# Rozwój matematyki a przemiany w jej nauczaniu

*Agnieszka WOJCIECHOWSKA, Wrocław*

Zarys historii matematyki i równolegle – historii jej nauczania podał R.Duda w artykule *Ewolucja matematyki i jej nauczanie* (w przygotowaniu).

Zasadę tę omawia R.Duda w pracy *Zasada paralelizmu w dydaktyce. Dydaktyka Matematyki* 1. 1982. str. 127- 138.

0. Opracowanie niniejsze nie ma na celu ukazania całej historii nauczania matematyki na tle dziejów matematyki. Okresy, którym poświęcamy uwagę, są w tej długiej historii zjawiskiem raczej wyjątkowym, ale interesującym z uwagi na zaistniałe wówczas w matematyce stosunki pomiędzy nauką a nauczaniem. Badanie tych właśnie stosunków jest celem tej pracy. Tak więc historia matematyki interesuje nas nie tyle jako źródło inspiracji dla dydaktyki poprzez tzw. zasadę paralelizmu, ale jako tło dla rozwoju relacji: matematyka – nauczanie.

Z historii matematyki wybierzemy i omówimy (krótko, są to bowiem rzeczy dobrze znane) te okresy, w których uprawianie i nauczanie matematyki (na różnych szczeblach kształcenia) były sobie bliskie, nieomal tożsame.

Szerzej na ten temat piszą: A.Szabó. *The Beginings of Greek Mathematics*. Budapest 1978. J.Waszkiewicz. *Socjokulturowe problemy genezy matematyki*. cz.I-V. Raporty OBP Politechniki Wrocławskiej. Wrocław .1986. A.Wojciechowska. *Geneza matematyki i logiki - przykład współczesnych problemów w historii obu nauk*, Ruch Filozoficzny (w druku).

1. Pierwszym takim (a z punktu widzenia historyka chyba wciąż najbardziej interesującym) okresem w dziejach matematyki są jej greckie początki. Matematyka w Grecji powstawała w dialogu, dyskusji, ścieraniu się racji i argumentów. Dialog był tam zarazem podstawową formą nauczania. Dowód matematyczny powstał dla uzasadnienia sądu i przekonania oponenta (także ucznia) o jego prawdziwości. Tworzenie i nauczanie matematyki było nieomal tym samym, a matematyka, której nauczano, była „gorącą" matematyką *in statu nascendi*. Taka tożsamość matematyki tworzonej z nauczaną była umożliwiona z jednej strony przez to, że tej rodzącej się dopiero nauki było nie tak wiele, a z drugiej strony, uczniów też nie było wielu, uczyli się bez przymusu, byli w zasadzie chętni i zdolni. Taki szczęśliwy okres nie mógł, niestety, trwać długo. Jego ukoronowaniem jest powstanie *Elementów* Euklidesa (i innych dzieł tego typu) – dzieła naukowego i podręcznika zarazem. Dzieło to zapoczątkowało proces tworzenia się schematu nauczania fragmentu wiedzy matematycznej w formie skończonej, zamkniętej i doskonałej, a równocześnie coraz bardziej skostniałej. Podstawą takiego nauczania miały pozostać *Elementy* przez około 2000 lat (z przerwami). Przedstawiając prawdy niepodważalne i metodę doskonałą, nauczanie to nie pozostawiało miejsca na prawdziwy merytoryczny dialog z uczniem.

Grecki system kształcenia opisuje H.I.Marrou w książce *Historia wychowania w starożytności*. Warszawa PIW, 1969.

R.Kapadiá w artykule *Bring Back Geometry* (Math.Intelligencer 7.1985. str. 53-54) pisze iż w nauczaniu geometrii „w większości krajów Euklides pozostawał praktycznie jedynym podręcznikiem używanym do późnych lat wieku XIX. w wielu szkołach uczono według narzuconego przez niego schematu aż do reformy nauczania w sześćdziesiątych latach naszego stulecia". Dotyczy to także szkół polskich.

Oczywiście możliwość nauczania matematyki nowopowstającej pozostała otwarta jeszcze długo po Euklidesie – poza geometrią. Jednakże w nauczaniu w okresie hellenskim nastąpiła (z punktu widzenia matematyki) katastrofa. Z dwóch konkurujących modeli kształcenia: matematycznego i retorycznego, wygrał ten drugi i matematyka znikneła z kanonów powszechnego nauczania do tego stopnia, że powstać musiały popularne dziełka tłumaczące czytelnikom niezrozumiałe dla nich, matematyczne fragmenty dzieł Platona.

Patrz H.I.Marrou. dz.cyt.. str. 264-268.

Taki antymatematyczny model kształcenia odziedziczyło Bizancjum – i dlatego jedynie Arabom, a nie greckiemu Wschodowi zawdzięczamy przeniesienie matematyki do czasów nowożytnych.

2. W wieku XVIII ukształtował się kanon nauczania matematyki w coraz bardziej upowszechniającym się szkolnictwie szczebla podstawowego i średniego (stosujemy w tym miejscu terminologię współczesną – chodzi zaś o nauczanie na poziomie niższym od uniwersytetu). Z niewielkimi odchyleniami obejmował on geometrię według Euklidesa, arytmetykę, pewne elementy algebry, trygonometrię – wiedzę zamkniętą, daleką od tego czym się fascynowali ówcześni matematycy. z czasem dystans ten zrobił się tak wielki, że można było podejmować próby jego skrócenia, ale o nawiązaniu bliższego kontaktu pomiędzy matematyką nauczaną a powstającą mówić było można wyłącznie na szczeblu szkół wyższych. Chcemy tu mówić jednakże nie o ścisłej reprodukcji kadry przyszłych matematyków, z czym zawsze uniwersytety sobie jakoś radziły, ale o powszechniejszym od początków wieku XIX kształceniu inżynierów cywilnych i wojskowych, nauczycieli itp.

Tak więc kolejnym interesującym nas okresem jest wiek XIX. Po okresie ogromnego, żywiołowego rozwoju matematyki i metod matematycznych w przyrodoznawstwie, jest to czas porządkowania i uzupełniania luk w nowopowstałej wiedzy. W naturalny sposób czas taki sprzyja refleksji nad nauczaniem. Równocześnie jest to okres wprowadzania powszechnej oświaty (jak w wielu sprawach, i w tej Rewolucja Francuska wyraziła dążenie swej epoki, ale kto inny wprowadził jej hasło w życie) oraz rozwoju szkół wyższych typu politechnicznego oraz reformowania starych i powstawania nowych uniwersytetów. W tym upowszechnianym nauczaniu matematyka odgrywała znaczną rolę, zwłaszcza w zreformowanym przez Napoleona szkolnictwie francuskim (u podstaw tej roli leżały z pewnością także znaczne usługi oddane Rewolucji a potem Cesarstwu przez wybitnych ówczesnych matematyków). Przyszli artylerzyści i budowniczowie otrzymywali w Ecole Polytechnique bardzo solidne wykształcenie matematyczne.

Pisze o tym L.Young w książce *Mathematicians and their Times*. North Holland 1981.

Studenci takich szkół wyższych jak właśnie Ecole Polytechnique czy Uniwersytet Berliński mieli znowu okazję otrzymywać na wykładach znaczne dawki „gorącej", świeżo powstałej – czy wręcz powstającej na ich oczach – matematyki. Co więcej, można powiedzieć, że właśnie potrzeby nauczania wymusiły w pewnym stopniu postęp matematyki w pewnym kierunku – tzw. rygoryzację analizy.

*Cours d'Analyse* Cauchy'ego – to podręcznik, jakiego napisanie należało do jego obowiązków profesorskich, ale to równocześnie dzieło naukowe przynoszące istotny postęp wiedzy matematycznej. Podobnie większość wyników Weierstrassa została przez niego po raz pierwszy przedstawiona na jego wykładach na Uniwersytecie Berlińskim (a szerzej znane stały się dzięki publikowanym notatkom słuchaczy tych wykładów) i inspiracja dydaktyczna jego prac z analizy jest wyraźnie widoczna.

Więcej informacji na ten temat można znaleźć m.in. we wspomnianej książce Younga, a także w artykułach J.Mioduszewskiego i A.Wojciechowskiej w tomie „II Szkoła Historii Matematyki". Szczecin 1986 (w druku).

Widać więc, że w omawianym okresie zaistniały znowu warunki sprzyjające bliskiemu związkowi nauki z nauczaniem: w centrum matematyki znalazła się dziedzina młoda, zyskująca swój dojrzały kształt niemal na oczach studiujących. Powstały też fundamentalne dzieła łączące walory naukowej syntezy i podręcznika dla studentów.

3. Dalszy rozwój analizy postępował zbyt szybko i znów prowadził do oderwania jej od nauczania, nawet uniwersyteckiego. W początku wieku XX luka między matematyką nauczaną a uprawianą jest już znowu ogromna. Poszczególne uniwersytety radzą sobie z tym problemem, każdy na swój sposób wyważając proporcje między masowością a elitarnością kształcenia. Natomiast rozwiązań globalnych domaga się nauczanie matematyki na poziomie średnim, gdzie opóźnienie jest zwielokrotnione ponad miarę.

Dokładniej omawiam je w pracy *Change and failure of mathematics curricula*. Preprint 65 Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Wrocławskiego. Wrocław 1986.

Wiek XX przynosi dwie fale reform mających na celu zwalczenie tego opóźnienia, których przebieg omówimy tu skrótowo.

Reformom tym patronowali matematycy zaniepokojeni poziomem powszechnego kształcenia matematycznego. Najwybitniejszym z nich jest Felix Klein. Klein za jedno z głównych zadań uniwersytetu uważał kształcenie nauczycieli szkół średnich. Porównywanie wiedzy przekazywanej im na uczelni z tym czego sami mieli później nauczać dawało obraz przepaści między matematyką „szkolną" a „wyższą" – której daleko jeszcze było do matematyki wówczas tworzonej. Dostrzeżenie tej przepaści skłoniło Kleina do zaangażowania się w reformę nauczania matematyki w szkołach średnich. Celem jej było przybliżenie uczniom istoty aktualnie rozwijającej się matematyki, a także ukazanie jej zastosowań. Prowadzić miało do tego m.in. wyeksponowanie w nauczaniu pojęcia funkcji. Argumentacja Kleina przysporzyła sprawie reformy wielu zwolenników i w efekcie ich działalności w roku 1905 w Meranie na zjeździe Niemieckiego Towarzystwa Lekarzy i Przyrodników zostały uchwalone tezy dotyczące nauczania matematyki, znane jako Program Mereński. Zapoczątkowało to zmiany programów nauczania w całej Europie.

Bliższe informacje o Programie Mereńskim podaje K.Wuczyńska w artykule *Wybrane problemy nauczania matematyki w szkołach średnich na początku Drugiej Rzeczypospolitej*. Dydaktyka Matematyki 2. 1982. str. 83-142.

4. Jednakże celów reformy nie udało się osiągnąć. Matematyka nie dawała się dogonić nauczaniu; nawet przybliżenie okazało się bardzo iluzoryczne. Przepaść pogłębiona została przez fakt, iż oświatę europejską nękał kryzys ekonomiczny i niszczyły dwie kolejne wojny – a na matematyce czynniki te odbiły się niekorzystnie w znacznie mniejszym stopniu (niektóre jej działy rozwijały się nawet szybciej, w związku z potrzebami wojskowymi). W efekcie w roku 1959 Jean Dieudonné miał pełne podstawy do odczuwania takiego samego zaniepokojenia jak Klein 60 lat wcześniej i wychodząc z podobnych założeń wzywał do reformy nauczania matematyki. Gdzie indziej jednak widział on już istotę matematyki i jako centralne pojęcia dla nowoczesnego jej nauczania proponował pojęcia zbioru, grupy, przestrzeni – ogólnie mówiąc – struktury. Działająca pod pseudonimem Nicolas Bourbaki grupa matematyków francuskich, której jednym z ideologów i aktywnych uczestników był Dieudonné, podjęła wysiłek przedstawienia w cyklu książek zarysu całej matematyki współczesnej, a kluczem do porządkowania tej całości miało być właśnie pojęcie struktury. Tytuł całego cyklu – *Elements des mathematiques* – świadomie nawiązywał do Euklidesa (o którego ostateczne wyrzucenie ze szkoły walczył Dieudonné), a całe to dzieło miało być w zamiarze autorów wielką syntezą i podstawą kształcenia kolejnych pokoleń matematyków. Jednocześnie idee Bourbakiego zyskały sobie zwolenników wśród dydaktyków i zaczął się okres radykalnych reform nauczania matematyki w szkołach podstawowych i średnich. Dziedziną, która miała umożliwić uczniom „złapanie kontaktu" z żywą, rozwijającą się matematyką, była teoria mnogości. Dziedzina młoda, położona centralnie w matematyce (takie miejsce przyznał jej Bourbaki) i porządkująca jej podstawy, już niedługo po zyskaniu miejsca w wykładach uniwersyteckich przeniknęła do nauczania w szkołach średnich i nawet podstawowych. Jednakże nawet ta, wyjątkowo przecież szybka, reakcja oświaty na nowe prądy w matematyce, okazała się nieudana. Gdy mnogościowe, podporządkowane logice widzenie matematyki za pośrednictwem Bourbakiego i dydaktyków dotarło do szkół, sytuacja w samej matematyce była już inna. Z jednej strony, teoria mnogości doszła do pojęć bardzo abstrakcyjnych i wyników i metod bardzo technicznie skomplikowanych, nie nadających się do popularyzacji. Z drugiej strony – co chyba bardziej istotne – chociaż pojęcie zbioru leży rzeczywiście u podstaw prawie wszystkich pojęć matematycznych, abstrakcyjna teoria mnogości okazała się być usytuowana w matematyce znacznie mniej centralnie niż mogło się wydawać u początków jej rozwoju (dalej od zastosowań, bliżej filozofii ...). Praca Bourbakiego, która nadawała reformom w nauczaniu matematyki ten nienajwłaściwszy kierunek, sama też pozostała nie ukończona – i inaczej być nie mogło. Powstało wiele tomów zaplanowanego cyklu, niektóre z nich są świetnymi książkami matematycznymi, ale objęcie całości matematyki okazało się niewykonalne, a przyjęty klucz do jej porządkowania – nieskuteczny wobec nowych nowych tendencji w jej rozwoju. Matematyka zmieniła znowu swe oblicze, powstały nowe teorie, nacisk przesunął się w stronę „twardej" analizy, zbiory i struktury znalazły się na marginesie, a logika zbliżyła się do informatyki. Wprowadzenie do nauczania dzieci pojęć mnogościowych, które w opinii części dydaktyków stanowić miało miarę nowoczesności nauczania, nastąpiło już po wypchnięciu tych pojęć z głównego nurtu matematyki.

Ilustrują to podobieństwo cytaty z wypowiedzi obu matematyków, które przytaczam w pracy *Change ...*.

N.Bourbaki, *L'Architecture des Mathematiques*, Cahiers du Sud, 1948, str.35-47, przekl. ros. w N.Bourbaki, *Oczerki po istorii matiematyki*, Moskwa 1963.

Zestawienie Bourbakiego z Euklidesem (niekorzystne dla każdego z nich) znaleźć można w artykule E.C.Zeemana *Badania ongiś i dziś*, Wiadomości Matematyczne 24, 1982, str.23-46.

W Polsce w uniwersyteckim kursie matematyki obejmujący tę problematykę wykład dla i roku "Wstęp do matematyki" wprowadzono w latach 60-tych. Już w latach 70-tych zagadnienia tej dziedziny znalazły się w programie planowanej wówczas 10-letniej szkoły powszechnej, a później przeszły do kolejnych programów nauczania (systematycznie zmniejszane przy kolejnych zmianach programów).

Patrz np. L.Henkin, *Matematyczne podstawy matematyki*, Wiadomości Matematyczne 18, 1974, str. 55-80.

5. Widać z tego szkicu jak trudne jest zreformowanie nauczania pod hasłem ukazania uczniom żywej, aktualnie uprawianej matematyki. Zanim udało się oświatę skierować na nowe tory, okazało się, że twórcy matematyki już gdzie indziej widzą istotę i inaczej rozumieć trzeba hasło „matematyka żywa" – i pogoń nauczania za nauką może się zacząć znowu, tyle że w nieco innym kierunku. Luka między „żywą" a „szkolną" matematyką powiększa się, a nauczanie matematyki znajduje się w stanie permanentnego kryzysu właśnie od czasu, w którym podjęto ów „pościg".

Wyrazem tego jest rosnąca ilość bijących na alarm artykułów w prasie mówiących o stresach spowodowanych nauczaniem matematyki w szkole.

Wyjście z tego kryzysu nie będzie możliwe bez zmiany celów przyświecających reformom programowym. Właściwe nauce i nauczaniu tempa rozwoju (czy też zmian) są tak różne, że próby bezpośredniego powiązania jednego z drugim muszą powodować wzrastające napięcie i prowadzić do kryzysów.

Aby uzasadnić to stwierdzenie, prześledźmy schematyczny przebieg reform w czasie.

Patrz L.A.Steen. *Matematyka dzisiaj*. w tomie „Matematyka współczesna – dwanaście esejów". Warszawa WNT. 1983.

Nowe idee i całe teorie powodujące przemieszczanie się środka ciężkości w samej matematyce, powstawać mogą dość szybko. Dłuższego czasu wymaga już ich upowszechnienie wśród elity twórczych matematyków, a następnie szerszych ich kręgów. W następnej kolejności nowe idee podchwytują ideolodzy matematyki, propagatorzy, popularyzatorzy (wciąż mowa tu o działalności w obrębie grupy ludzi z wykształceniem matematycznym). Od nich z kolei idee te mogą być przejęte przez dydaktyków, którzy rozpoczynają pracę nad przetłumaczeniem ich na język nauczania. (Czasem te wymienione wyżej role pełnią te same osoby w różnych okresach czy na różnych obszarach swej działalności. Dobrymi przykładami takich osób mogą być Poincaré i Klein, a w nowszych czasach Polya, Freudenthal czy van der Waerden.)

Popularyzujące matematykę wśród matematyków czasopisma jak Mathematical Intelligencer czy nasze Wiadomości Matematyczne mają oczywiście opóźnienie w stosunku do pism specjalistycznych, których druk też trwa dość długo.

Ten cały proces wymaga czasu, choć trudno jest ten czas oszacować. Łatwiej o oszacowanie dalszej części procesu. Propozycje nowych programów nauczania bywają dyskutowane przez różne gremia i przekształcane, powinny być wypróbowywane w nauczaniu eksperymentalnym, przechodzą przez biurokratyczną procedurę zatwierdzania.Potem można przystąpić do opracowywania podręczników. Cykl ich produkcji – od rozpoczęcia pisania do wypuszczenia nakładu trwa ok. 5 lat (tak jest przy dotychczasowej „gutenbergowskiej" technice – komputery pomogą tu coś skrócić, ale „ludzka" część pracy pozostanie bez większych zmian). Również około 5 lat trwa kształcenie nowych nauczycieli, a na dokształcanie już czynnych w związku ze zmianą programów i ich przystosowanie się do pracy z nowymi podręcznikami też trzeba liczyć kilka lat. Nowy program jest „przyswojony" przez nauczyciela dopiero po przejściu z przynajmniej jedną klasą całego kursu – w naszej oświacie jest to 5 lat w szkole podstawowej (kl.IV-VIII), a 4 lata w liceum. Tak więc jeśli w centrum matematyki pojawi się jakaś nowa, bardzo ważna i interesująca teoria, to fakt ten może znaleźć swe odbicie w nauczaniu poniżej poziomu uniwersyteckiego nie wcześniej niż po kilkunastu latach. Wiadomo, jak wiele przez te kilkanaście lat może się zmienić w matematyce. Widać stąd wyraźnie, że hasło Kleina i Bourbakiego – zbliżenia nauczania do rozwijającej się aktualnie matematyki jest praktycznie nie do spełnienia – zanim zaczniemy uczyć w szkole, „żywa" matematyka stanie się „martwą". Stawia to pod znakiem zapytania sens używania pojęcia „żywej" matematyki w kontekście nauczania. Odnaleźć i przekazywać przyszłym pokoleniom należy raczej to, co najważniejsze w całej – dawnej i obecnej – matematyce, co stanowi o jej jedności i tożsamości przez stulecia – a więc nie istotę obecnie uprawianej matematyki, ale ponadczasową istotę matematyki jako całości.

Kategorię „żywej" matematyki wprowadził E.I.Bell w książce *Dewelopment of Mathematics*. New York McGraw- Hill 1945.

Porównując zaś czas trwałości różnych dzieł widzimy, że najbliższy określenia tej istoty był Euklides (w tym fakcie tkwi racjonalne jądro powtarzanego ostatnio w krajach anglosaskich hasła „Back to Euclid" jako reakcji na nieudane reformy nauczania).

Widać z powyższego, że szczęśliwe okresy pewnej zgodności nauki z nauczaniem w matematyce są czymś raczej wyjątkowym – są to czasy porządkowania narośniętej wcześniej wiedzy i powstawania wielkich syntez. Przemiany w nauczaniu dokonane w tych okresach nie zapewniają mu jednak „dotrzymywania kroku" w latach następnych. Istnienie tych okresów nie powinno nam przesłaniać faktu, że – ogólnie biorąc – nauczanie matematyki „żywej" nie jest możliwe i pora na sformułowanie bardziej realnych postulatów ze strony matematyki pod adresem oświaty. Bez odpowiedniego przewartościowania ogólnych celów matematyki, edukacja matematyczna będzie w stanie nieustającej „zadyszki", kryzysy będą się pogłębiać, a matematyka będzie zmorą dla coraz większej liczby młodzieży.