Kto się boi bardziej, czyli współczynnik Arrowa-Pratta

55 Szkoła Matematyki Poglądowej

Mariusz Skałba

Wydział Matematyki, Uniwersytet Warszawski

27 stycznia 2017

Funkcja użyteczności majątku

Niech $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ bedzie rosnąca i wklęsła (np. $u(w) = \sqrt{w}$).

Funkcja użyteczności majątku

Niech $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ bedzie rosnąca i wklęsła (np. $u(w) = \sqrt{w}$). Jeśli jego początkowy majątek wynosi $w_0 = 1000000$ to ma on użyteczność $u(w_0) = \sqrt{1000000} = 1000$.

Funkcja użyteczności majątku

Niech $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ bedzie rosnąca i wklęsła (np. $u(w) = \sqrt{w}$). Jeśli jego początkowy majątek wynosi $w_0 = 1000000$ to ma on użyteczność $u(w_0) = \sqrt{1000000} = 1000$. Jeśli dodamy mu $d = 210000$ zł to jego poziom satysfakcji wzrośnie do $u(w_0 + d) = u(1210000) = \sqrt{1210000} = 1100$.

Funkcja użyteczności majątku

Niech $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ bedzie rosnąca i wklęsła (np. $u(w) = \sqrt{w}$). Jeśli jego początkowy majątek wynosi $w_0 = 1000000$ to ma on użyteczność $u(w_0) = \sqrt{1000000} = 1000$. Jeśli dodamy mu $d = 210000$ zł to jego poziom satysfakcji wzrośnie do $u(w_0 + d) = u(1210000) = \sqrt{1210000} = 1100$. Jeżeli odejmiemy mu $d = 210000$ zł to użyteczność spadnie do poziomu $u(w_0 - d) = u(790000) = \sqrt{790000} = 888,819$.

Funkcja użyteczności majątku

Niech $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ bedzie rosnąca i wklęsła (np. $u(w) = \sqrt{w}$). Jeśli jego początkowy majątek wynosi $w_0 = 1000000$ to ma on użyteczność $u(w_0) = \sqrt{1000000} = 1000$. Jeśli dodamy mu $d = 210000$ zł to jego poziom satysfakcji wzrośnie do $u(w_0 + d) = u(1210000) = \sqrt{1210000} = 1100$. Jeżeli odejmiemy mu $d = 210000$ zł to użyteczność spadnie do poziomu $u(w_0 - d) = u(790000) = \sqrt{790000} = 888,819$.

awersja

Kara jest bardziej dotkliwa od nominalnie równoważnej nagrody.

A może się ubezpieczyć?

Kiedy kupi ubezpieczenie?

Konsument ma majątek początkowy $w_0 = 1440000$ zł i funkcję użyteczności majątku $u(w) = \sqrt{w}$. Stoi w obliczu grożącej mu straty X o rozkładzie $X = 230000$ zł z prawdopodobieństwem $p = 0,02$ oraz $X = 0$ z prawdopodobieństwem $1 - p = 0,98$. Obliczyć maksymalną akceptowalną przez niego składkę ubezpieczeniową P za pełne ubezpieczenie od tej straty.

A może się ubezpieczyć?

Kiedy kupi ubezpieczenie?

Konsument ma majątek początkowy $w_0 = 1440000$ zł i funkcję użyteczności majątku $u(w) = \sqrt{w}$. Stoi w obliczu grożącej mu straty X o rozkładzie $X = 230000$ zł z prawdopodobieństwem $p = 0,02$ oraz $X = 0$ z prawdopodobieństwem $1 - p = 0,98$. Obliczyć maksymalną akceptowalną przez niego składkę ubezpieczeniową P za pełne ubezpieczenie od tej straty.

Rozwiązanie. Jest to sytuacja wyboru jednej z dwóch loterii:

$$l_{NUB} = 0,02 \circ (1440000 - 230000) \oplus 0,98 \circ (1440000)$$

A może się ubezpieczyć?

Kiedy kupi ubezpieczenie?

Konsument ma majątek początkowy $w_0 = 1440000$ zł i funkcję użyteczności majątku $u(w) = \sqrt{w}$. Stoi w obliczu grożącej mu straty X o rozkładzie $X = 230000$ zł z prawdopodobieństwem $p = 0,02$ oraz $X = 0$ z prawdopodobieństwem $1 - p = 0,98$. Obliczyć maksymalną akceptowalną przez niego składkę ubezpieczeniową P za pełne ubezpieczenie od tej straty.

Rozwiązanie. Jest to sytuacja wyboru jednej z dwóch loterii:

$$l_{NUB} = 0,02 \circ (1440000 - 230000) \oplus 0,98 \circ (1440000)$$

albo

A może się ubezpieczyć?

Kiedy kupi ubezpieczenie?

Konsument ma majątek początkowy $w_0 = 1440000$ zł i funkcję użyteczności majątku $u(w) = \sqrt{w}$. Stoi w obliczu grożącej mu straty X o rozkładzie $X = 230000$ zł z prawdopodobieństwem $p = 0,02$ oraz $X = 0$ z prawdopodobieństwem $1 - p = 0,98$. Obliczyć maksymalną akceptowalną przez niego składkę ubezpieczeniową P za pełne ubezpieczenie od tej straty.

Rozwiązanie. Jest to sytuacja wyboru jednej z dwóch loterii:

$$l_{NUB} = 0,02 \circ (1440000 - 230000) \oplus 0,98 \circ (1440000)$$

albo

$$l_{UB} = 0,02 \circ (1440000 - P - 230000 + 230000) \oplus 0,98 \circ (1440000 - P).$$

Wybór loterii l_{UB} oznacza decyzję o zakupie ubezpieczenia.

c.d.rozwiązania

Wybór loterii l_{UB} oznacza decyzję o zakupie ubezpieczenia. Natomiast wybór loterii l_{NUB} oznacza rezygnację z zakupu ubezpieczenia.

Wybór loterii l_{UB} oznacza decyzję o zakupie ubezpieczenia. Natomiast wybór loterii l_{NUB} oznacza rezygnację z zakupu ubezpieczenia. Nasz bohater kupi ubezpieczenie, gdy

$$\mathbb{E}(u(l_{UB})) > \mathbb{E}(u(l_{NUB})).$$

Wybór loterii l_{UB} oznacza decyzję o zakupie ubezpieczenia. Natomiast wybór loterii l_{NUB} oznacza rezygnację z zakupu ubezpieczenia. Nasz bohater kupi ubezpieczenie, gdy

$$\mathbb{E}(u(l_{UB})) > \mathbb{E}(u(l_{NUB})).$$

Ponieważ

$$\mathbb{E}(u(l_{NUB})) = 0,02\sqrt{1210000} + 0,98\sqrt{1440000} = 1198 \text{ oraz}$$

$$\mathbb{E}(u(l_{UB})) = 1 \cdot \sqrt{1440000 - P},$$

c.d.rozwiązania

Wybór loterii l_{UB} oznacza decyzję o zakupie ubezpieczenia. Natomiast wybór loterii l_{NUB} oznacza rezygnację z zakupu ubezpieczenia. Nasz bohater kupi ubezpieczenie, gdy

$$\mathbb{E}(u(l_{UB})) > \mathbb{E}(u(l_{NUB})).$$

Ponieważ

$$\mathbb{E}(u(l_{NUB})) = 0,02\sqrt{1210000} + 0,98\sqrt{1440000} = 1198 \text{ oraz}$$

$$\mathbb{E}(u(l_{UB})) = 1 \cdot \sqrt{1440000 - P},$$

więc akceptowalna składka musi spełniać nierówność $\sqrt{1440000 - P} > 1198$.
Rozwiązujemy tę nierówność ze względu na P i otrzymujemy $P < 4796$.

Maksymalna akceptowalna składka P wynosi więc $P = 4796$ zł.

Maksymalna akceptowalna składka P wynosi więc $P = 4796$ zł.
Uwaga. Z punktu widzenia firmy ubezpieczeniowej należna składka netto wynosi

$$\mathbb{E}(X) = 0,02 \cdot 230000 + 0,98 \cdot 0 = 4600 \ \text{(zł)} \ .$$

dokończenie rozwiązania i dyskusja

Maksymalna akceptowalna składka P wynosi więc $P = 4796$ zł.
Uwaga. Z punktu widzenia firmy ubezpieczeniowej należna składka netto wynosi

$$\mathbb{E}(X) = 0,02 \cdot 230000 + 0,98 \cdot 0 = 4600 \ \text{(zł)} \ .$$

Składka brutto, którą faktycznie firma zaoferuje (potencjalnym) klientom na pewno bedzie większa. Jeśli wyniesie np. 4750 zł to zgodnie z naszym modelem B. kupi ubezpieczenie,

dokończenie rozwiązania i dyskusja

Maksymalna akceptowalna składka P wynosi więc $P = 4796$ zł.
Uwaga. Z punktu widzenia firmy ubezpieczeniowej należna składka netto wynosi

$$\mathbb{E}(X) = 0,02 \cdot 230000 + 0,98 \cdot 0 = 4600 \ \text{(zł)} \ .$$

Składka brutto, którą faktycznie firma zaoferuje (potencjalnym) klientom na pewno bedzie większa. Jeśli wyniesie np. 4750 zł to zgodnie z naszym modelem B. kupi ubezpieczenie,ale jeśli np. 4900 to już nie kupi!

B. i L.

Widzimy już, że B. się boi,

Widzimy już, że B. się boi, . . . ale kto się boi bardziej?

Widzimy już, że B. się boi, . . . ale kto się boi bardziej?
Wprowadźmy na scenę drugiego aktora i nazwijmy go Lolkiem.

Widzimy już, że B. się boi, ... ale kto się boi bardziej?
Wprowadźmy na scenę drugiego aktora i nazwijmy go Lolkiem.
Określamy **współczynnik awersji do ryzyka Arrow'a-Pratt'a** jako

$$r(w) := \frac{-u''(w)}{u'(w)}$$

i mówimy, że *Lolek boi się bardziej niż Bolek*, gdy

Widzimy już, że B. się boi, . . . ale kto się boi bardziej?
Wprowadźmy na scenę drugiego aktora i nazwijmy go Lolkiem.
Określamy **współczynnik awersji do ryzyka Arrow'a-Pratt'a** jako

$$r(w) := \frac{-u''(w)}{u'(w)}$$

i mówimy, że *Lolek boi się bardziej niż Bolek*, gdy

$$r_L(w) > r_B(w)$$

.

B. i L.

Widzimy już, że B. się boi, ... ale kto się boi bardziej?
Wprowadźmy na scenę drugiego aktora i nazwijmy go Lolkiem.
Określamy **współczynnik awersji do ryzyka Arrow'a-Pratt'a** jako

$$r(w) := \frac{-u''(w)}{u'(w)}$$

i mówimy, że *Lolek boi się bardziej niż Bolek*, gdy

$$r_L(w) > r_B(w)$$

.

Przykład. Niech $u_B(w) = \sqrt{w}$, natomiast $u_L(w) = \ln(w)$ dla $w > 0$. Mamy $r_B(w) = 1/2w$ oraz $r_L(w) = 1/w$. Tak więc dla każdego $w > 0$ mamy $r_L(w) > r_B(w)$. Mówimy wtedy, że globalnie (niezależnie od poziomu majątku w) Lolek boi się bardziej niż Bolek.

Twierdzenie Pratt'a

Pratt udowodnił

Theorem

Następujące warunki są równoważne:

1. *dla każdego* $w > 0$ *zachodzi nierówność*

$$r_L(w) > r_B(w),$$

Twierdzenie Pratt'a

Pratt udowodnił

Theorem

Następujące warunki są równoważne:

1. *dla każdego* $w > 0$ *zachodzi nierówność*

$$r_L(w) > r_B(w),$$

2. *istnieje funkcja* $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *rosnąca i wklęsła spełniająca warunek:*

$$G(u_B(w)) = u_L(w) \text{ dla każdego } w > 0,$$

Twierdzenie Pratt'a

Pratt udowodnił

Theorem

Następujące warunki są równoważne:

1. *dla każdego* $w > 0$ *zachodzi nierówność*
$$r_L(w) > r_B(w),$$
2. *istnieje funkcja* $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *rosnąca i wklęsła spełniająca warunek:*
$$G(u_B(w)) = u_L(w) \text{ dla każdego } w > 0,$$
3. *dla każdego ryzyka* ε *spełniającego* $E(\varepsilon) = 0$ *mamy nierówność:*
$$\pi_L(\varepsilon) > \pi_B(\varepsilon).$$

Sprawa T.

T. ma funkcję użyteczności majątku postaci $u_T(w) = 1 - e^{-w}$. Ta funkcja też jest wklęsła

Sprawa T.

T. ma funkcję użyteczności majątku postaci $u_T(w) = 1 - e^{-w}$. Ta funkcja też jest wklęsła i dlatego Tola też się boi. Obliczamy $r_T(u)$ aby ocenić czy boi się bardziej czy mniej od chłopaków:

$$r_T(w) \equiv 1 \text{ dla każdego } w > 0.$$

Zatem

$$r_T(w) < r_B(w) < r_L(w) \text{ dla } w < 1/2,$$

Sprawa T.

T. ma funkcję użyteczności majątku postaci $u_T(w) = 1 - e^{-w}$. Ta funkcja też jest wklęsła i dlatego Tola też się boi. Obliczamy $r_T(u)$ aby ocenić czy boi się bardziej czy mniej od chłopaków:

$$r_T(w) \equiv 1 \text{ dla każdego } w > 0.$$

Zatem

$$r_T(w) < r_B(w) < r_L(w) \text{ dla } w < 1/2,$$

$$r_B(w) < r_T(w) < r_L(w) \text{ dla } 1/2 < w < 1,$$

Sprawa T.

T. ma funkcję użyteczności majątku postaci $u_T(w) = 1 - e^{-w}$. Ta funkcja też jest wklęsła i dlatego Tola też się boi. Obliczamy $r_T(u)$ aby ocenić czy boi się bardziej czy mniej od chłopaków:

$$r_T(w) \equiv 1 \text{ dla każdego } w > 0.$$

Zatem

$$r_T(w) < r_B(w) < r_L(w) \text{ dla } w < 1/2,$$

$$r_B(w) < r_T(w) < r_L(w) \text{ dla } 1/2 < w < 1,$$

$$r_B(w) < r_L(w) < r_T(w) \text{ dla } 1 < w.$$

Dziękuję