliminowaniu niedostatków nauczania matematyki.

Przy stosowaniu mikrokomputerów na lekcjach matematyki należy dążyć do:
- **zwiększenia roli bezpośredniego przekazu wiedzy** i do ograniczenia werbalizmu (komputer powinien stwarzać szanse na samodzielne odkrywanie wiedzy przez uczniów);
- **poszerzenia bazy, na której opiera się wiedza ucznia i do zwiększenia doświadczenia w stosowaniu tej wiedzy** (komputer wykorzystywany jako „przyrząd pomiarowy" – dzięki niemal natychmiastowemu dostępowi do wyników założonych obliczeń można eksperymentować rozważając różne dane wejściowe);
- **pogłębienia wiedzy ucznia, do jej „ukonkretnienia"** (komputer winien umożliwić dotarcie do „matematyki szczegółów" i tym samym głębsze poznanie wybranych faktów).
- **rozwijania intuicji i rozumienia wiedzy matematycznej przez jej wizualizację** (przede wszystkim przez właściwe stosowanie grafiki komputerowej).
- **rozwijania zainteresowania uczniów matematyką i do zwiększania ich inicjatywy w procesie nauczania matematyki** (komputer zwiększa zaangażowanie emocjonalne uczniów podejmując – dzięki odpowiedniemu oprogramowaniu – dialog z nimi, komputer winien służyć popularyzacji matematyki, propagowaniu jej piękna – głównie chyba przez grafikę – np. fraktale).

Powyższe cele mogą stanowić punkt wyjścia do tworzenia i analizowania dydaktycznych programów komputerowych, szczególnie cenne będą programy, w których komputer jest pośrednikiem między uczniami a określoną sytuacją problemową. Programy tego typu – tkwiące w „matematyce szczegółów" – mogą być wykorzystywane jako „generatory hipotez", z pomocą których uczniowie eksperymentując samodzielnie odkrywają twierdzenia i wstępnie je weryfikują. Można też z pomocą takich programów „sprawdzać" znane ogólnie reguły, pogłebiając ich rozumienie. Sposób wykorzystania danego programu dydaktycznego zależy w dużej mierze od rozumienia przez nauczycieli funkcji komputera w nauczaniu matematyki.

4. Funkcje komputera w nauczaniu matematyki

Chyba najczęściej mówi się o tym, że mikrokomputer jest po prostu jeszcze jednym środkiem nauczania, takim jak grafoskop. Ekran monitora współpracującego z mikrokomputerem służy doskonale jako środek upoglądowienia przy wprowadzaniu naukowych pojęć, twierdzeń. Używa się terminu „elektroniczna tablica", podkreślając takie walory tego środka jak wizualność, dynamika, precyzja, kolor, efekty dźwiękowe. Przy próbach stosowania komputera w tradycyjnym nauczaniu „elektroniczna tablica" spełnia w zasadzie tylko funkcję ilustracji do wywodu nauczyciela. Jeśli nawet – dzięki animacji – wyświetla się na tej tablicy „film komputerowy" to rola uczniów ogranicza się na ogół do biernego odbioru. Przez wprowadzenie interakcji i umożliwienie zmiany wyjściowych danych (w tym tempa realizacji programu) umożliwiamy aktywny udział uczniów w „reżyserowaniu" takiego filmu. Przykładem takiego ulepszonego filmu komputerowego może być program dydaktyczny „Algorytm Euklidesa” [1] ukazujący geometryczną interpretację poszukiwania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb metodą naprzemiennego odejmowania.

Mikrokomputer może też być wykorzystywany w czasie pracy nad przyswojeniem i utrwaleniem wprowadzonego wcześniej materiału jako „elektroniczny zbiór zadań” i jako „elektroniczny egzaminator”. Najczęściej chodzi tu o trening prostych początkowych umiejętności (np. dodawanie i odejmowanie liczb naturalnych w programie „Vaders” [6] w ten sposób ciężar niewdzięcznego, pracochłonnego i nudnego etapu kształcenia ma być przeniesiony na maszynę. Programy „trenujące” i „kontrolujące” przeważają w ofercie firm sprzedających oprogramowanie dydaktyczne – może to świadczyć o dużym zapotrzebowaniu na takie programy. Jeśli zajęcia odbywają się w małych grupkach i każdy uczeń ma swobodny dostęp do mikrokomputera, to można stosować nauczanie programowane – mikrokomputer pełni funkcję „elektronicznego nauczyciela”, który daje zadania a następnie kontroluje i ocenia działania ucznia rozwiązującego te zadania.

W wymienionych dotąd funkcjach mikrokomputer niewątpliwie wspomaga nauczyciela. Nauczyciel może jednak doskonale obejść się bez takiej pomocy. Stosowanie komputera do demonstracji, które taniej i lepiej można zrobić bez niego (np. przedstawianie na ekranie monitora kolejnych stron podręcznika, rysowanie wykresu funkcji liniowej), do rozwiązywania standardowych prostych zadań (np. zadania prowadzące do równań liniowych) jest przejawem „komputeromanii”, może zdyskredytować komputer w oczach uczniów i jest po prostu dydaktycznie szkodliwe. Są jednak takie funkcje komputera w nauczaniu matematyki, w których trudno go czymś innym zastąpić.

Mikrokomputer może być potężnym narzędziem służącym do symulowania i modelowania rozmaitych zjawisk, może być w ten sposób pośrednikiem między uczniem i badanym przez niego zjawiskiem. Bardzo kształcące jest synchroniczne demonstrowanie zjawiska i jego komputerowej symulacji (np. rzut kredą w podręczniku dla klasy VI [14], program dydaktyczny „Zdarzenia losowe” [4]). Komputerowej symulacji towarzyszy na ogół prezentacja różnego rodzaju charakterystyk (np. wykresów) ułatwiających analizę modelowanego zjawiska. Komputerowe modele nie powinny wyeliminować z praktyki szkolnej realnie wykonywanych doświadczeń i eksperymentów. Ta uwaga dotyczy przede wszystkim rachunku prawdopodobieństwa i stereometrii. Bardzo kształcące są lekcje poświęcone tworzeniu modeli przez samych uczniów (np. gra komputerowa „Mniej, więcej”, program „Ułamki okresowe” [2]). Uczniowie pracując w grupach sami narzucają sobie konieczność dokładnej analizy modelowanego problemu: „trzeba dokładnie wyjaśnić komputerowi o co chodzi, on sam niczego się nie domyśli”. W ten sposób uczniowie stają się instruktorami dla komputera wydającymi mu polecenia: „najpierw zrób to, potem tamto ...”. Mikrokomputer umożliwia natychmiastową kontrolę efektów wspólnej pracy (przez próbę uruchomienia programu).

Jeszcze o jednej funkcji mikrokomputera w nauczaniu matematyki warto wspomnieć. Mikrokomputer może być „współtwórcą” wiedzy przekazywanej uczniom, prezentując wyniki złożonych obliczeń lub skomplikowaną grafikę przez siebie wytworzoną (np. wykresy funkcji dwóch zmiennych).

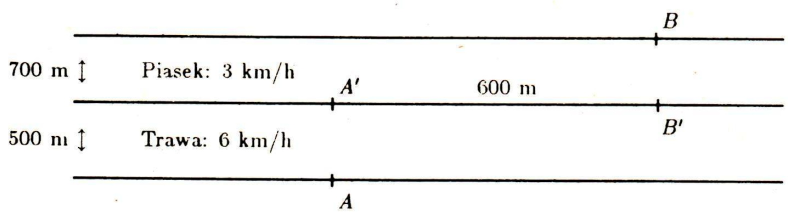
5. Niech nam pomoże komputer

To zawołanie streszcza ogólną zasadę dydaktyczną: **Komputer powinien być stosowany tam, gdzie jest rzeczywiście użyteczny.** Gdzie bez niego nie można w warunkach szkolnych efektywnie rozwiązać postawionego zadania, albo gdzie jego zastosowanie otwiera nowe możliwości przed nauczaniem matematyki.

5.1 Przykłady zadań z podręcznika szkolnego

Jak dotąd, w praktyce szkolnej nie było zadań, których nie można by rozwiązać bez pomocy komputera lub kalkulatora. W nowych podręcznikach matematyki pojawiły się zadania, w których zaleca się wykorzystanie kalkulatora lub mikrokomputera. Oto przykłady dwóch takich zadań z projektu podręcznika matematyki dla klasy pierwszej szkoły średniej [5].

Z 1. Z punktu A trzeba dojść do punktu B. Między tymi punktami jest pas trawy i pas piasku. Po trawie maszeruje się szybciej niż po piasku. Najkrótsza droga od A do B to ta droga, której przejście trwa najkrócej. Znajdź najkrótszą drogę z A do B uwzględniając dane przedstawione na rysunku 1; w rachunkach posłuż się kalkulatorem lub mikrokomputerem.



Rys. 1

Wskazówka. Dlaczego najkrótsza trasa musi przecinać $\overline{A'B'}$? Rozważ trasy przecinające ten odcinek. Dla wybranych punktów odcinka $\overline{A'B'}$ porównaj czasy przejścia odpowiadających mu tras.

Z 2. a) Wykaż, że wyrażenia $v_2 - v_5$ są równe wyrażeniu v_1.

$$v_1 = \alpha\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3 \qquad v_2 = \alpha(\sqrt{2}-1)^6 \qquad v_3 = \alpha(3-2\sqrt{2})^3$$

$$v_4 = \alpha(5\sqrt{2}-7)^2 \qquad v_5 = \alpha(99-70\sqrt{2}).$$

Które z nich jest według ciebie w „najprostrzej" postaci? b) Wykorzystaj kalkulator lub mikrokomputer dla obliczania przybliżonych wartości wyrażeń $v_1 - v_5$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku, podstawiając w miejsce α liczbę 4188,791 i biorąc kolejne przybliżenia $\sqrt{2}$; przerysuj i wypełnij poniższą tabelę.

$\sqrt{2}$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
1,4	19,39				4188,79
1,41					
1,414					
1,4142					
1,41421					

Wyjaśnij ogólnie, dlaczego dla tego samego przybliżenia $\sqrt{2}$ otrzymałeś różne przybliżenia wyrażeń równych wyrażeniu v_1. Które z wyrażeń $v_2 - v_5$ daje najdokładniejsze przybliżenia v_1?

c) Przyjmując, że $\sqrt{2} \approx 1,4 \pm 0,05$ oblicz przybliżenia wyrażeń v_1, v_5. Określ dokładność tych przybliżeń, określ też dokładność względną tych przybliżeń. Spróbuj wyjaśnić, dlaczego przybliżenia v_1 i v_5 tak bardzo się różnią.

Na lekcjach z mikrokomputerem mamy często nową jakościowo sytuację. Nie jest już problemem otrzymanie wyników rachunków – dotąd trudno było uniknąć licznych, często wręcz kompromitujących, błędów rachunkowych. Pojawia się teraz problem co z tymi wynikami zrobić. Jak je zestawić, porównać? Jak odczytać informacje w nich zawarte?

5.2 Ułamki okresowe

Uczniowie nie mieli w szkole podstawowej okazji do badania ułamków okresowych. Łatwo więc można „zagiąć" ich przy tym temacie. Proszę, na przykład, zaproponować im grę w szukanie najdłuższego okresu dla ułamków o danym mianowniku. Po otrzymaniu sześciocyfrowego okresu dla ułamka o mianowniku 7, wielu uczniów chce kontynuować grę ... w projekcie nowego podręcznika matematyki dla klasy pierwszej liceum są zadania przygotowujące uczniów do wykorzystania komputera przy realizacji tego tematu [5]:

Z 3. Przy znajdowaniu cyfr po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym ułamka o liczniku l i mianowniku m stosujemy poniższy algorytm:

1. oblicz r – resztę z dzielenia l przez m,
   jeśli $r = 0$, to zatrzymaj się;
   (ułamek ma rozwinięcie skończone)
   jeśli $r \neq 0$, to
2. podstaw w miejsce l liczbę $10r$,
3. oblicz i – część całkowitą ilorazu l przez m,
4. wypisz i;
   jeśli szukasz dalszych cyfr, to wróć do 1.
   jeśli nie, to
5. zatrzymaj się.

a) Wypróbuj ten algorytm szukając 10 cyfr po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{1}{13}$.

! b) Zmodyfikuj ten algorytm tak, by z jego pomocą można było znajdować okres rozwinięć dziesiętnych ułamków o mianowniku 7.

Zrób zestawienie:

ułamek	okres
1/7	142857
2/7	
...	

Co ciekawego zauważyłeś?
Zrób podobne zestawienie dla ułamków o mianownikach 17, 16, 13, 11, 9. Czy twoje spostrzeżenia dotyczące ułamków o mianowniku 7 i tu potwierdzają się?

Opiszę krótko przebieg lekcji w klasie pierwszej liceum, na której pracowano z programem „Ułamki okresowe" [2] wypisującym rozwinięcia dziesiętne i zaznaczającym okresy podanych ułamków.

Etap 1 (krótki): przedstawienie rozwinięć i okresów różnych ułamków wybranych przez samych uczniów. Było to swoiste testowanie programu. Można było zauważyć, że niektórzy uczniowie testowali w ten sposób swoje odczucie, że „im bardziej skomplikowany ułamek (z dużym licznikiem i mianownikiem), tym dłuższy okres" – byli widocznie zawiedzeni, gdy „skomplikowany" ułamek miał krótki okres. (Np. ułamek $\frac{1234}{3456}$ ma okres trzycyfrowy 185.)

Etap 2 (dość długi): badanie rozwinięć i okresów dla ułamków o danym mianowniku, gdy zmieniano licznik. Oto przykładowe zestawienie dla ułamków o mianowniku 7:

licznik	rozwinięcie	okres
1	0,142857142857142857142857...	142857
2	0,285714285714285714285714...	285714
3	0,428571428571428571342871...	428571
4	0,571428571428571428571428...	571428
5	0,714285714285714285714285...	714285
6	0,857142857142857142857142...	857142
7	1,000000000000000000000000...	0
8	1,142857142857142857142857...	142857

Po obejrzeniu pierwszych dwóch okresów: 142857, 285714 uczniowie od razu zauważyli, że występują te same cyfry, w tej samej kolejności tylko „przesunięte". Od razu też „domyślili się", że następny będzie okres 571428.

Po sprawdzeniu nastąpiła konsternacja. Odkrycie reguły, według której następują przesunięcia cyfr nie było łatwe... Niektórzy uczniowie zauważyli też, że po rozdzieleniu okresów na pół i po dodaniu otrzymamy 999. Na przykład $142 + 857 = 999$. Po przeanalizowaniu tego przykładu badano ułamki o mianownikach: 13, 23, 24, 25, 26. Niektóre spostrzeżenia uczniów „utrzymały" się (np. długość okresu jest mniejsza od mianownika), niektóre „upadły" (np. długość okresu jest o 1 mniejsza od mianownika). Uczniowie skrzętnie zapisali sobie 22-cyfrowy okres ułamka $\frac{1}{26}$: 0434782608695652173913 zauważając, że można z niego „odtworzyć" okresy wszystkich ułamków o mianowniku 23.

Etap 3 (już dość krótki): formułowanie hipotez zbierających odkrycia uczniów i ustalenie kierunków dalszych badań.

Uczniowie bardzo aktywnie uczestniczyli w tej lekcji. Wiele się nauczyli (tak przynajmniej oświadczali). Niestety tylko niewielu uczniów chciało podjąć trud szukania dowodu swoich spostrzeżeń. Jeden z nich zainteresował się obliczaniem długości okresu, gdy podany jest mianownik nieskracalnego ułamka. Efektem lektury odpowiedniego fragmentu książki [12] był krótki program komputerowy wyliczający długość okresu.

Dobrze ułożony program komputerowy może pomóc zarówno w odkryciu twierdzenia jak i w znalezieniu dowodu tego twierdzenia. Przygotowanie takiego programu jest już dużo trudniejsze. Do grupy takich programów należy niewątpliwie program „Ułamki" [7] stawiający m.in. problem „Jak zbadać ułamek (nie wykonując dzielenia), by wiedzieć:
(a) czy w jego rozwinięciu dziesiętnym występuje niezerowy okres?
(b) ile jest cyfr między przecinkiem a pierwszą cyfrą okresu?"

5.3 Wykresy funkcji

Wykresy funkcji są tematem wielu dydaktycznych programów komputerowych. Warto od razu zwrócić uwagę na związany z komputerowymi wykresami zwrot o 180° w nauce o funkcjach. Do tej pory możliwość rysowania wykresów bardziej złożonych funkcji elementarnych pojawiała się na końcu szkolnej edukacji (po rachunku różniczkowym). Teraz – dzięki mikrokomputerom – można obejrzeć wykresy takich funkcji od razu. Mikrokomputer przedstawia oczywiście wykres zacieśnienia danej funkcji do pewnego zbioru skończonego, którego wielkość związana jest z rozdzielnością obrazu dla tego komputera (w ZX Spectrum max. 256 elementów). Komputerowy wykres funkcji może być obiektem badań. „Przesuwając koralik po nitce" otrzymujemy współrzędne kolejnych" punktów („koralików") wykresu („nitki"). Analizując zmiany przyrostu funkcji przy stałym (praktycznie bardzo małym) przyroście argumentu możemy badać monotoniczność funkcji, jej ekstrema, punkty przegięcia, możemy też w elementarny sposób, bez rachunku różniczkowego, badać wypukłość wykresu funkcji.

Program „Wykresy funkcji" [3] może być wykorzystywany do analizowania rozwiązań niebanalnych nierówności, na przykład: $\sin(3x) < 3\sin x$. Na ekranie monitora ukażą się wykresy funkcji $f(x) = \sin(3x)$ i $g(x) = 3\sin x$ (okazja do zapytania uczniów o własności tych funkcji, o sposób otrzymywania ich wykresów z wykresu funkcji $x \to \sin x$), uczniowie mają odczytać z ekranu rozwiązanie danej nierówności (nie jest to łatwe dla uczniów). Jest też możliwość uzyskania na ekranie wykresu funkcji $h(x) = g(x) - f(x)$ i odczytania rozwiązania danej nierówności z przebiegu wykresu funkcji h. Otrzymanie wykresu tej funkcji bez pomocy mikrokomputera byłoby bardzo trudne. Uzyskany obraz sugeruje, że funkcja h jest okresowa – jest to okazja do postawienia ogólnego pytania czy różnica funkcji okresowych jest funkcją okresową.

6. Czy czeka nas trzęsienie ziemi w szkolnej matematyce

Przedstawione wyżej przykłady stosowania komputera w nauczaniu matematyki ukazują duże zmiany jakie w to nauczanie może wnosić komputer.

Czy wprowadzenie mikrokomputerów do szkoły winno być poprzedzone reformą treści nauczania? Czy można np. kosztem innych tematów bardziej rozwinąć szkolne ujęcie ułamków okresowych? Czy w programie szkolnym powinny się znaleźć metody statystyczne, zagadnienia optymalizacji ...? Trudno na te pytania odpowiedzieć bez głębszego rozeznania, bez podjęcia odpowiednich badań. Ewentualne zmiany nie powinny być, według mnie, radykalne, ich wprowadzenie należy starannie przygotować – nie powinno być większego „trzęsienia ziemi" w zakresie treści nauczania.

Stosowanie komputerów w nauczaniu wiąże się natomiast z dużymi zmianami w zakresie metodyki nauczania matematyki. Obok kształcenia umiejętności rozwiązywania gotowych zadań winniśmy np. rozwijać umiejętności formułowania zadań, racjonalizacji rozwiązania, orientowania się w stale rosnącej lawinie informacji. Nadal zmiejszać się będzie znaczenie rutynowej pracy niezbędnej dla ręcznych obliczeń. Nauczanie stawać się będzie bardziej „konkretne" – z pomocą komputera można „sprawdzać" prawidłowość otrzymanych rozwiązań – można więc ograniczać ilość wiedzy przyjmowanej przez uczniów na „wiarę".

W epicentrum spodziewanego „trzęsienia ziemi" znajduje się sam nauczyciel matematyki. Mikrokomputery stawiają duże wymagania. W czasie lekcji nauczyciel musi mieć duży „refleks" – uczniowie oczekują odpowiedzi nauczyciela (na pojawiające się wciąż problemy) z „komputerową" prędkością a nauczyciel nie zna odpowiedzi na wszystkie te pytania. Niekiedy należałoby brać korepetycje od własnego ucznia, który lepiej zna dany typ komputera, bo ma taki komputer w domu (nauczyciela często po prostu nie stać na taki zakup). Zmniejsza się znaczenie reprodukcji gotowej wiedzy przez nauczyciela, nauczanie wspomagane przez komputer wymaga twórczej postawy nauczyciela.

Bibliografia

[1] M.Legutko *Algorytm Euklidesa* (program komputerowy)

[2] M.Legutko *Ułamki okresowe* (program komputerowy)

[3] M.Legutko *Wykresy funkcji* (program komputerowy)

[4] M.Legutko *Zdarzenia losowe* (program komputerowy)

[5] M.Legutko, M.Legutko, S.Turnau *Matematyka dla klasy 1 liceum* maszynopis

[6] Mirrorsoft *Vaders* (program komputerowy)

[7] K.Omilianowski, R.Lamch *Ułamki* (program komputerowy)

[8] *Program liceum ogólnokształcącego oraz liceum zawodowego i technikum. Matematyka.* WSiP. 1986 Warszawa

[9] *Program szkoły podstrawowej. Matematyka. Klasa V.* WSiP. 1981 Warszawa

[10] *Program szkoły podstawowej. Matematyka. Klasy IV–VIII.* WSiP 1984 Warszawa

[11] E.Puchalska, Z.Semadeni *Nauczanie początkowe. Podręcznik dla nauczyciela.* WSiP 1978 Warszawa

[12] H.Rademacher, O. Toeplitz *O liczbach i figurach* PWN 1956 Warszawa

[13] W.W.Sawyer *Droga do matematyki współczesnej* Wiedza Powszechna 1969 Warszawa

[14] W.Zawadowski *Matematyka 6.* WSiP 1987 Warszawa