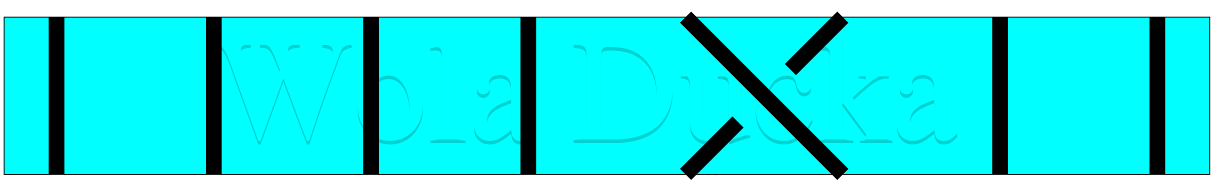
Warkocze
i reprezentacja Burau

27 stycznia, 2017, 9:43

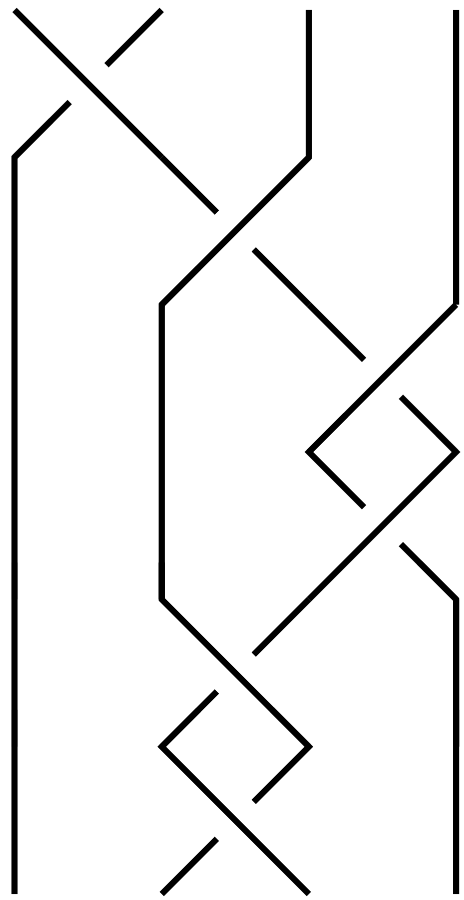
Grupa warkoczy B_n może być zdefiniowana za pomocą generatorów i relacji tak:

$$\begin{aligned} B_n = \langle \sigma_1, \ldots \sigma_{n-1} : \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, |i-j| > 1 \rangle \end{aligned}$$

Ale można też patrzeć na to bardziej geometrycznie. Na przykład, że to są takie obrazki jak na następnej stronie, z dokładnością do deformacji i z mnożeniem poprzez postawienie jednego nad drugim.



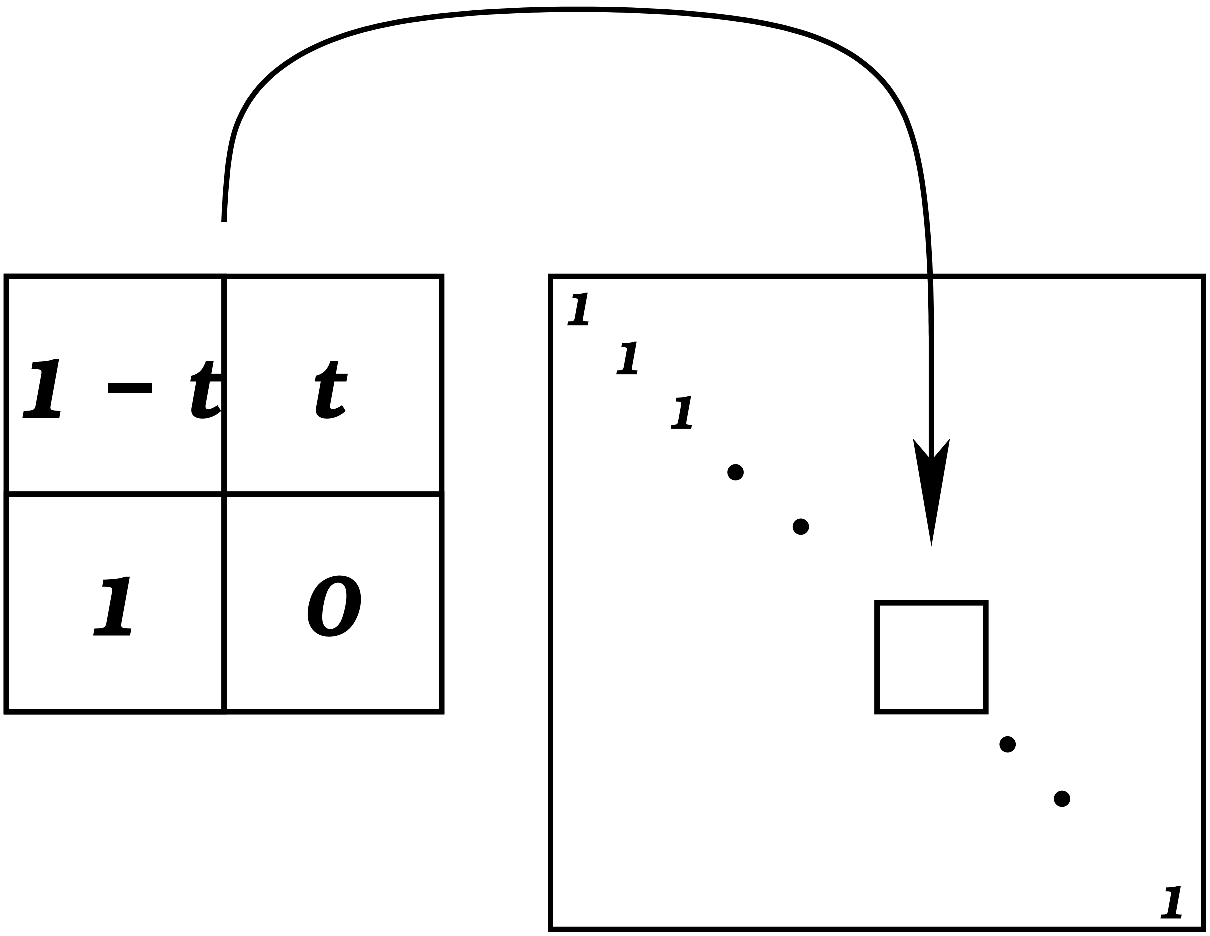
rysunek wola ducka 0



rysunek wola ducka 1

Albo w sposób trochę mniej sztywny: że jest n punktów na płaszczyźnie $z = 0$ i drugie n punktów na płaszczyźnie $z = 1$, dokładnie nad tamtymi i one są połączone w sposób monotoniczny sznurkami, a wszstko to z dokładością do odpowiednio rozumianej deformacji.

Reprezentacja Burau to jest homomorfizm, który przypisuje generatorowi σ_i na macierz pokazaną niżej.



rysunek wola ducka 2

Osoba bardzo podejrzliwa mogłaby zauważyć, że wymiary macierzy nie bardzo się zgadzają z tymi macierzami, co to mają być algebraicznie niezależne. Faktycznie, mowa tu jest o wariancie reprezentacji Burau, łatwym w opisie, ale kiepskim pod różnymi innymi względami.

Jest to wynalazek sprzed może 80 lat. Przez długi czas uważano za prawdopodobne, że reprezentacja Burau jest wierna, to znaczy że ten homomorfizm jest różnowartościowy. Obecnie tylko dla $n = 4$ problem pozostaje nieroztrzygnięty. Dla $n = 1, 2, 3$ reprezentacja jest wierna, a dla $n \geq 5$ nie jest wierna.
Historia problemu jest taka:

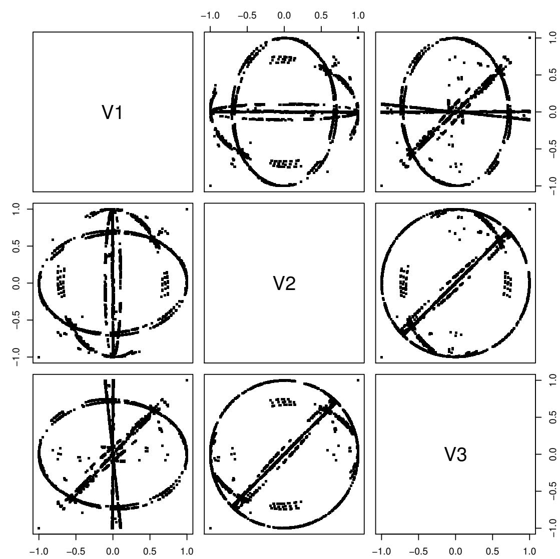
1. **Stephen Bigelow.** The Burau representation is not faithful for $n = 5$. *Geom. Topol.* 3 (1999), 397-404

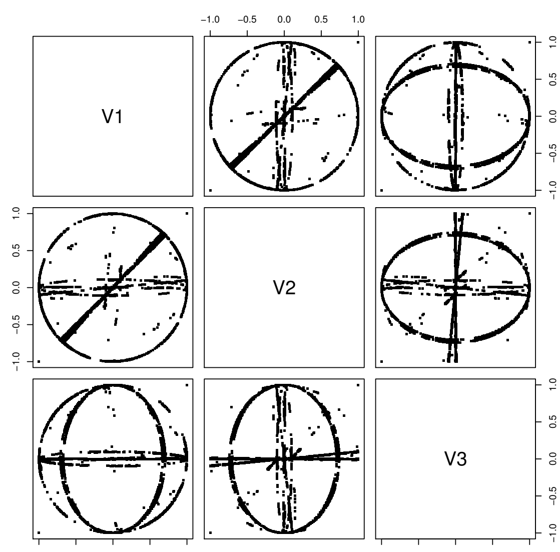
2. **D. D.Long and M. Paton.** The Burau representation is not faithful for $n \geq 6$. *Topology* **32** (1993), no. 2, 439—447

3. **John Atwell Moody.** The Burau representation of the braid group B_n is unfaithful for large n. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **25** (1991) no. 2, 379–384

Może teraz jest dobry moment na słówko o tym, skąd się wzięły tamte macierze A i B. Otóż to są obrazy pewnych szczególnych elementów grupy B_4, które generują w B_4 podgrupę wolną, a w dodatku wiadomo, że kandydatury do jądra reprezentacji Burau mieszczą się w tej grupie. Co to za elementy? Proszę bardzo: jeden to $\sigma_1\sigma_3$, a drugi to $\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_2^{-1}$. A te macierze A i B to ich obrazy przy tak zwanej zredukowanej reprezentacji Burau.

Ale wróćmy do lematu o ping-pongu. Poniżej przedstawiam dwa obrazki:





Krótkie wyjaśnienie. Te obrazki wzięły się stąd, że program generował nieskracalne wyrazy utworzone z liter A, A^{-1}, B, B^{-1}, liczył iloczyn, a następnie obraz wektora $(1, 0, 0)$ przy otrzymanym przekaształceniu liniowym. Ale jest szczegół: to jest troszeczkę sprojektywizowane, to znaczy te obrazy są normalizowane (dzielone przez długość). No i teraz główne rozróżnienie: na górnym rysunku są obrazy otrzymane gdy ostatnia zastosowana macierz to jest A lub A^{-1}, a na dolnym rysunku to samo dla B lub B^{-1}. Te obrazki są całkiem różne i gdyby ktoś zamiast być podejrzliwy był akurat wielkim entuzjastą, to mógłby łatwo uwierzyć, że dowód wierności reprezentacji Burau jest tuż-tuż. Bo wygląda to tak, jak gdyby działał lemat o ping-pongu w klasycznej postaci. Ale jest w rzeczywistości jeszcze dużo pracy i czyhające pułapki.