Nauczyciel matematyki a współczesna topologia

Krzysztof CIESIELSKI, Zdzisław POGODA, Kraków

O tym, że nauczyciel matematyki powinien wiedzieć o niej więcej, niż jest obecnie w programie szkolnym, nie trzeba chyba nikogo przekonywać. Ewentualne różnice zdań i dyskusje mogą się rozpocząć dopiero w momencie, w którym zaczniemy rozważać zakres tego dodatkowego materiału i jego ilości. Tu chcielibyśmy się zająć problemem współczsnej topologii.

Wiedza nauczyciela powinna znacznie przekraczać materiał którego uczy. Żeby czegoś dobrze uczyć, trzeba najpierw samemu przedmiot dokładnie poznać i to w zakresie znacznie szerszym. Odnosi się to do nauczania w ogóle, a nauczania matematyki w szczególności. Trudno przekonywająco uczyć np. rachunku różniczkowego, znając tylko elementarne reguły różniczkowania. Nauczyciel władający jedynie geometrią euklidesową będzie mógł nauczać tego przedmiotu. Nie będzie jednak w stanie udzielić zadowalającej odpowiedzi uczniom na różne „niepoprawne" pytania: „a co by było, gdyby każde dwie proste się przecinały" itp. Dla niego takie problemy nie będą miały sensu. Sporo racji jest w stwierdzeniu, że znajomość geometrii nieeuklidesowych jest konieczna dla nauczyciela geometrii euklidesowej.

Zauważmy, że zagadnienia matematyczne poruszane w szkole to praktycznie matematyka XVIII wieku, a w zasadzie tylko pewne jej fragmenty – tyle, że czasem ubrane we współczesną terminologię i oznaczenia.
Często padające pytania – czy matematyka jest nauką żywą, czy matematycy robią coś nowego i czy w ogóle można jeszcze w matematyce coś nowego zrobić, nie powinny pozostać bez odpowiedzi. I odpowiedzi powinien umieć udzielić również nauczyciel, a nie tylko tylko matematyk „z pierwszej linii". Naturalnie bez znajomości współczesnych problemów matematyki odpowiedzieć na tego typu pytania będzie trudno.

Nie chodzi tu oczywiście o to, by męczyć nauczycieli szczegółami zawiłych teorii, ale by pokazać im najważniejsze idee i problemy rozważane współcześnie. Każda żywa dziedzina matematyki obfituje w nierozwiązane zagadnienia lub ważne udowodnione niedawno twierdzenia.

Z przedstawionym wyżej stanowiskiem praktycznie każdy się zgodzi. Jednak zastosowaniu go do topologii, i to jeszcze współczesnej, wielu zacznie się zastanawiać. Czy to czasem nie przesada? Czy zestawienie „nauczyciel matematyki a współczesna topoplogia" nie jest mimo wszystko zbyt ryzykowne? Ktoś mógłby przytoczyć następującą argumentację: „Przecież topologii nie uczy się w szkole! Niewątpliwie, pewne podstawowe wiadomości z topologii powinny być znane nauczycielom matematyki, ale po co zawracać im głowę faktami, z których nigdy nie będą korzystać, które nie przydadzą się w pracy. I w przypadku nauczyciela, który topologii nie zna, obarczanie go dodatkowymi informacjami nie ma sensu. A co ze studentem – nauczycielem w przyszłości? Jest przecież tyle przedmiotów, które student sekcji pedagogicznej koniecznie musi poznać. Czy nie lepiej, by zamiast tego zapoznał się z problemami dotyczącymi nauczania? Weźmy też pod uwagę, ile nauczyciel ma rozmaitych obowiązków i zajęć..." ,

Tego typu głosów nie można całkowicie lekceważyć. Wiele argumentów jest słusznych. Zauważmy jednak, przed przejściem do zasadniczego tematu, że sporo spośród narzuconych nauczycielowi obowiązków, to obowiązki nonsensowne i mało raczej związane z przedmiotem którego naucza. W tę stronę zatem należałoby kierować energię zmierzającą do odciążenia pedagogów. Celem tego artykułu jest, między innymi, pokazanie, że topoplogia do zbędnych elementów wiedzy nie należy.

Topologia sama w sobie nie jest łatwym tematem do prezentacji. Jest ona nauką niezwykle abstrakcyjną. Można jednak pokazać jej podstawy na bardzo elementarnym poziomie, można też pokazać, w miarę szybko i zrozumiale, ciekawe i istotne wyniki. Można zaprezentować elementy topologii w sposób wdzięczny, a chwilami nawet bardzo efektowny.

Jest to nauka stosunkowo młoda rozwijająca się niezwykle szybko. Przeniknęła do wszystkich niemal dziedzin matematyki; także przedstawiciele innych nauk, jak fizycy i chemicy z zainteresowaniem zerkają na wyniki uzyskiwane w topologii. Stworzona jest dzięki temu okazja, by nie tylko uzasadnić tezę, że w matematyce jest wiele jeszcze do zrobienia, ale także dać odpowiedź na inne ważne pytanie – czy współczesna, abstrakcyjna matematyka znajduje jakieś zastosowanie.

Jak już wspomnieliśmy, topologii nie ma w programie szkolnym. Jednak pewne pojęcia topologiczne można tam znaleźć i dlatego przyszły nauczyciel zapoznawany jest na studiach z jej elementami. Ma to miejsce podczas wykładu z analizy oraz osobnego wykładu poświęconego topologii. Z pojedynczymi faktami można się także zetknąć na innych zajęciach. Nauczyciel zapytany z czym kojarzy mu się topologia odpowie, że z funkcjami ciągłymi, zbiorami zwartymi, spójnymi, homeomorfizmami... W toku studiów proponujemy studentom pewien niezbędny elementarz topologiczny ograniczający się w gruncie rzeczy do topologii mnogościowej. Na inne sprawy albo nie ma czasu, albo nawet jeśli czas jest, to mimo wszystko głębiej w problemy topologii nie wchodzi się, bo „po co obciążać nauczycieli". Może się więc zdarzyć, że student sekcji poedagogicznej przejdzie przez studia nie usłyszawszy nic o grupie podstawowej, topologii algebraicznej, twierdzeniach Brouwera czy nawet wstędze Möbiusa.

Są oczywiście różnego rodzaju wykłady monograficzne, zajęcia fakultatywne i seminaria, na których można by rozszerzyć to topologiczne minimum. Czasami nawet się w ten sposób postępuje, ale jest to najczęściej rozszerzenie dość specyficzne. Prezentuje się bowiem wąski fragment jakiejś teorii ze wszystkimi najdrobniejszymi szczegółami. Ktoś może zwrócić uwagę, że przecież tak się studiuje matematykę – innej drogi na szczyty wiedzy nie ma, w możliwości pełnego śledzenia wszystkich kroków dowodowych tkwi swoiste piękno matematyki. Tak jest w istocie, ale tego typu podejście do teorii matematycznych ważne jest dla tych, którzy w przyszłości mają zająć się pracą twórczą. Nauczyciele mogą (ba, nawet powinni) być zapoznani z takim podejściem w przypadku podstawowych działów matematyki (tych których fragmenty lub uproszczone wersje pojawiają się w programie szkolnym) jak algebra liniowa, analiza, geometria. Nie ma chyba jednak potrzeby drobiazgowego analizowania fragmentów specjalnych teorii, lepiej położyć nacisk na podstawowe idee, ewentualnie zastosowania, tak, by z jednej strony wskazać nauczycielowi możliwość popularyzowania uzyskanych wiadomości, a z drugiej dać podstawy do orientacji w bieżących problemach matematyki.

Niezależnie od klasycznych wykładów monograficznych przydałyby się na sekcji kształcącej przyszłych nauczycieli wykłady przeglądowe. W ich treści znajdowałaby się mniejsza liczba szczegółów, obejmowałyby one sobą natomiast znacznie szerszy zakres materiału. Powinno tu być wiele przykładów i komentarzy, a także wielkie i zaawansowane twierdzenia teorii – z tym, że bez dowodów (ewentualnie z zasygnalizowaną ideą dowodu).

Zanim zajmiemy się konkretnymi przykładami problemów z topologii, które warto by zaprezentować nauczycielom (zarówno już nauczającym jak i przyszłym), zwróćmy uwagę, że przedstawiając najnowsze rezultaty danej dziedziny nie powinniśmy zapominać o jej historii, o ludziach, którzy ją tworzyli. Śledząc powstawanie i rozwój topologii nauczyciel (i nie tylko on) ze zdziwieniem stwierdzi, że pojęcia, które pojawiają się w historii początków tej nauki niemal wcale nie były omawiane na wykładzie kursowym. Wzór Eulera oraz jego różnorodne wersje, kolorowanie map, klasyfikacja powierzchni, grupa podstawowa – takimi hasłami zajmowali się prekursorzy topologii i świadomie zaliczali je do zupełnie nowej dziedziny matematyki (nazywanej wtedy *analysis situs*). Ciągłość, zbieżność, zwartość, otoczenia itp. pojawiły się w analizie matematycznej, a także wraz z powstaniem teorii mnogości. Pojęcia te zostały włączone do topologii praktycznie dopiero z początkiem XX wieku.

Zapoznanie nauczyciela z historią tej egzotycznej dziedziny matematyki może dać motywację do zaprezentowania współczesnych problemów topologii; problemy sygnalizowane przez Riemanna, Möbiusa, Listinga, von Dycka czy Poincarégo aktualne są również i dziś. Przy okazji można zaobserwować, jak rosło znaczenie topologii w matematyce, jak z pewnego zbioru specyficznych zagadnień wyrosła prężna, ciągle rozwijająca się, ważna dziedzina. O znaczeniu topologii nie trzeba żadnego matematyka przekonywać. Jej metody wykorzystywane są we wszystkich bez wyjątku działach matematyki począwszy od logiki i algebry, a na analizie i równaniach różniczkowych kończąc. To właśnie specyfika problemów topologicznych była powodem stworzenia przez Eilenberga i MacLine'a teorii kategorii.

Nawiązanie do historii topologii ma także inne konkretne zalety. Sam fakt sięgnięcia po zagadnienia z historii nauki winien być cenny, gdyż w szkole o tej działce wielkiej historii wiele się nie mówi. z lekcji pamiętamy głównie daty bitew lub rewolucji oraz nazwiska królów, tyranów i dowódców. O uczonych wspomina się rzadko, matematyków nie wspominając w ogóle (wyjątkiem są starożytni, ale oni byli uniwersalni). Dlatego każda okazja, by wspomnieć o historii matematyki powinna być skrzętnie wykorzystana. A topologia daje takich okazji wiele. Tym bardziej, że Polacy do rozwoju topologii wnieśli wielki i trwały wkład. Topologia zajmowała ważne miejsce w polskiej szkole matematycznej. Wypada, aby każdy nauczyciel matematyki wiedział, kim byli Kuratowski, Sierpiński, Borsuk czy Knaster. a jeśli już zna się nazwiska to należałoby wiedzieć, czego też ci Polacy w topologii dokonali – przynajmniej w ogólnych zarysach. Zawsze przecież może się znaleźć grupka uczniów, którzy nie tylko rozwiązują zadania, ale czasem czytają coś o matematyce. To oni mogą zapytać o twórców tej czy innej dziedziny.

Wspominanie o pewnych faktach historycznych wnosi w matematykę więcej życia. Oto bowiem okazuje się, że matematyka, sprawiająca na niektórych wrzżenie bezdusznego zbiorowiska „formalnych twierdzeń, lematów i definicji" była tworzona przez ludzi – stwierdzenie banalne, ale jego oczywistość wcale nie rzuca się w oczy w programach szkolnych bądź uniwersyteckich. Twierdzenia i definicje po prostu istnieją, niektóre czasem noszą nazwiska twórców, lecz w szkole jest i to raczej rzadkie.

Omawiając współczesne problemy topologii nie sposób również nie wspomnieć o ludziach borykających się z nimi. Jeśli znajomość nazwisk wybitnych matematyków sprzed co najmiej kilkudziesięciu lat jest znikoma, to wiedza o tworzących współcześnie jest praktycznie żadna. Nazwiska Eilenberg, Steenrod, Atiyah, Nowikow, Thurston czy Donaldson nie mówią nic sporej liczbie absolwentów matematyki!

Przejdźmy do omówienia konkretnych wybranych zagadnień z topologii, z którymi mógłby (względnie powinien) zapoznać się student sekcji pedagogicznej, a może przede wszystkim nauczyciel uczący matematyki. Topologia jest niezwykle rozbudowaną dziedziną. Metody stosowane przez rozmaite jej gałęzie są tak różnorodne, że niektórzy mają wątpliwości, czy przypadkiem pod tą nazwą nie ukryło się kilka odmiennych działów matematyki. Mamy więc topologię ogólną, algebraiczną, geometryczną, różniczkową, teorię wymiaru, topologię niskich wymiarów itp. Co z tego wybrać i co zaproponować nauczycielom?

Jak już wspominaliśmy, topologia ogólna (mnogościowa) jest tym działem, który stosunkowo najlepiej jest poznany przez studentów sekcji pedagogicznej (i studentów matematyki w ogóle). Z metodami przez nią wypracowanymi stykamy się przede wszystkim na analizie i tu zapoznajemy się z jej podstawowymi konstrukcjami. Opisywane są jednak tylko konstrukcje użyteczne w analizie. Pomija się przeważnie zagadnienia specyficzne dla topologii mnogościowej (choć bardzo efektowne), takie jak na przykład różne rodzaje niespójności, czy continua dziedzicznie nierozkładalne. A jest to także specjalność polska, wiele konstrukcji nosi polskie nazwy.

Zagadnieniem, o którym nauczyciele niewątpliwie powinni co nieco wiedzieć, jest teoria rozmaitości. Pojecie rozmaitości jest jednym z najważniejszych w matematyce i aż dziw bierze, że można spotkać absolwentów matematyki nie potrafiących choćby intuicyjnie wyjaśnić, co się pod tą nazwą kryje. Rozmaitości, choć nie pod obecną nazwa, zostały powołane do życia na potrzeby *analisis situs*, a w każdym razie z myślą o niej. Później zawładnęła nimi geometria różniczkowa, choć topologia wypracowała także swoje metody pozwalające skutecznie badać te twory. Obiekt lokalnie zachowuący się jak przestrzeń euklidesowa, globalnie jednak mogący być radykalnie od niej różny, szybko znalazł prawo bytu w wielu dziedzinach matematyki. Jedną z przyczyn popularności tego pojęcia okazała się stosunkowo szybka i prosta możliwość przejścia od własności lokalnych do globalnych (i odwrotnie).

Definicja rozmaitości (różniczkowej, topologicznej czy typu PL) nie jest banalna i choćby z tego względu nie jest umieszczana w programach szkolnych. Pojęcie to jest jednak bardzo intuicyjne, więc może być opisane, choć z pewnym uszczerbkiem dla precyzji, nawet uczniowi szkoły średniej. W teorii rozmaitości jest wiele fundamentalnych i efektownych zagadnień. Szczególnym, zasługującym na osobną uwagę tematem jest klasyfikacja rozmaitości (zwłaszcza w przypadku powierzchni). Analizując ją stykamy się ze sztandarowymi tworami tak zwanej topologii klasycznej: torusem, butelką Kleina, płaszczyzną rzutową (w postaci np. czapy krzyżowej), wstęgą Möbiusa. Trudno sobie wyobrazić dobrego nauczyciela matematyki nie znającego tych pojęć, nie potrafiącego dać ich intuicyjnego opisu. Powierzchnie są tworami balansującymi na granicy intuicji, dają się jednak tej intuicji uchwycić. Jest to ich wielka zaleta. Jest to także wspaniałe ćwiczenie wyobraźni przestrzennej. Doświadczenie, że twory dwuwymiarowe mogą sprawiać aż takie kłopoty naszej, wydawałoby się, trójwymiarowej intuicji jest niezwykle pouczające. I z tego zjawiska nauczyciele powinni sobie zdawać sprawę.

Opis niektórych tworów trójwymiarowych jest również kształcący. Są to na ogół rozmaitości bez brzegu, takie, których nie da się zobaczyć. Mimo to można je badać, analizować ich własności. Choć są one trójwymiarowe, nauczeni dwuwymiarowymi przykładami nie dziwimy się już temu, że nie można ich oglądać.

Interesujące jest studiowanie własności pojedynczych prostych przykładów takich jak trójwymiarowa sfera, torus, przestrzeń rzutowa $S^2 \times S^1$, czy też inne odmiany przestrzeni soczewkowych. Porównanie z powierzchniami staje się pięknym przykładem ekstrapolacji pojęć wprowadzonych dla powierzchni. To, że wyobraźnia geometryczna na takich przykładach rozwija się doskonale (aczkolwiek może to być zabieg dla niej bolesny) jest sprawą oczywistą. Po zapoznaniu się z licznymi przykładami wiadomość, że do dziś nie ma pełnej klasyfikacji 3-rozmaitości przyjmowana jest ze zrozumieniem i może powodować jeszcze większe nimi zainteresowanie.

Twory wyżej wymiarowe jeszcze bardziej umykają intuicji i właśnie przez tę tajemniczość mogą być pociągające. Informacja, że dla wyżej wymiarowych rozmaitości nie istnieje klasyfikacja, mimo wszystko zaskakuje.

Z twierdzeń dotyczących rozmaitości jedno zasługuje na szczególną uwagę: jest to twierdzenie Whitneya o zanurzaniu oraz jego odpowiedniki dla struktur nieróżniczkowych. Ogólny dowód jest zawiły, ale intuicje dają się zaprezentować, a w przypadku pewnych specjalnych rozmaitości można się pokusić o więcej szczegółów.

Rozmaitości są pięknym przykładem na to, że matematyki nie można szufladkować według dziedzin. Nie można jej dzielić na zagony jak pole i precyzyjną miedzą oddzielać jedną dziedzinę od drugiej. Granice między poszczególnymi działami zacierają się i, mimo wysokiej specjalizacji, życie (czytaj konkretny problem) zmusza do szukania metod w innych specjalnościach, często bardzo odległych.

Tak właśnie zachowują się rozmaitości. Nie są one „własnością" analizy, topologii czy geometrii. By badać je skutecznie, trzeba sięgać często po techniki z rozmaitych „szuflad". Metody algebraiczne są tu nie tylko najmocniejsze, ale i najefektywniejsze, choć ostatnio rewelacyjne rezultaty uzyskano dzięki technikom wypracowanym przez fizyków. Czy takie przykłady niezwykłego łączenia dziedzin matematyki nie przemawiają lepiej do wyobraźni niż słynna geometria analityczna? Kto jak kto, ale nauczyciel matematyki musi zdawać sobie sprawę z istnienia i roli łączenia skrajnie różnych działów matematycznych.

Poświęćmy nieco uwagi innemu owocnemu połączeniu działów – topologii algebraicznej. Z tym przedmiotem student – przyszły nauczyciel – raczej nie ma okazji się zetknąć, chyba, że na zaawansowanych wykładach monograficznych, które jednak nie są specjalnie przygotowane dla sekcji nauczycielskiej. A przecież jest niezwykle ważne, by uczący matematyki wiedzieli o istnieniu i głównej myśli topologii algebraicznej! Należy znać piękne i klasyczne twierdzenia, dające się w prosty sposób wypowiedzieć (mające często interesujące interpretacje), które można otrzymaać jako proste wnioski z zaawansowanych wyników tej teorii.

Można się zastanawiać, czy przypadkiem nie jest przesadą zawracanie głowy nauczycielom tak wyrafinowaną techniką, jaką się posługuje topologia algebraiczna. Zauważmy jednak, że podstawowe idee topologii algebraicznej mają przejrzystą interpretację geometryczną, o której często się zapomina zachwycając się skutecznoscią algebraicznej maszynerii. Ponadto metoda topologii algebraicznej jest niezwykle kształcąca i warta naśladowania: problem „tłumaczy się" z jednego języka (w tym przypadku topologicznego) na drugi – algebraiczny, znacznie wygodniejszy w rachunkach. Wiele współczesnych problemów topologicznych elegancko wyraża się właśnie w języku topologii algebraicznej. Naturalnie niezwykle zawiłą teorię kohomologii czy też K-teorię trudno byłoby przedstawić intuicyjnie. Jednakże wiele podstawowych konstrukcji można tak zinterpretować. W szczególności idee grup homotopii i homologii mają dość jasne uzasadnienie. Na ich przykładzie można pięknie wyjaśnić, na czym polega metoda i siła topologii algebraicznej.

Istnieją jeszcze bardziej sugestywne przykłady reklamujące topologię algrebraiczną – ściśle z nią związane. Powszechnie znany jest wzór Eulera dla wielościanów. Niewinna ciekawostka elementarnej geometrii stała się ważnym niezmiennikiem topologicznym, jednym z podstawowych pojęć topologii kombinatorycznej (dziś algebraicznej). Dobry nauczyciel powinien być świadom tego, że proponowany uczniom w szkole wzór jest tylko szczególnym przypadkiem znacznie ogólniejszej własności. Pewne uogólnienia tego wzoru dla powierzchni także nadają się do szerszej popularyzacji. Mamy tu znakomity przykład na to, jak ważne jest szersze spojrzenie na zagadnienia, których naucza się w szkole.

Pożyteczne jest posiadanie podstawowych informacji z jeszcze jednej gałęzi matematyki – teorii wymiaru. Prowadzą do niej pewne zagadnienia topologii, jak na przykład teoria krzywych. o sprawy związane z wymiarem często pytają uczniowie, którzy słyszeli wiele o mitycznym wymiarze czwartym, a także nieco wyższych (mowa o nich na przykład w co drugim opowiadaniu fantastyczno-naukowym). Nauczyciel zapytany przez ucznia o tego typu problemy musi wiedzieć, jak fantastyczne wizje umieścić w matematyce. Słowo „wymiar" definiowane jest na rozmaite sposoby i wielokrotnie znaczy zupełnie co innego, trzeba więc się w tym orientować. Należy odróżniać strukturę czterowymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego od R^4. Należy wiedzieć, że słynny ostatnio tak zwany wymiar ułamkowy, zawdzięczany fraktalom, to zjawisko z zupełnie innego rodzaju niż czasoprzestrzenny czwarty wymiar.

A przybliżyć pojęcie czwartego wymiaru nie jest tak trudno: niejednemu już pomogły w tym płaszczaki wymyślone w roku 1884 przez Edwina Abbota.

Wspomnijmy o jeszcze jednym ważnym dziale topologii, traktując go tu jednak jako zagadnienie raczej uzupełniające – mowa o teorii węzłów i zawierającej ją teorii położenia. Problemy związane z węzłami charakteryzują się tym, że w zasadzie dadzą się sformułować w języku zupełnie elementarnym, natomiast ich rozwiązanie wymaga zaskakująco skomplikowanych metod. Bardzo zawiły opis węzłów został ostatnio znacznie uproszczony. Węzły mają także istotne zastosowanie poza matematyką – w fizyce, chemii czy biologii molekularnej. Warto też chyba wiedzieć, że istnieje teoria węzłów wyżej wymiarowych.

Z teorią położenia wiążą się niektóre fundamentalne twierdzenia topologii, o których powinien słyszeć każdy absolwent matematyki. Mowa o twierdzeniach Jordana i Schönfliesa. Przy okazji pojawiają się efektowne i zaskakujące przykłady: dzikie sfery Alexandera i Antoine'a są niezwykłe, a przy tym proste w opisie (poglądowym, nie zaś formalnym).

Wiele twierdzeń topologii jest tak ważnych i podstawowych, że matematykowi po prostu nie wypada o nich nie wiedzieć. Niektóre z nich były tu już wspomniane. Twierdzenie Jordana jest proste w sformułowaniu, czego nie można powiedzieć o dowodzie. Istotna jest informacja o twierdzeniu mocniejszym, twierdzeniu Schönfliesa (które można formułować na różne sposoby), a przy tym konieczna jest świadomość, że ten ostatni rezultat dotyczy tylko płaszczyzny.

Wspomnijmy o twierdzeniu Brouwera o niezmienniczości obszaru, twierdzeniu Borsuka-Ulama o antypodach. A twierdzenia o punkcie stałym? Twierdzenia Banacha czy Brouwera powinny być powszechnie znane. I warto wiedzieć, że tego typu rezultatów jest więcej, że istnieje wynik nazwany imieniem Schaudera (znowu Polak!).

Można takich faktów wymieniać bardzo wiele. Istnieją przecież takie ważne i interesujące twierdzenia: Sarda, Tietzego, Stone'a-Weierstrassa ... Te rezultaty są fundamentalne dla współczesnej topologii. Podkreślmy tu, że absolutnie nie chodzi o to, by nauczycielowi w sposób encyklopedyczny przekazać listę ważnych twierdzeń. Nic podobnego! Uczący matematyki powinien ważne rezultaty znać i mniej więcej wiedzieć, skąd się wzięły, z jakiej gałęzi matematyki pochodzą i do czego służą. Dobrze jest też, gdy będzie wiedział, że ich sformułowania nie powinny zwieść swoją prostotą i że dowody wcale łatwe nie są. Jeśli nadto nie będzie mu obce, że wielką pomocą w tym celu służy w wielu wypadkach topologia algebraiczna...

Wagę twierdzenia poznajemy także po zastosowaniach, tak więc i przykłady ciekawych zastosowań tych rezultatów warto pokazać nauczycielom. A przecież właśnie te centralne twierdzenia mogą być reklamowane za pomocą bardzo efektownych i intuicyjnych przykładów. Nie można nie wspomnieć o istnieniu antypodycznych punktów Ziemi o tym samym ciśnieniu i temperaturze czy obrazach ilustrujących twierdzenie Jordana, np. trzech domach połączonych ze źródłami prądu, gazu i wody ... Do pełnego zrozumienia twierdzeń bardzo przydają się liczne interpretacje.

Oprócz rezultatów już udowodnionych, w topologii (jak w każdej dziedzinie matematyki) istnieje wiele hipotez, które do dziś nie doczekały się rozwiązania czy realizacji. Informowanie o tych sprawach nauczycieli mogłoby spełniać bardzo ważną rolę. Byłoby to niejako wprowadzenie na pierwszą linię badań i pokazanie, że w matematyce jest jeszcze wiele do zrobienia i że nauka ta daleka jest od zamknięcia czy skostnienia. Naturalnie, niektóre problemy wymagają niezwykle skomplikowanych definicji i konstrukcji. W topologii są jednak hipotezy, do zrozumienia których nie potrzeba nadmiernej ilości zaawansoweanych wiadomości. standartowym przykładem jest wspomniany już problem klasyfikacji rozmaitości. Z rozmaitościami wiąże się słynna hipoteza Poincarégo. Losy tego problemu mogłyby stać się tematem książki sensacyjnej.

Są one przepięknym przykładem na to, jak matematycy stawiają problem, jak próbują go rozwiązać, a także jakie przeszkody i niebezpieczeństwa w swej pracy napotykają. Inną ważną, choć nie tak słynną jest *annulus conjecture* – hipoteza o pierścieniu, którą w końcu roztrzygnięto – z wyjątkiem przypadku czterowymiarowego (!).

Nie zamierzamy tu robić przeglądu wszystkich działów topologii i wszystkich problemów, z którymi warto by zapoznać nauczycieli (lub studentów sekcji ogólnej). Zagadnienia tu tylko poruszone są doskonale znane specjalistom, którzy, obyci z problemami, mogliby pokusić się o odpowiednie ujęcie tematu. Stanowią one niewielką cząstkę tego, co można rozpropagować. Nie wspomnieliśmy nic o zgodności różnego rodzaju struktur na rozmaitościach, o sferach egzotycznych czy egzotycznych strukturach na R^1 i teorii wiązek. Są to hasła kryjące w sobie najnowsze zdobycze topologii. Zrozumienie ich sprawia czasem kłopot zawodowym topologom, a cóż dopiero mówić o osobach postronnych. Nie wolno absolutnie przesadzać w chęci przekazywania zbyt ogromnej wiedzy. Być może jednak i tu można znaleźć idee i intuicje dające się w łatwy sposób rozpropagować szerzej ...

Przed przejściem do uwag końcowych poświęcimy jeszcze parę słów tematowi, który już kilkakrotnie się tu przewijał. Mowa o niezwykłych konstrukcjach. Dobrze rozszerza horyzonty i kształtuje wyobraźnię znajomość ciekawych przykładów, niestandartowych tworów matematycznych. Oczywiście, nie tylko świadomość ich istnienia, ale także wiedza do czego one służą i na czym polega ich atrakcyjność. Właśnie topologia dostarcza sporą liczbę interesujących i orginalnych przykładów zbiorów konstruowalnych w niezwykły sposób. Były one już wymieniane – przypomnijmy je jeszcze raz. Nauczycielowi matematyki nie powinny być obce takie pojęcia jak wstęga Möbiusa, butelka Kleina czy płaszczyzna rzutowa. Dobrze jest wiedzieć o istnieniu „dzikich" sfer, z których najprostszą i najatrakcyjniejszą wydaje się rogata sfera Alexandera. Warto poznać różne sposoby „oglądu" sfery trójwymiarowej.

Osoba z dyplomem ukończenia studiów matematycznych powinna znać niestandartowe przykłady krzywych, takie, jak krzywa Peano. Powinna wiedzieć, co to jest dywan Sierpińskiego. Nie jest źle, gdy zna przykład słynnej funkcji ciągłej z [0,1] na [0,1], zwanej czasem funkcją Cantora-Lebesgue'a. Bardzo dobrze, gdy wie o istnieniu continuum dziedzicznie nierozkładalnego, skonstruowanego przez B.Knastera. Wymieńmy też continuum rozcinające R^2 na trzy składowe, będące brzegiem każdej z nich (wraz z interpretacją tego za pomocą jezior Wady). Warto też znać niestandardowe przykłady przestrzeni metrycznych wraz z ich opisami „wziętymi z życia".

Kończąc spróbujmy jeszcze raz ustosunkować się do natrętnie powracających pytań. Czy takie rzeczy są nauczycielom rzeczywiście potrzebne? Co oni z tego będą mieli? A jeśli nawet będą dane zagadnienie znać, czy im się uda komuś to pokazać?

W tym celu należy uwypuklić pewne sprawy.

Piszący te słowa są zdecydowanymi przeciwnikami zwiększania liczby przedmiotów w szkole oraz nadmiernego rozbudowywania programów danych przedmiotów. Dziwne koncepcje, wprowadzające do szkół liczne, nowe zajęcia redukują liczbę godzin przeznaczonych na naukę wiadomości naprawdę potrzebnych i istotnych dla kultury i inteligencji młodego człowieka. Ponadto przesadnie rozbudowane programy (wprowadzające na przykład w młodszych klasach szkoły podstawowej pojęcia biocenozy czy biotopu na biologii albo równania różniczkowe drugiego rzędu w drugiej klasie szkoły średniej) powodują, że uczniowie nie będą rozumieli ze wspomnianych zagadnień dokładnie niczego. Nadmiar informacji kosztem precyzji czy dokładnego wyjaśnienia o co chodzi może wywołać katastrofalne skutki włącznie z nienawiścią do danego przedmiotu – nawet do końca życia.

Matematyka jest nauką precyzyjną, konkretną, nauką logicznego myślenia.

Uczeń, nawet słaby, musi zdawać sobie sprawę z tego, że tu wszystko jest skonstruowane w sposób porządny. Nie ma przedstawianych na lekcjach „pobożnych życzeń" ale konkretne fakty. Fakty, o których prawdziwości jest przekonany - bo potrafi je uzasadnić. Zadania rozwiązuje na bazie teoretycznej, którą ma przedstawioną bez zarzutu - nie na podstawie umów z nauczycielem czy autorytatywnie podanych dogmatów.

Dlatego zaznaczmy explicite raz jeszcze: przedstawione informacje dotyczą nauczycieli, a nie uczniów!

Nauczyciel matematyki jest nie tylko nauczycielem; jest on także matematykiem. Powinien mieć szeroki pogląd na naukę. Wiedzieć, co istotnego się w niej dokonało, co się dzieje obecnie.

Jesteśmy przeciwnikami tezy, że nauczyciela matematyki wolno informować tylko o tym, co ma się jednocześnie udowodnić. Spowodowałoby to znaczne zawężenie jego horyzontów. W krótkim czasie jedynymi, którzy wiedzą coś więcej o matematyce współczesnej, niż jest w programie szkolnym, zostaliby pracownicy wyższych uczelni działający twórczo. Matematyka wyższa wymaga popularyzacji, tak jak wymaga jej cała nauka. A jak wyobrazić sobie tę popularyzację przy założeniu, że nauczyciele w szkołach o współczesnej matematyce nie wiedzą prawie nic?

Ten, kto uczy matematyki, powinien być przekonany o tym, że jest to nauka ciekawa. Musi mieć świadomość, w jaki sposób wykracza ona poza to, czego obecnie uczy się w szkole. Nie, że wykracza - bo to jest dla każdego oczywiste, ale - jak wykracza. Powinien mieć możliwość szerszego ogarnięcia wzrokiem królestwa matematyki.

Często może się zdarzyć, że do nauczyciela przyjdzie uczeń z pytaniem o informację spoza materiału szkolnego. Coś gdzieś przeczytał, usłyszał - chce się dowiedzieć dokładniej albo poprosić o wyjaśnienie niezrozumiałego szczegółu. Czy dobrze jest, gdy nauczyciel zorientuje się, że pytający wie o danym zagadnieniu dużo więcej niż on sam? Gdy słysząc „twierdzenie Jordana o rozcinaniu" nie będzie miał pojęcia, do której gałęzi matematyki to dopasować? Może do algebry - bo kiedyś coś słyszał o postaci kanonicznej Jordana macierzy?

Do omówienia pozostaje jeszcze jedno. Czy nauczyciel sam z siebie, nie pytany, nie mógłby jednak czegoś ze współczesnej matematyki przekazać uczniom?

Temu, czego wypadałoby uczyć, już kilka zdań popświęciliśmy. I nonsensem jest tłumaczenie na lekcjach, co to jest hipoteza Poincarégo. Ale ... dlaczego kiedyś, przy okazji, nie wspomnieć, że coś takiego istnieje - bez mówienia o co chodzi - i nie podać paru faktów z historii rozwiązywania tego problemu? Uczeń dowie się o istnieniu topologii, usłyszy nazwiska Poincarégo, Smale'a, Zeemana... Szkoła powinna uczyć - czy znajomość nazwisk wielkich ludzi nie świadczy o inteligencji człowieka, o jego erudycji?

A co nieco można przekazać na kółku matematycznym. Pokazać osobom zainteresowanym matematyką jej elementy uwidaczniające, że matematyka to nie tylko rachunki. Bez przesady oczywiście! Podajmy przykład. Na jednych zajęciach można omówić wstęgę Möbiusa. Na następnych - butelkę Kleina, zwracając uwagę na podobieństwa z tworem wprowadzonym poprzednio. Tydzień później - płaszczyzna rzutowa. I stąd już tylko krok do naturalnego wprowadzenia rozmaitości ...

Omawiając przykład rogatej sfery Aleksandera czy mówiąc o torusie, możemy pokazać w sposób naturalny potrzebę wprowadzenia teorii homotopii. Idea definicji nie kryje w sobie zbyt dużych trudności.

Topologia umożliwia rzecz niezwykłą, jak na matematykę - przeprowadzanie eksperymentów, i to na dodatek bardzo efektownych. Jeśli taka możliwość istnieje, to trzeba ją skrzętnie wykorzystać. Żadna okazja prostego pokazania niebanalnych zjawisk nauki nie powinna być zaprzepaszczona.

Intuicyjne próby przedstawienia zaawansowanych zagadnień matematyki kryją w sobie jednak różnorodne niebezpieczeństwa. Zastępowanie formalnych rozumowań intuicyjnymi szkicami odbija się źle na ścisłości. Osoby stykające się z takim podejściem mogą odnieść wrażenie, że cała topologia jest nieformalna.

Można także dojść do przekonania, że aby zrozumieć jakieś zagadnienie nie potrzeba zbyt wiele wysiłku – wystarczy przeczytać na ten temat jakieś „opowiadanie". Pomijając trudne fragmenty dowodów pozbawiamy też tej specyficznej przyjemności i satysfakcji „przegryzania się" przez problem. Dlatego decydując się na szersze prezentowanie topologii musimy bardzo uważać, by z jednej skrajności – przesadnej precyzji i formalistycznego podejścia nie wpaść w drugą i nie być zbyt intuicyjnym. Dlatego też, przedstawiając elementy topologii na kółku matematycznym, należy być bardzo ostrożnym. Może pewnego rodzaju wyjściem byłoby robienie dwóch rzeczy równolegle. Czyli wprowadzać formalne definicje i ćwiczyć je na prostych przykładach, a jednocześnie pokazywać ciekawe zbiory, jako przykład pasjonujących zagadnień ukrytych za formalizmami, przez które trzeba jednak koniecznie przejść. Formalne i precyzyjne początki też jest łatwo zrobić interesującymi, one przecież także muszą być podbudowane intuicją.

Ciekawym problemem na kółku matematycznym byłyby na przykład własności zbiorów spójnych. Czy suma zbiorów spójnych jest spójna? Myślimy nad tym, a potem dowodzimy. A jak jest z przecięciem? Albo przestrzenie metryczne. Trzeba przecież sprawdzić że dana funkcja jest metryką. Żeby znaleźć kule, też coś trzeba obliczyć ... Topologia jest bardzo wdzięcznym tematem na takie zajęcia, zwłaszcza, że to co się robi, można ubarwić licznymi rysunkami.

I jeszcze jedno, Nauczyciel na takim kółku (nie mówiąc już o lekcjach) nie powinien przedstawiać uczniom całej swojej wiedzy. Mogłoby to doprowadzić do zniechęcenia nawet najambitniejszych. Ale nie wolno mu też traktować wyższej matematyki jako zbioru ciekawostek. Te ciekawostki może pokazywać uczniom, a sam mieć świadomość, czemu one służą i w którym miejscu wielkiej matematyki je umieścić. Musi to wiedzieć, by umieć odpowiedzieć na pytania, które prędzej czy później dociekliwy uczeń może mu zadać. „Panie profesorze – to bardzo fajne, ale co z tego?"

Tak jak pewien wybitny bilardzista, który powiedział kiedyś swojemu uczniowi: „Nauczyłem cię wszystkiego, co umiesz. Ale nie nauczyłem cię wszystkiego, co ja umiem".

W szkołach pojawiają się od czasu do czasu wybitnie zdolni uczniowie. Jeśli nauczyciele nie wykraczają swoją wiedzą poza program szkolny, to matematyczne talenty mogą zostać zmarnowane.

Jako uzupełnienie artykułu podajemy listę (oczywiście daleką od kompletności) pozycji, które mogą ewentualnie służyć pomocą do popartej efektownymi przykładami prezentacji topologii. Niektóre z nich mogą także przydać się nauczycielom w samodzielnym studiowaniu zagadnień topologicznych.

Literatura

1. E. Abbot *Flatland: A romance of Many Dimensions* Dover, N.Y. 1952,
2. W.Bieńko *Zygzakiem przez matematykę* PZWS Warszawa 1965,
3. W.Bołtiański, W.Jefremowicz *Zarys podstawowych pojęć topologii* PZWS Warszawa,
4. K.Ciesielski, Z.Pogoda *Czy sferę można zawiązać?*, Delta 5/1988,
5. – *Hipoteza Poincare'go – niezdobyta twierdza*, Wiedza i Życie 7-8 1987,
6. – *Kilka spojrzeń na sferę trójwymiarową*, Delta 9/1988,
7. – *Rogata sfera Alexandera*, Delta 6/1987,
9. – *Rozmaitości wokół nas* Wyd. Delty – Przeczytaj może zrozumiesz nr 23/1988,

10. R.Courant, H.Robbins *Co to jest matematyka* PWN Warszawa 1967.,
11. H.S.M.Coxeter *Wstęp do geometrii dawnej i nowej* PWN Warszawa 1967,
12. R.Duda *O krzywych i powierzchniach,* Delta 12/1980,
13. – *O pojęciu wymiaru* PZWS Warszawa 1972,
14. – *Wprowadzenie do topologii* cz. 1 i 2 PWN Warszawa 1986,
15. R.Engelking *Topologia ogólna* PWN Warszawa 1975,
16. K.Sieklucki *Geometria i topologia* cz. *Topologia* PWN Warszawa 1980,
17. G.Francis *A topological picturebook* Springer-Verlag 1987,
18. P.J.Giblin *Graphs, surfaces and homology* Chapman and Hall London 1977,
19. H.B.Griffith *Surfaces* Cambridge 1981,
20. V.Guillemin, A.Pollack *Differential topology* Prentice-Hall Engelwood Cliffs, N.Y. 1974,
21. D.Hilbert, S.Cohn-Vossen *Geometria poglądowa* PWN Warszawa 1956,
22. *Intoduction to topology* (Yu.Borisovich,...) Mir, Moskwa 1985, (tłum. z ros.),
23. A.Lelek *Zbiory* PZWS, Warszawa 1966,
24. *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów* pod redakcją L.A.Steena, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 1983,
25. *Matematyka w świecie współczesnym* PWN, Warszawa 1966,
26. J.Milnor *Topologia z różniczkowego punktu widzenia* PWN, Warszawa 1969,
27. J.Mioduszewski *Co to jest krzywa?* Wyd. Delty – Przeczytaj może zrozumiesz nr 15 1986,
28. S.Nowak *Blisko – co to znaczy?* ibid nr 12 1986,
29. K.Nowiński *Chirurgia,* Delta 12/1987,
30. – *Nietypowe, osobliwe, wyjątkowe* Biblioteczka Delty Nr 6, Warszawa 1982,
31.– *Punkty stałe, geodezja i charakterystyka Eulera,* Delta 9/1980,
32. A.S.Parchomienko *Co to jest linia* PWN, Warszawa 1961,
33. Z.Pogoda *Problemy klasyfikacji,* Problemy 12/1987,
34. J.Przytycki *Trójwymiarowe rozmaitości według Thurstona,* Delta 15/1984,
35. – *Węzły i sploty,* Delta 1/1985,
36. J.Rempała *Jeszcze raz o wzorze Eulera, czyli zastosowanie stawów i grobli w stereometrii,* Delta 11/1976,
37. D.Rolfsen *Knots and links* Publish or Perish, Berkeley 1976,
38. C.Rourke, I.Steward *Poincare's perplexing problem,* New Scientist 14.IX.1986,
39. R.Rucker *Geometry, relativity and the fourth dimension* Dover, N.Y. 1977,
40. – *The fourth dimension and how to get there* Houghton-Miffin, 1984,
41. H.Seifert, W.Threlfall *A book of topology* Academic press, N.Y. 1980,
42. W.Sierpiński *Wstęp do teorii mnogości i topologii* PZWS, Warszawa 1965,
43. H.Steinhaus *Kalejdoskop matematyczny* PZWS Warszawa 1954,
44. I.Steward *Problems of Mathematics* Oxford Univ. Press 1987,
45. – *Concepts of modern mathematics* Penguin Books 1975,
46. – *Exotic structures on four-space,* Nature 1322 (1986) 310-311,
47. – *How bent is a knot?* ibidem 314 (1985) 132,
48. *One hundred per cent proof* ibidem 324 (1986) 406-407,
49. – *The Poincaré conjecture proved* ibidem 320 (1986) 217-218,
50. – *The three sphere strikes back* ibidem 325 (1987) 579-580,
51. G.Taubes *What happens when Hubris meets Nemesis,* Discover July 1987,
52. J.R.Weeks *The shape of space* Marcel Dekker Inc 1985,
53. M.Zisman *Topologie Algebraique elementaire* 1984,
54. W.Boltianskij, W.Efremowicz *Nagljadnaja topologia* Biblioteka Kwant nr 21 Nauka, Moskwa 1982,
55. *Enciklopedia elementarnoj matematiki - Geometria* t. 1IV-V,
56. M.Komatsu *Mnogoobrazie geometrii* Znanie, Moskwa 1981 (tłum. z japońskiego),
57. K.Lewitin *Geometriczieskaja rapsodia* Znanie, Moskwa 1984,