

Wybieraj: na życie albo na dożycie

55 Szkoła Matematyki Poglądowej

Mariusz Skałba

Wydział Matematyki, Uniwersytet Warszawski

28 stycznia 2017

Polisa terminowa może być:

- 1 n -letnia na życie,
- 2 n -letnia na dożycie,
- 3 n -letnia na życie i dożycie.

Polisa terminowa może być:

- 1 n -letnia na życie,
- 2 n -letnia na dożycie,
- 3 n -letnia na życie i dożycie.

Innych polis nie będę rozpatrywał.

Na czym polega...1

ubezpieczenie n -letnie na życie?

Na czym polega...1

ubezpieczenie n -letnie na życie? W chwili zakupu polisy za jednorazową składkę ubezpieczony ma x lat.

Na czym polega...1

ubezpieczenie n -letnie na życie? W chwili zakupu polisy za jednorazową składkę ubezpieczony ma x lat. Jeśli umrze w ciągu najbliższych n lat uposażeni otrzymają 1 na koniec roku śmierci.

Na czym polega...1

ubezpieczenie n -letnie na życie? W chwili zakupu polisy za jednorazową składkę ubezpieczony ma x lat. Jeśli umrze w ciągu najbliższych n lat uposażeni otrzymają 1 na koniec roku śmierci. Jak obliczyć składkę jednorazową netto za to ubezpieczenie?

Na czym polega...1

ubezpieczenie n -letnie na życie? W chwili zakupu polisy za jednorazową składkę ubezpieczony ma x lat. Jeśli umrze w ciągu najbliższych n lat uposażeni otrzymają 1 na koniec roku śmierci. Jak obliczyć składkę jednorazową netto za to ubezpieczenie? Potrzebne są podstawowe oznaczenia z demografii i finansów.

Na czym polega...1

ubezpieczenie n -letnie na życie? W chwili zakupu polisy za jednorazową składkę ubezpieczony ma x lat. Jeśli umrze w ciągu najbliższych n lat uposażeni otrzymają 1 na koniec roku śmierci. Jak obliczyć składkę jednorazową netto za to ubezpieczenie? Potrzebne są podstawowe oznaczenia z demografii i finansów. Niech $T(x)$ oznacza długość dalszego życia (x) aż do śmierci,

Na czym polega...1

ubezpieczenie n -letnie na życie? W chwili zakupu polisy za jednorazową składkę ubezpieczony ma x lat. Jeśli umrze w ciągu najbliższych n lat uposażeni otrzymają 1 na koniec roku śmierci. Jak obliczyć składkę jednorazową netto za to ubezpieczenie? Potrzebne są podstawowe oznaczenia z demografii i finansów. Niech $T(x)$ oznacza długość dalszego życia (x) aż do śmierci, a $K(x)$ pełną liczbę lat jaką przeżyje (x) aż do śmierci.

Na czym polega...1

ubezpieczenie n -letnie na życie? W chwili zakupu polisy za jednorazową składkę ubezpieczony ma x lat. Jeśli umrze w ciągu najbliższych n lat uposażeni otrzymają 1 na koniec roku śmierci. Jak obliczyć składkę jednorazową netto za to ubezpieczenie? Potrzebne są podstawowe oznaczenia z demografii i finansów. Niech $T(x)$ oznacza długość dalszego życia (x) aż do śmierci, a $K(x)$ pełną liczbę lat jaką przeżyje (x) aż do śmierci. Tak więc $K(x) = \lfloor T(x) \rfloor$.

Na czym polega...1

ubezpieczenie n -letnie na życie? W chwili zakupu polisy za jednorazową składkę ubezpieczony ma x lat. Jeśli umrze w ciągu najbliższych n lat uposażeni otrzymają 1 na koniec roku śmierci. Jak obliczyć składkę jednorazową netto za to ubezpieczenie? Potrzebne są podstawowe oznaczenia z demografii i finansów. Niech $T(x)$ oznacza długość dalszego życia (x) aż do śmierci, a $K(x)$ pełną liczbę lat jaką przeżyje (x) aż do śmierci. Tak więc $K(x) = \lfloor T(x) \rfloor$. Ponadto możemy powiedzieć, że 1 jest płacone uposażonym dokładnie po $K(x) + 1$ latach.

Na czym polega...1

ubezpieczenie n -letnie na życie? W chwili zakupu polisy za jednorazową składkę ubezpieczony ma x lat. Jeśli umrze w ciągu najbliższych n lat uposażeni otrzymają 1 na koniec roku śmierci. Jak obliczyć składkę jednorazową netto za to ubezpieczenie? Potrzebne są podstawowe oznaczenia z demografii i finansów. Niech $T(x)$ oznacza długość dalszego życia (x) aż do śmierci, a $K(x)$ pełną liczbę lat jaką przeżyje (x) aż do śmierci. Tak więc $K(x) = \lfloor T(x) \rfloor$. Ponadto możemy powiedzieć, że 1 jest płacone uposażonym dokładnie po $K(x) + 1$ latach. Niech $i > 0$ będzie ustaloną techniczną stopą oprocentowania.

Na czym polega...1

ubezpieczenie n -letnie na życie? W chwili zakupu polisy za jednorazową składkę ubezpieczony ma x lat. Jeśli umrze w ciągu najbliższych n lat uposażeni otrzymają 1 na koniec roku śmierci. Jak obliczyć składkę jednorazową netto za to ubezpieczenie? Potrzebne są podstawowe oznaczenia z demografii i finansów. Niech $T(x)$ oznacza długość dalszego życia (x) aż do śmierci, a $K(x)$ pełną liczbę lat jaką przeżyje (x) aż do śmierci. Tak więc $K(x) = \lfloor T(x) \rfloor$. Ponadto możemy powiedzieć, że 1 jest płacone uposażonym dokładnie po $K(x) + 1$ latach. Niech $i > 0$ będzie ustaloną techniczną stopą oprocentowania. Jeśli Z oznacza *wartość obecną* świadczenia 1 na moment wystawienia polisy to

$$Z = \left(\frac{1}{1+i} \right)^{K(x)+1}$$

Na czym polega...1

ubezpieczenie n -letnie na życie? W chwili zakupu polisy za jednorazową składkę ubezpieczony ma x lat. Jeśli umrze w ciągu najbliższych n lat uposażeni otrzymają 1 na koniec roku śmierci. Jak obliczyć składkę jednorazową netto za to ubezpieczenie? Potrzebne są podstawowe oznaczenia z demografii i finansów. Niech $T(x)$ oznacza długość dalszego życia (x) aż do śmierci, a $K(x)$ pełną liczbę lat jaką przeżyje (x) aż do śmierci. Tak więc $K(x) = \lfloor T(x) \rfloor$. Ponadto możemy powiedzieć, że 1 jest płacone uposażonym dokładnie po $K(x) + 1$ latach. Niech $i > 0$ będzie ustaloną techniczną stopą oprocentowania. Jeśli Z oznacza *wartość obecną* świadczenia 1 na moment wystawienia polisy to

$$Z = \left(\frac{1}{1+i} \right)^{K(x)+1} ?$$

Nie jest to do końca prawda. Prawdziwy wzór na PV świadczenia to

$$Z_1 = \begin{cases} v^{K+1} & \text{dla } K < n, \\ 0 & \text{dla } K \geq n. \end{cases}$$

Nie jest to do końca prawda. Prawdziwy wzór na PV świadczenia to

$$Z_1 = \begin{cases} v^{K+1} & \text{dla } K < n, \\ 0 & \text{dla } K \geq n. \end{cases}$$

(użyliśmy oznaczenia $v := 1/(1+i)$ i skrótu $K := K(x)$.)

Nie jest to do końca prawda. Prawdziwy wzór na PV świadczenia to

$$Z_1 = \begin{cases} v^{K+1} & \text{dla } K < n, \\ 0 & \text{dla } K \geq n. \end{cases}$$

(użyliśmy oznaczenia $v := 1/(1+i)$ i skrótu $K := K(x)$.)

Składkę netto definiujemy jako wartość oczekiwaną zmiennej losowej Z :

$$A_{x:\bar{n}|}^1 = E(Z_1) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \Pr(K = k).$$

W ubezpieczeniu n -letnim na dożycie dla (x) świadczenie 1 jest wypłacane tylko po dożyciu przez ubezpieczonego wieku $x + n$.

W ubezpieczeniu n -letnim na dożycie dla (x) świadczenie 1 jest wypłacane tylko po dożyciu przez ubezpieczonego wieku $x + n$. Tym razem PV świadczenia wyraża się wzorem

$$Z_2 = \begin{cases} 0 & \text{dla } K < n, \\ v^n & \text{dla } K \geq n. \end{cases}$$

W ubezpieczeniu n -letnim na dożycie dla (x) świadczenie 1 jest wypłacane tylko po dożyciu przez ubezpieczonego wieku $x + n$. Tym razem PV świadczenia wyraża się wzorem

$$Z_2 = \begin{cases} 0 & \text{dla } K < n, \\ v^n & \text{dla } K \geq n. \end{cases}$$

a składka jednorazowa netto wzorem

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = E(Z_2) = v^n \cdot \Pr(K \geq n).$$

Na czym polega...3

W ubezpieczeniu n -letnim na życie i dożycie dla (x) świadczenie 1 jest wypłacane w obu przypadkach:

Na czym polega...3

W ubezpieczeniu n -letnim na życie i dożycie dla (x) świadczenie 1 jest wypłacane w obu przypadkach: po dożyciu przez ubezpieczonego wieku $x + n$ albo

Na czym polega...3

W ubezpieczeniu n -letnim na życie i dożycie dla (x) świadczenie 1 jest wypłacane w obu przypadkach: po dożyciu przez ubezpieczonego wieku $x + n$ albo na koniec roku śmierci, jeśli umrze wcześniej.

Na czym polega...3

W ubezpieczeniu n -letnim na życie i dożycie dla (x) świadczenie 1 jest wypłacane w obu przypadkach: po dożyciu przez ubezpieczonego wieku $x + n$ albo na koniec roku śmierci, jeśli umrze wcześniej.

PV świadczenia wyraża się wzorem

$$Z_3 = \begin{cases} v^{K+1} & \text{dla } K < n, \\ v^n & \text{dla } K \geq n. \end{cases}$$

Na czym polega...3

W ubezpieczeniu n -letnim na życie i dożycie dla (x) świadczenie 1 jest wypłacane w obu przypadkach: po dożyciu przez ubezpieczonego wieku $x + n$ albo na koniec roku śmierci, jeśli umrze wcześniej.

PV świadczenia wyraża się wzorem

$$Z_3 = \begin{cases} v^{K+1} & \text{dla } K < n, \\ v^n & \text{dla } K \geq n. \end{cases}$$

Tak więc możemy napisać

$$Z_3 = Z_1 + Z_2$$

Na czym polega...3

W ubezpieczeniu n -letnim na życie i dożycie dla (x) świadczenie 1 jest wypłacane w obu przypadkach: po dożyciu przez ubezpieczonego wieku $x + n$ albo na koniec roku śmierci, jeśli umrze wcześniej.

PV świadczenia wyraża się wzorem

$$Z_3 = \begin{cases} v^{K+1} & \text{dla } K < n, \\ v^n & \text{dla } K \geq n. \end{cases}$$

Tak więc możemy napisać

$$Z_3 = Z_1 + Z_2$$

Składka jednorazowa netto wynosi

$$A_{x:\bar{n}|} = E(Z_3) = E(Z_1) + E(Z_2) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \Pr(K = k) \right) + v^n \cdot \Pr(K \geq n)$$

Przykłady dla kobiet i mężczyzn

Poniższe składki obliczono dla $x = 25$, $n = 30$

Przykłady dla kobiet i mężczyzn

Poniższe składki obliczono dla $x = 25$, $n = 30$, ale raz dla kobiet, a drugi raz dla mężczyzn.

Przykłady dla kobiet i mężczyzn

Poniższe składki obliczono dla $x = 25$, $n = 30$, ale raz dla kobiet, a drugi raz dla mężczyzn. Użyto technicznej stopy oprocentowania $i = 5\%$.

Przykłady dla kobiet i mężczyzn

Poniższe składki obliczono dla $x = 25$, $n = 30$, ale raz dla kobiet, a drugi raz dla mężczyzn. Użyto technicznej stopy oprocentowania $i = 5\%$.

Wartości składek dla kobiet

$$A_{25:\overline{30}|}^1 = 0.0218824, \quad A_{25:\overline{30}|}^{\frac{1}{2}} = 0.217754, \quad A_{25:\overline{30}|} = 0.239637.$$

Przykłady dla kobiet i mężczyzn

Poniższe składki obliczono dla $x = 25$, $n = 30$, ale raz dla kobiet, a drugi raz dla mężczyzn. Użyto technicznej stopy oprocentowania $i = 5\%$.

Wartości składek dla kobiet

$$A_{25:\overline{30}|}^1 = 0.0218824, \quad A_{25:\overline{30}|}^{\frac{1}{2}} = 0.217754, \quad A_{25:\overline{30}|} = 0.239637.$$

Wartości składek dla mężczyzn

$$A_{25:\overline{30}|}^1 = 0.0631744, \quad A_{25:\overline{30}|}^{\frac{1}{2}} = 0.193749, \quad A_{25:\overline{30}|} = 0.256923.$$

Ryzyko związane z polisą

Firma ubezpieczeniowa B sprzedała 100 polis 30-letnich na życie wybranym losowo 25-latkom oraz 100 polis na dożycie.

Ryzyko związane z polisą

Firma ubezpieczeniowa B sprzedała 100 polis 30-letnich na życie wybranym losowo 25-latkom oraz 100 polis na dożycie. Natomiast firma C sprzedała 100 polis na życie i dożycie.

Ryzyko związane z polisą

Firma ubezpieczeniowa B sprzedała 100 polis 30-letnich na życie wybranym losowo 25-latkom oraz 100 polis na dożycie. Natomiast firma C sprzedała 100 polis na życie i dożycie. Obie firmy zebrały ten sam wolumen składki.

Ryzyko związane z polisą

Firma ubezpieczeniowa B sprzedała 100 polis 30-letnich na życie wybranym losowo 25-latkom oraz 100 polis na dożycie. Natomiast firma C sprzedała 100 polis na życie i dożycie. Obie firmy zebrały ten sam wolumen składki. Która firma wzięła na siebie większe ryzyko?

Ryzyko związane z polisą

Firma ubezpieczeniowa B sprzedała 100 polis 30-letnich na życie wybranym losowo 25-latkom oraz 100 polis na dożycie.

Natomiast firma C sprzedała 100 polis na życie i dożycie.

Obie firmy zebrały ten sam wolumen składki.

Która firma wzięła na siebie większe ryzyko?

Każdorazowo ryzyko zmierzmy za pomocą wariancji:

Ryzyko firmy B

$$V(B) = 100 \cdot \text{Var}(Z_1) + 100 \cdot \text{Var}(Z_2).$$

Ryzyko związane z polisą

Firma ubezpieczeniowa B sprzedała 100 polis 30-letnich na życie wybranym losowo 25-latkom oraz 100 polis na dożycie.

Natomiast firma C sprzedała 100 polis na życie i dożycie.

Obie firmy zebrały ten sam wolumen składki.

Która firma wzięła na siebie większe ryzyko?

Każdorazowo ryzyko zmierzmy za pomocą wariancji:

Ryzyko firmy B

$$V(B) = 100 \cdot \text{Var}(Z_1) + 100 \cdot \text{Var}(Z_2).$$

Ryzyko firmy C

$$V(C) = 100 \cdot \text{Var}(Z_3).$$

Mamy zatem

$$V(C) = 100 \cdot \text{Var}(Z_3) = 100 \cdot (\text{Var}(Z_1) + \text{Var}(Z_2) + 2\text{Cov}(Z_1, Z_2)).$$

Mamy zatem

$$V(C) = 100 \cdot \text{Var}(Z_3) = 100 \cdot (\text{Var}(Z_1) + \text{Var}(Z_2) + 2\text{Cov}(Z_1, Z_2)).$$

Ale

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) = -E(Z_1)E(Z_2) < 0$$

Mamy zatem

$$V(C) = 100 \cdot \text{Var}(Z_3) = 100 \cdot (\text{Var}(Z_1) + \text{Var}(Z_2) + 2\text{Cov}(Z_1, Z_2)).$$

Ale

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) = -E(Z_1)E(Z_2) < 0$$

Zatem ostatecznie

$$V(C) < 100 \cdot (\text{Var}(Z_1) + \text{Var}(Z_2)) = V(B).$$

Mamy zatem

$$V(C) = 100 \cdot \text{Var}(Z_3) = 100 \cdot (\text{Var}(Z_1) + \text{Var}(Z_2) + 2\text{Cov}(Z_1, Z_2)).$$

Ale

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) = -E(Z_1)E(Z_2) < 0$$

Zatem ostatecznie

$$V(C) < 100 \cdot (\text{Var}(Z_1) + \text{Var}(Z_2)) = V(B).$$

Firma B prowadzi bardziej ryzykowną działalność, niż firma C.

Dziękuję