Warkocze i macierze algebraicznie niezależne

27 stycznia 2017, 9:10

Zacznę od tak zwanego lematu o ping-pongu. Ten lemat zasługuje na dużą większą popularność niż ta, której faktycznie doświadcza. W zasadzie w swojej najprostszej postaci należy on do przedmiotu algebra 1.

Lemma 0.1. *Niech G będzie grupą. Załóżmy, że mamy dwie podgrupy $H, K \leq G$. Niech będzie dane działanie G na zbiorze X. Niech*

$$\emptyset \neq X_1, X_2 \subset X, \ X_1 \cap X_2 = \emptyset.$$

Zakładamy jeszcze, z marginalnych powodów technicznych, że co najmniej jedna z grup H_1, H_2 nie jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_2$. I najważniejsze założenie, któremu lemat zawdzięcza swoją nazwę: Dla $1 \neq h \in H$ zachodzi $h(X_1) \subseteq X_2$ a dla $1 \neq k \in K$ zachodzi $k(X_2) \subseteq X_1$. Wówczas podgrupa $\langle H, K\rangle$ jest produktem wolnym grup. H i K.

Dla wyjaśnienia:
Działanie grupy na zbiorze to jest nic innego, jak homomorfizm ϕ z tej grupy w grupe bijekcji tego zbioru. W terminach mniej oficjalnych, mówimy, że wynikiem działania elementu g grupy G na element x zbioru X jest $\phi(g)(x)$ albo prościej $\phi_g(x)$ albo jeszcze prościej $g(x)$.
A co do produktu wolnego dwóch podgrup, to to również można sformułować w bardzo przyziemny sposób. To po prostu znaczy, że jeżeli będziemy mnożyć na zmianę nietrywialne elementy z jednej i z drugiej grupy, to nigdy nie wyjdzie element neutralny.

Dowód. Przypuśćmy, że jednak można zapisać identyczność na zbiorze X jako złożenie $h_1 k_1 \cdots k_n h_{n+1}$. To prowadzi natychmiast do sprzeczności, bo takie złożenie nieuchronnie przeprowadza zbiór X_1 w zbiór X_2, a takie coś na pewno nie jest identycznością zbioru X.

Jest tylko jeden problem: skąd ja wiedziałem, że akurat takie wraże złożenie, jeżeli istnieje w ogóle, to znajdzie się i takie, co ma taką szczególną postać (to, co w niej jest szczególnego, to tylko i wyłącznie to, że iloczyn zaczyna się i kończy od czegoś wziętego z podgrupy H)? Ale tu nie ma żadnego oszustwa, to wynika z naszego założenia o $\mathbb{Z}_2$: zawsze zdołamy dany przykład *jakiś* przerobić na *taki, jak chcemy* sprzęgając przez odpowiedni element z podgrupy H. Założenie o $\mathbb{Z}_2$ jest potrzebne tylko po to, żebyśmy poprawiając sytuację z jednego końca nie zepsuli jej z drugiego końca.

To jest bardzo prosta wersja lematu o ping-pongu. Od razu widać na przykład, że wystarczy zakładać, że $X_1 \neq X_2$, pewnie za cenę założenia, że żadna z dwóch podgrup nie jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_2$.

Skrajny przypadek lematu o ping-pongu jest taki, że być może mamy po prostu dwie bijekcje h i k zbioru X, które są może nieskończonego rzędu i może ich wszystkie potęgi zachowują się w sposób przewidziany w lemacie, to znaczy $h^m, m \neq 0$, przebija piłeczkę z X_1 do X_2 i na odwrót. Lemat orzeka wówczas, że $\langle h, k \rangle = F(2)$ – jest po prostu grupą wolną o generatorach h i k.

Istnieje spektakularny przykład użycia lematu w ten sposób do udowodnienia, że w $SL(2, \mathbb{Z}_2)$ istnieje podgrupa izomorficzna z $F(2)$.

Bardzo prosty inny przykład użycia lematu jest taki

mamy dwie macierze kwadratowe A i B, wymiaru 3. Obydwie mają jako wartości własne: jedynkę, po jednej wartości własnej małej i jednej dużej (co do modułu). W dodatku zakładamy, że wektory własne są możliwie mocno liniowo niezależne. Wówczas dla odpowiednio dużego m macierze A^m i B^m są algebraicznie niezależne, czyli podgrupa $\langle A, B \rangle$ jest wolna.

To wszystko pięknie, ale teraz gwałtownie przyśpieszymy od klasycznych i dobrze znanych zastosowań leamtu o ping-pongu do otwartego problemu współczesnej matematyki, do którego lemat może się da zastosować, a może i nie. Proszę Państwa, przechodzimy do zagadnienia wierności reprezentacji Burau grupy warkoczy, dla $n = 4$.
Zacznę od sformułowania problemu w sposób odczyszczony z całego kontekstu. Rozpatrzmy następujące dwie macierze kwadratowe wymiaru 3 (od razu podaję też macierze odwrotne):

$$A = \begin{bmatrix} -t^{-1}+1 & 0 & -1 \\ -t^{-1}+t & -t & 0 \\ -t^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -t \\ 0 & -t^{-1} & -t+t^{-1} \\ -1 & 0 & -t+1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t^{-1} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -t^{-1} & t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & -t \end{bmatrix}$$

Pytanie, czy te dwie macierze, X i Y są algebraicznie niezależne jest równoważne pytaniu, czy reprezentacja Burau jest wierna dla $n = 4$.