Matematyka w ruinie

Łukasz Rajkowski

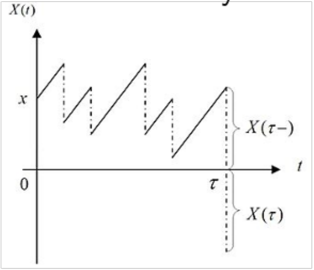
31 stycznia 2017

Ruina dla Matematyka

Wprowadzenie

Ruina dla Matematyka

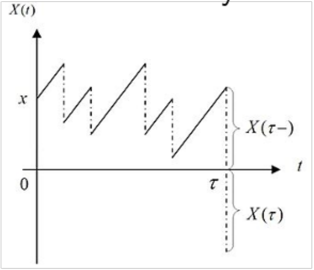
Teoria Ruiny



Wprowadzenie

Ruina dla Matematyka

Teoria Ruiny

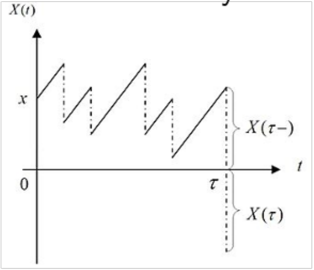


Ruina Gracza

Wprowadzenie

Ruina dla Matematyka

Teoria Ruiny



Ruina Gracza

Wprowadzenie

Problem ruiny gracza

Jaś i Małgosia grają w kości. W każdej rundzie Małgosia wygrywa z prawdopodobieństwem p, a Jaś z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$.

Na początku Małgosia ma a monet, Jaś b monet.

Przegrany oddaje jedną ze swoich monet wygranemu.

Grę wygrywa ten, kto pierwszy zgromadzi wszystkie $a + b$ monet. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej Małgosi?

Wprowadzenie

Problem ruiny gracza

Jaś i Małgosia grają w kości. W każdej rundzie Małgosia wygrywa z prawdopodobieństwem p, a Jaś z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$.

Na początku Małgosia ma a monet, Jaś b monet.

Przegrany oddaje jedną ze swoich monet wygranemu.

Grę wygrywa ten, kto pierwszy zgromadzi wszystkie $a + b$ monet. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej Małgosi?

Jaś	Małgosia
12	12

Wprowadzenie

Problem ruiny gracza

Jaś i Małgosia grają w kości. W każdej rundzie Małgosia wygrywa z prawdopodobieństwem p, a Jaś z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$.

Na początku Małgosia ma a monet, Jaś b monet.

Przegrany oddaje jedną ze swoich monet wygranemu.

Grę wygrywa ten, kto pierwszy zgromadzi wszystkie $a + b$ monet. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej Małgosi?

Jaś	Małgosia
13	11

Wprowadzenie

Problem ruiny gracza

Jaś i Małgosia grają w kości. W każdej rundzie Małgosia wygrywa z prawdopodobieństwem p, a Jaś z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$.

Na początku Małgosia ma a monet, Jaś b monet.
Przegrany oddaje jedną ze swoich monet wygranemu.

Grę wygrywa ten, kto pierwszy zgromadzi wszystkie $a + b$ monet.
Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej Małgosi?

Jaś	**Małgosia**
12	12

Wprowadzenie

Problem ruiny gracza

Jaś i Małgosia grają w kości. W każdej rundzie Małgosia wygrywa z prawdopodobieństwem p, a Jaś z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$.

Na początku Małgosia ma a monet, Jaś b monet.
Przegrany oddaje jedną ze swoich monet wygranemu.

Grę wygrywa ten, kto pierwszy zgromadzi wszystkie $a + b$ monet. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej Małgosi?

Jaś	**Małgosia**
11	13

Wprowadzenie

Problem ruiny gracza

Jaś i Małgosia grają w kości. W każdej rundzie Małgosia wygrywa z prawdopodobieństwem p, a Jaś z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$.

Na początku Małgosia ma a monet, Jaś b monet.

Przegrany oddaje jedną ze swoich monet wygranemu.

Grę wygrywa ten, kto pierwszy zgromadzi wszystkie $a + b$ monet. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej Małgosi?

Jaś	**Małgosia**
10	14

Wprowadzenie

Problem ruiny gracza

Jaś i Małgosia grają w kości. W każdej rundzie Małgosia wygrywa z prawdopodobieństwem p, a Jaś z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$.

Na początku Małgosia ma a monet, Jaś b monet.

Przegrany oddaje jedną ze swoich monet wygranemu.

Grę wygrywa ten, kto pierwszy zgromadzi wszystkie $a + b$ monet. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej Małgosi?

Jaś	Małgosia
11	13

Pascal i Fermat

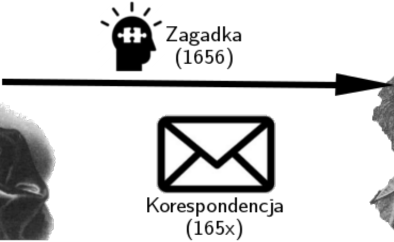
Blaise Pascal
(1623-1662)

Korespondencja
(165x)

Pierre de Fermat
(1601-1665)

Pascal i Fermat

Blaise Pascal
(1623-1662)



Pierre de Fermat
(1601-1665)

Pascal i Fermat

Zagadka

Jaś i Małgosia rzucają trzema kośćmi.

Jeśli suma oczek to 11, wygrywa Jaś, jeśli suma to 14 – Małgosia.

> Jeśli przegrany ma jakieś punkty, to **traci** 1 punkt.
> W przeciwnym przypadku wygrany **dostaje** 1 punkt.

Grę wygrywa ten, kto pierwszy zgromadzi 12 punktów.

Jaki jest stosunek szans na wygraną?

Pascal i Fermat

Zagadka

Jaś i Małgosia rzucają trzema kośćmi.
Jeśli suma oczek to 11, wygrywa Jaś, jeśli suma to 14 – Małgosia.

Jeśli przegrany ma jakieś punkty, to **traci** 1 punkt.
W przeciwnym przypadku wygrany **dostaje** 1 punkt.

Grę wygrywa ten, kto pierwszy zgromadzi 12 punktów.
Jaki jest stosunek szans na wygraną?

Jaś	Małgosia
0	0

Pascal i Fermat

Zagadka

Jaś i Małgosia rzucają trzema kośćmi.
Jeśli suma oczek to 11, wygrywa Jaś, jeśli suma to 14 – Małgosia.

Jeśli przegrany ma jakieś punkty, to **traci** 1 punkt.
W przeciwnym przypadku wygrany **dostaje** 1 punkt.

Grę wygrywa ten, kto pierwszy zgromadzi 12 punktów.
Jaki jest stosunek szans na wygraną?

Jaś	Małgosia
1	0

Pascal i Fermat

Zagadka

Jaś i Małgosia rzucają trzema kośćmi.
Jeśli suma oczek to 11, wygrywa Jaś, jeśli suma to 14 – Małgosia.

Jeśli przegrany ma jakieś punkty, to **traci** 1 punkt.
W przeciwnym przypadku wygrany **dostaje** 1 punkt.

Grę wygrywa ten, kto pierwszy zgromadzi 12 punktów.
Jaki jest stosunek szans na wygraną?

Jaś	**Małgosia**
0	0

Pascal i Fermat

Zagadka

Jaś i Małgosia rzucają trzema kośćmi.
Jeśli suma oczek to 11, wygrywa Jaś, jeśli suma to 14 – Małgosia.

> Jeśli przegrany ma jakieś punkty, to **traci** 1 punkt.
> W przeciwnym przypadku wygrany **dostaje** 1 punkt.

Grę wygrywa ten, kto pierwszy zgromadzi 12 punktów.
Jaki jest stosunek szans na wygraną?

Jaś	**Małgosia**
0	1

Pascal i Fermat

Zagadka

Jaś i Małgosia rzucają trzema kośćmi.
Jeśli suma oczek to 11, wygrywa Jaś, jeśli suma to 14 – Małgosia.

> Jeśli przegrany ma jakieś punkty, to **traci** 1 punkt.
> W przeciwnym przypadku wygrany **dostaje** 1 punkt.

Grę wygrywa ten, kto pierwszy zgromadzi 12 punktów.
Jaki jest stosunek szans na wygraną?

Jaś	**Małgosia**
0	2

Pascal i Fermat

Zagadka

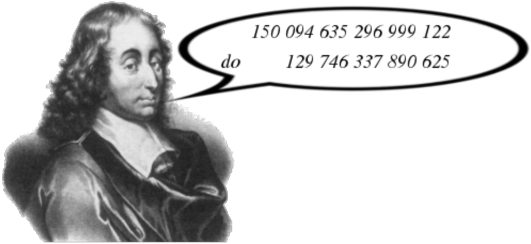
Jaś i Małgosia rzucają trzema kośćmi.
Jeśli suma oczek to 11, wygrywa Jaś, jeśli suma to 14 – Małgosia.

Jeśli przegrany ma jakieś punkty, to **traci** 1 punkt.
W przeciwnym przypadku wygrany **dostaje** 1 punkt.

Gręwygrywa ten, kto pierwszy zgromadzi 12 punktów.
Jaki jest stosunek szans na wygraną?

Jaś	Małgosia
0	1

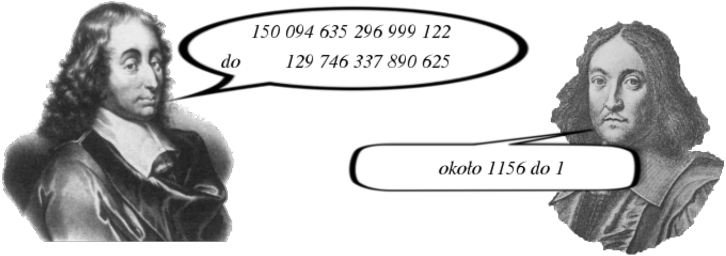
Pascal i Fermat



Blaise Pascal
(1623-1662)

Pierre de Fermat
(1601-1665)

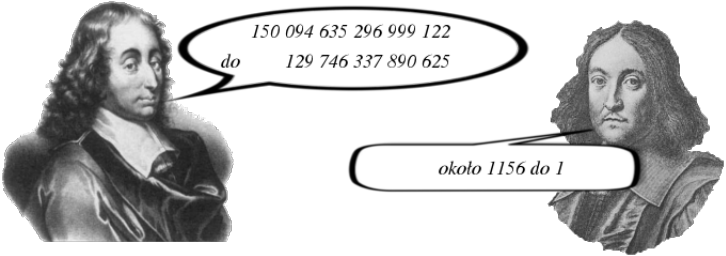
Pascal i Fermat



Blaise Pascal
(1623-1662)

Pierre de Fermat
(1601-1665)

Pascal i Fermat



Blaise Pascal
(1623-1662)

Pierre de Fermat
(1601-1665)

Obie odpowiedzi poprawne!

Jak do tego doszli?

...nie wiadomo...

Jak do tego doszli?

. . . nie wiadomo. . .

Jak mogli do tego dojść?

. . . można naśladować rozumowania, jakie przeprowadzali dla problemu „podziału stawki”.

Pascal i Fermat

Problem podziału stawki

Jaś i Małgosia rzucają monetą. Jeśli wypada orzeł, punkt zdobywa Jaś, w przeciwnym wypadku Małgosia. Pierwsza osoba, która uzyska 10 punktów, otrzymuje worek cukierków. Kiedy Jaś miał 5 punktów, a Małgosia 7, musieli przerwać grę. Jaki jest sprawiedliwy sposób podziału worka?

Pascal i Fermat

Problem podziału stawki

Jaś i Małgosia rzucają monetą. Jeśli wypada orzeł, punkt zdobywa Jaś, w przeciwnym wypadku Małgosia. Pierwsza osoba, która uzyska 10 punktów, otrzymuje worek cukierków. Kiedy Jaś miał 5 punktów, a Małgosia 7, musieli przerwać grę. Jaki jest sprawiedliwy sposób podziału worka?

- **Pascal:** rozwiąż układ

$$P_{10}(i,j) = \frac{1}{2}\left(P_{10}(i+1,j) + P_{10}(i,j+1)\right) \text{ dla } i,j < 10,$$

z warunkami $P_{10}(i,10) = 0$ oraz $P_{10}(10,j) = 1$.

Pascal i Fermat

Problem podziału stawki

Jaś i Małgosia rzucają monetą. Jeśli wypada orzeł, punkt zdobywa Jaś, w przeciwnym wypadku Małgosia. Pierwsza osoba, która uzyska 10 punktów, otrzymuje worek cukierków. Kiedy Jaś miał 5 punktów, a Małgosia 7, musieli przerwać grę. Jaki jest sprawiedliwy sposób podziału worka?

- **Pascal:** rozwiąż układ

$$P_{10}(i,j) = \frac{1}{2}\left(P_{10}(i+1,j) + P_{10}(i,j+1)\right) \text{ dla } i,j < 10,$$

  z warunkami $P_{10}(i,10) = 0$ oraz $P_{10}(10,j) = 1$.
- **Fermat:** gra na pewno skończy się po najbliższych 8 rzutach; Małgosia wygra dokładnie wtedy, gdy wśród tych 8 rzutów wygra co najmniej 3.

(być może) Rozwiązanie Pascala

(być może) Rozwiązanie Pascala

Ponumerujmy możliwe konfiguracje punktów, zaczynając od $(0, 12)$, a kończąc na $(12, 0)$.
P_i = prawdopodobieństwo wygranej Małgosi, startując z i-tej konfiguracji.

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}, \quad P_0 = 0, \quad P_{24} = 1$$

gdzie $p = 1 - q$ to szansa na wygraną Małgosi w pojedynczym rzucie.

(być może) Rozwiązanie Pascala

Ponumerujmy możliwe konfiguracje punktów, zaczynając od $(0, 12)$, a kończąc na $(12, 0)$.
P_i = prawdopodobieństwo wygranej Małgosi, startując z i-tej konfiguracji.

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}, \quad P_0 = 0, \quad P_{24} = 1$$

gdzie $p = 1 - q$ to szansa na wygraną Małgosi w pojedynczym rzucie.

(Struyck, 1716) .

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}$$

(być może) Rozwiązanie Pascala

Ponumerujmy możliwe konfiguracje punktów, zaczynając od $(0, 12)$, a kończąc na $(12, 0)$.
P_i = prawdopodobieństwo wygranej Małgosi, startując z i-tej konfiguracji.

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}, \quad P_0 = 0, \quad P_{24} = 1$$

gdzie $p = 1 - q$ to szansa na wygraną Małgosi w pojedynczym rzucie.

(Struyck, 1716) .

$$(p+q)P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}$$

(być może) Rozwiązanie Pascala

Ponumerujmy możliwe konfiguracje punktów, zaczynając od $(0, 12)$, a kończąc na $(12, 0)$.
$P_i =$ prawdopodobieństwo wygranej Małgosi, startując z i-tej konfiguracji.

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}, \quad P_0 = 0, \quad P_{24} = 1$$

gdzie $p = 1 - q$ to szansa na wygraną Małgosi w pojedynczym rzucie.

(Struyck, 1716) .

$pP_i + qP_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}$

(być może) Rozwiązanie Pascala

Ponumerujmy możliwe konfiguracje punktów, zaczynając od $(0, 12)$, a kończąc na $(12, 0)$.
P_i = prawdopodobieństwo wygranej Małgosi, startując z i-tej konfiguracji.

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}, \quad P_0 = 0, \quad P_{24} = 1$$

gdzie $p = 1 - q$ to szansa na wygraną Małgosi w pojedynczym rzucie.

(Struyck, 1716) .

$$qP_i - qP_{i-1} = pP_{i+1} - pP_i$$

(być może) Rozwiązanie Pascala

Ponumerujmy możliwe konfiguracje punktów, zaczynając od $(0,12)$, a kończąc na $(12,0)$.
P_i = prawdopodobieństwo wygranej Małgosi, startując z i-tej konfiguracji.

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}, \quad P_0 = 0, \quad P_{24} = 1$$

gdzie $p = 1 - q$ to szansa na wygraną Małgosi w pojedynczym rzucie.

(Struyck, 1716) .

$$q(P_i - P_{i-1}) = p(P_{i+1} - P_i)$$

(być może) Rozwiązanie Pascala

Ponumerujmy możliwe konfiguracje punktów, zaczynając od $(0, 12)$, a kończąc na $(12, 0)$.
P_i = prawdopodobieństwo wygranej Małgosi, startując z i-tej konfiguracji.

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}, \quad P_0 = 0, \quad P_{24} = 1$$

gdzie $p = 1 - q$ to szansa na wygraną Małgosi w pojedynczym rzucie.
(Struyck, 1716) Niech $\Delta_i = P_i - P_{i-1}$, $\alpha = q/p$.

$$\Delta_{i+1} = \alpha \Delta_i$$

(być może) Rozwiązanie Pascala

Ponumerujmy możliwe konfiguracje punktów, zaczynając od $(0, 12)$, a kończąc na $(12, 0)$.
P_i = prawdopodobieństwo wygranej Małgosi, startując z i-tej konfiguracji.

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}, \quad P_0 = 0, \quad P_{24} = 1$$

gdzie $p = 1 - q$ to szansa na wygraną Małgosi w pojedynczym rzucie.
(Struyck, 1716) Niech $\Delta_i = P_i - P_{i-1}$, $\alpha = q/p$.

$$\Delta_{i+1} = \alpha\Delta_i, \quad \Delta_1 + \ldots + \Delta_{24} = 1$$

(być może) Rozwiązanie Pascala

Ponumerujmy możliwe konfiguracje punktów, zaczynając od $(0, 12)$, a kończąc na $(12, 0)$.
P_i = prawdopodobieństwo wygranej Małgosi, startując z i-tej konfiguracji.

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}, \quad P_0 = 0, \quad P_{24} = 1$$

gdzie $p = 1 - q$ to szansa na wygraną Małgosi w pojedynczym rzucie.
(Struyck, 1716) Niech $\Delta_i = P_i - P_{i-1}$, $\alpha = q/p$.

$$\Delta_{i+1} = \alpha\Delta_i, \quad \Delta_1 + \ldots + \Delta_{24} = 1 \Longrightarrow \Delta_1 = 1/(1 - \alpha^{24})$$

(być może) Rozwiązanie Pascala

Ponumerujmy możliwe konfiguracje punktów, zaczynając od $(0, 12)$, a kończąc na $(12, 0)$.
P_i = prawdopodobieństwo wygranej Małgosi, startując z i-tej konfiguracji.

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}, \quad P_0 = 0, \quad P_{24} = 1$$

gdzie $p = 1 - q$ to szansa na wygraną Małgosi w pojedynczym rzucie.
(Struyck, 1716) Niech $\Delta_i = P_i - P_{i-1}$, $\alpha = q/p$.

$$\Delta_{i+1} = \alpha\Delta_i, \quad \Delta_1 + \ldots + \Delta_{24} = 1 \Longrightarrow \; \Delta_1 = 1/(1-\alpha^{24})$$
$$P_{12} = \Delta_1 + \ldots + \Delta_{12} = (1-\alpha^{12})/(1-\alpha^{24})$$

(być może) Rozwiązanie Pascala

Ponumerujmy możliwe konfiguracje punktów, zaczynając od $(0, 12)$, a kończąc na $(12, 0)$.
P_i = prawdopodobieństwo wygranej Małgosi, startując z i-tej konfiguracji.

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}, \quad P_0 = 0, \quad P_{24} = 1$$

gdzie $p = 1 - q$ to szansa na wygraną Małgosi w pojedynczym rzucie.
(Struyck, 1716) Niech $\Delta_i = P_i - P_{i-1}$, $\alpha = q/p$.

$$\Delta_{i+1} = \alpha\Delta_i, \quad \Delta_1 + \ldots + \Delta_{24} = 1 \Longrightarrow \Delta_1 = 1/(1 - \alpha^{24})$$

$$P_{12} = \Delta_1 + \ldots + \Delta_{12} = (1 - \alpha^{12})/(1 - \alpha^{24})$$

$$\boldsymbol{P_{12} : Q_{12} = p^{12} : q^{12}}$$

(być może) Rozwiązanie Fermata

(być może) Rozwiązanie Fermata

Pod warunkiem końca po 12 rzutach, stosunek szans to $p^{12} : q^{12}$.

(być może) Rozwiązanie Fermata

Pod warunkiem końca po 12 rzutach, stosunek szans to $p^{12} : q^{12}$.

Pod warunkiem końca po 14 rzutach, stosunek szans to $12p^{13}q : 12pq^{13} = p^{12} : q^{12}$.

(być może) Rozwiązanie Fermata

Pod warunkiem końca po 12 rzutach, stosunek szans to $p^{12} : q^{12}$.

Pod warunkiem końca po 14 rzutach, stosunek szans to $12p^{13}q : 12pq^{13} = p^{12} : q^{12}$.

$$(\dots)$$

Pod warunkiem końca po $12 + 2n$ rzutach, stosunek szans wynosi $M_n p^{12+n} q^n : M_n p^n q^{12+n} = p^{12} : q^{12}$, gdzie M jest liczbą kombinacji wygranych/przegranych w $12 + 2n$ rzutach, przy której zwycięstwo gracza pierwszego następuje dokładnie po rzucie $12 + 2n$ (ale z symetrii to samo jest dla gracza drugiego).

(być może) Rozwiązanie Fermata

Pod warunkiem końca po 12 rzutach, stosunek szans to $p^{12} : q^{12}$.

Pod warunkiem końca po 14 rzutach, stosunek szans to $12p^{13}q : 12pq^{13} = p^{12} : q^{12}$.

$$(\dots)$$

Pod warunkiem końca po $12 + 2n$ rzutach, stosunek szans wynosi $M_n p^{12+n} q^n : M_n p^n q^{12+n} = p^{12} : q^{12}$, gdzie M jest liczbą kombinacji wygranych/przegranych w $12 + 2n$ rzutach, przy której zwycięstwo gracza pierwszego następuje dokładnie po rzucie $12 + 2n$ (ale z symetrii to samo jest dla gracza drugiego).

W tej sytuacji ogólny stosunek szans również wynosi $p^{12} : q^{12}$.

(być może) Rozwiązanie Fermata

Pod warunkiem końca po 12 rzutach, stosunek szans to $p^{12} : q^{12}$.

Pod warunkiem końca po 14 rzutach, stosunek szans to $12p^{13}q : 12pq^{13} = p^{12} : q^{12}$.

$$(\dots)$$

Pod warunkiem końca po $12 + 2n$ rzutach, stosunek szans wynosi $M_n p^{12+n} q^n : M_n p^n q^{12+n} = p^{12} : q^{12}$, gdzie M jest liczbą kombinacji wygranych/przegranych w $12 + 2n$ rzutach, przy której zwycięstwo gracza pierwszego następuje dokładnie po rzucie $12 + 2n$ (ale z symetrii to samo jest dla gracza drugiego).

W tej sytuacji ogólny stosunek szans również wynosi $p^{12} : q^{12}$.

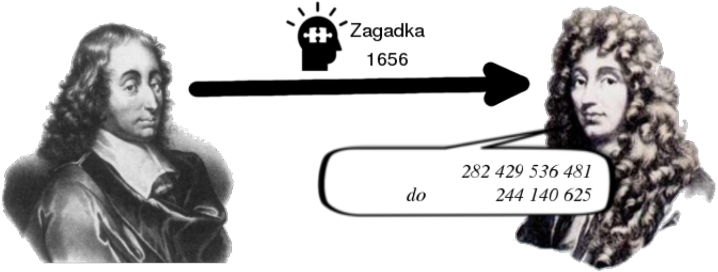
Uwaga: Istotne założenie o równym kapitale na początku.

Huygens

Blaise Pascal
(1623-1662)

Christiaan Huygens
(1629-1695)

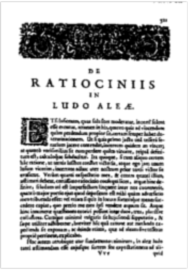
Huygens



Blaise Pascal
(1623-1662)

Christiaan Huygens
(1629-1695)

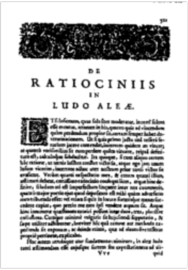
Huygens


DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

De Ratiociniis in Ludo Aleae
(1657)

Treść + odpowiedź

Christiaan Huygens
(1629-1695)


DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

Treść + odpowiedź

De Ratiociniis in Ludo Aleae
(1657)

Christiaan Huygens
(1629-1695)

„Piąty problem Huygensa"

Huygens


ŒUVRES COMPLÈTES

CHRISTIAAN HUYGENS

TOME QUATORZIÈME

Calcul des Probabilites;
Travaux de mathematiques pures (1676)

Rozwiązanie


Christiaan Huygens
(1629-1695)

„Piąty problem Huygensa"

Do 2 wygranych:

o ad o (x)
- $9(d)$ ad habendum 1 ad o (y)
  - $9(d)$ [ad] 2 ad o (n)
  - $5(c)$ [ad] x
- $5(c)$ ad hab. —— o ad 1 (z)
  - $9(d)$ [ad] x
  - $5(c)$ [ad] o

$$z \infty \frac{dx}{d+c};\quad y \infty \frac{dn+cx}{d+c}$$

o ad o (x)
- d [ad] $\frac{dn+cx}{d+c}$
- c [ad] $\frac{dx}{d+c}$

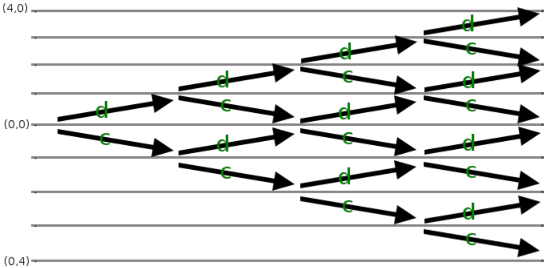
Ergo $x \infty \dfrac{ddn+2dcx}{cc+2dc+dd}$

$$ccx+2dcx+ddx \infty ddn+2dcx$$

$x \infty \dfrac{ddn}{cc+dd}$ portio luforis B.

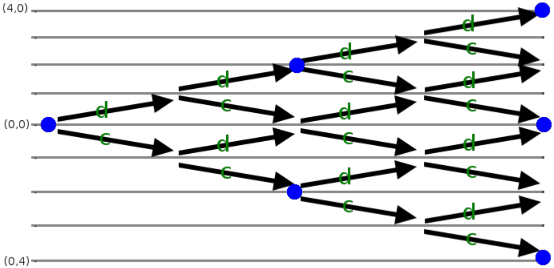
Huygens – rozwiązanie

Do 4 wygranych:



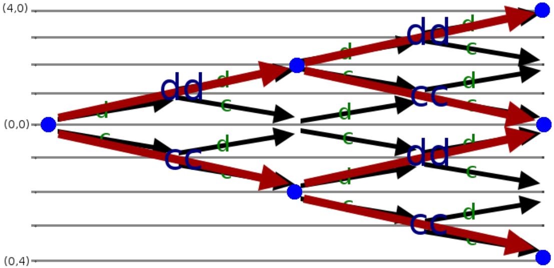
Huygens – rozwiązanie

Do 4 wygranych:



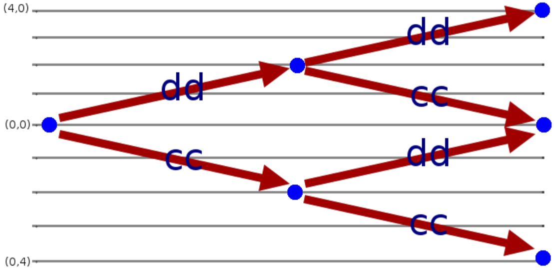
Huygens – rozwiązanie

Do 4 wygranych:



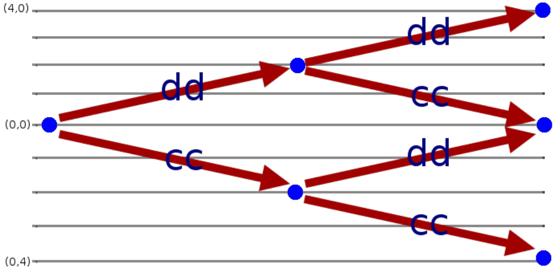
Huygens – rozwiązanie

Do 4 wygranych:



Huygens – rozwiązanie

Do 4 wygranych:



Zatem $P : Q = dddd : cccc$

Do 4 wygranych:

0 ad 0 (x) ∞
- *dd* [ad habendum] 2 ad 0 (y) <
  - *dd* [ad] 4 ad 0 (n)
  - *cc* [ad] 0 ad 0 (x)
- *cc* [ad habendum] 0 ad 2 (z) <
  - *dd* [ad] 0 ad 0 (x)
  - *cc* [ad] 0 ad 4 (o).

Est autem hic *dd* et *cc* ubi prius *d* et *c*, ac de caetero operatio eadem quae prius. ergo necessario fiet $x \infty \frac{d^4 n}{c^4 + d^4}$. Et spes B ad spem A ut d^4 ad c^4.

Huygens – rozwiązanie

Do 3 wygranych:

$$x \infty \begin{cases} d\ [\text{ad}]\ 1\ \text{ad}\ 0\ (l) < \begin{cases} dd\ [\text{ad}]\ 3\ \text{ad}\ 0\ (n) \\ cc\ [\text{ad}]\ 0\ \text{ad}\ 1\ (k) \end{cases} \\ c\ [\text{ad}]\ 0\ \text{ad}\ 1\ (k) < \begin{cases} dd\ [\text{ad}]\ 1\ \text{ad}\ 0\ (l) \\ cc\ [\text{ad}]\ 0\ \text{ad}\ 3\ (o) \end{cases} \end{cases} \qquad k \infty \frac{ddl}{dd+cc}$$

$$l \infty \frac{ddn + \frac{ccddl}{dd+cc}}{dd+cc};\ ddl + ccl \infty ddn + \frac{ccddl}{dd+cc}$$

$$d^4l + 2ddccl + c^4l \infty d^4n + ccddn + ccddl$$

$$l \infty \frac{d^4n + ccddn}{d^4 + ddcc + c^4}.\ \text{Ergo}\ k \infty \frac{d^4n}{d^4 + ddcc + c^4}$$

$$x \begin{cases} d\ [\text{ad}]\ l\ [\infty] \frac{d^4n + ccddn}{d^4 + ddcc + c^4} \\ c\ [\text{ad}]\ \frac{d^4n}{d^4 + ddcc + c^4} \end{cases} \qquad x \infty \frac{d^5n + ccd^3n + cd^4n}{(d+c)\,\text{in}\,(d^4 + ddcc + c^4)}\ \text{div. per}\ dd + dc + cc$$

$$x \infty \frac{d^3n}{(d+c)\ \text{in}\ (dd - dc + cc)\ \text{sed hoc} \infty d^3 + c^3} \qquad x \infty \frac{d^3n}{d^3 + c^3}$$

Huygens – rozwiązanie

Rozwiązanie do 12 wygranych nie zostało podane.

Huygens – rozwiązanie

Rozwiązanie do 12 wygranych nie zostało podane.

Zapewne Huygens wiedział, jak z przypadku $\{a = b = 3\}$ wywnioskować $\{a = b = 12\}$,
podobnie jak wiedział, jak z $\{a = b = 2\}$ wynika $\{a = b = 4\}$.

Huygens – rozwiązanie

Rozwiązanie do 12 wygranych nie zostało podane.

Zapewne Huygens wiedział, jak z przypadku $\{a = b = 3\}$ wywnioskować $\{a = b = 12\}$,
podobnie jak wiedział, jak z $\{a = b = 2\}$ wynika $\{a = b = 4\}$.

Uwaga 1: przedstawione rozumowanie korzysta z symetrii problemu.

Huygens – rozwiązanie

Rozwiązanie do 12 wygranych nie zostało podane.

Zapewne Huygens wiedział, jak z przypadku $\{a = b = 3\}$ wywnioskować $\{a = b = 12\}$,
podobnie jak wiedział, jak z $\{a = b = 2\}$ wynika $\{a = b = 4\}$.

Uwaga 1: przedstawione rozumowanie korzysta z symetrii problemu.

Uwaga 2: ogólne rozwiązanie wymagałoby osobnego rozwiązania dla nieparzystych a.

Bernoulli

Jacques Bernoulli
(1655-1705)

Ars Conjectandi
(1713)

Bernoulli

Jacques Bernoulli
(1655-1705)


JACOBI BERNOULLI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,

DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.

Ars Conjectandi
(1713)

- podanie wzoru (bez uzasadnienia), że w ogólnym przypadku stosunek szans to $p^b(p^a - q^a) : q^a(p^b - q^b)$.

Bernoulli

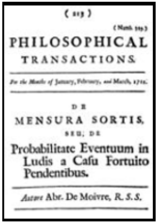
Jacques Bernoulli
(1655-1705)

JACOBI BERNOULLI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.

Ars Conjectandi
(1713)

- podanie wzoru (bez uzasadnienia), że w ogólnym przypadku stosunek szans to $p^b(p^a - q^a) : q^a(p^b - q^b)$.
- (najpewniej) błędne uzasadnienie, że w symetrycznym przypadku stosunek szans to $p^a : q^a$

Abraham de Moivre
(1667-1754)



PHILOSOPHICAL
TRANSACTIONS.

For the Months of January, February, and March, 1710.

MENSURA SORTIS,

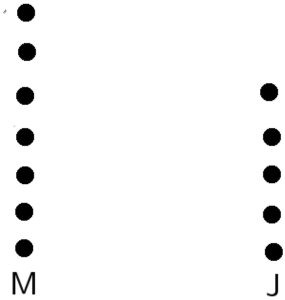
Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus.

Autore Abr. De Moivre, R. S. S.

De Mensura Sortis
(1711)

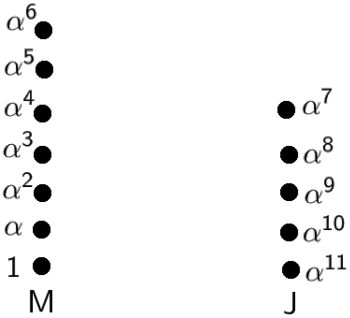
Pełne rozwiązanie!

de Moivre



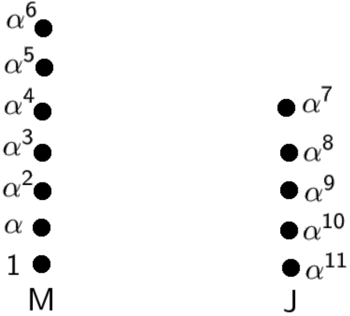
de Moivre

$\alpha = q/p$



de Moivre

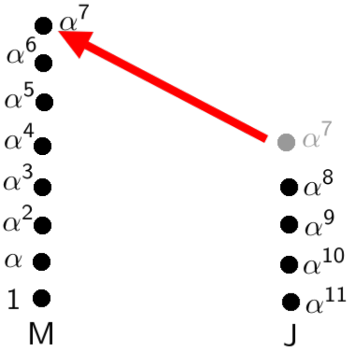
$\alpha = q/p$



$$\mathbb{E}_{1 \text{ tura}} =$$

de Moivre

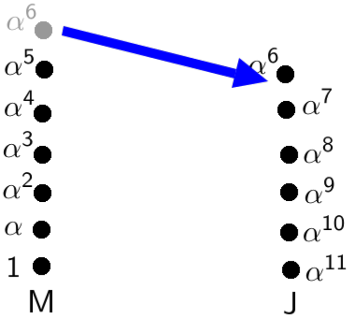
$\alpha = q/p$



$$\mathbb{E}_{1\ \mathrm{tura}} = p \cdot \alpha^7 +$$

de Moivre

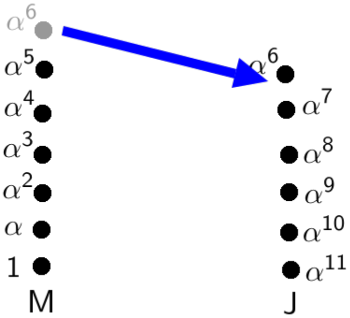
$\alpha = q/p$



$$\mathbb{E}_{\text{1 tura}} = p \cdot \alpha^7 + q \cdot (-\alpha^6)$$

de Moivre

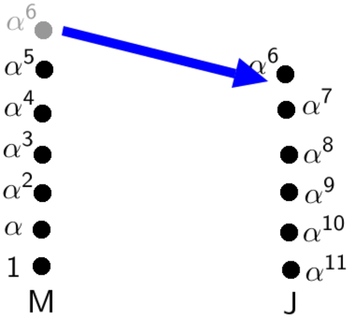
$\alpha = q/p$



$$\mathbb{E}_{1 \text{ tura}} = p \cdot \alpha^7 + q \cdot (-\alpha^6) = 0$$

de Moivre

$\alpha = q/p$

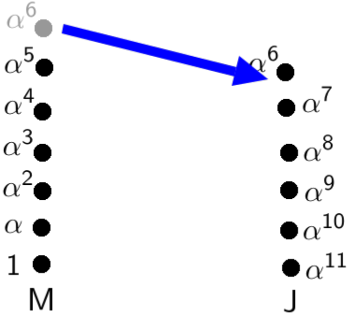


$$\mathbb{E}_{\text{1 tura}} = p \cdot \alpha^7 + q \cdot (-\alpha^6) = 0$$

$$\frac{\overbrace{1-\alpha^7}^{\text{ile na starcie}}}{1-\alpha}$$

de Moivre

$\alpha = q/p$

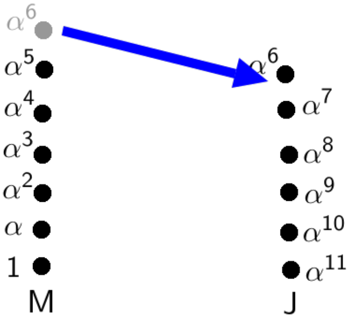


$$\mathbb{E}_{\text{1 tura}} = p \cdot \alpha^7 + q \cdot (-\alpha^6) = 0$$

$$\frac{\overbrace{1-\alpha^7}^{\text{ile na starcie}}}{1-\alpha} = \mathbb{E}_{\text{po 1 turze}}$$

de Moivre

$\alpha = q/p$

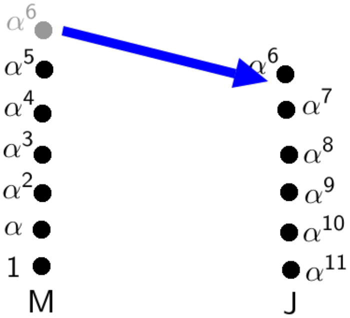


$$\mathbb{E}_{\text{1 tura}} = p \cdot \alpha^7 + q \cdot (-\alpha^6) = 0$$

$$\frac{\overbrace{1-\alpha^7}^{\text{ile na starcie}}}{1-\alpha} = \mathbb{E}_{\text{po 1 turze}} = \mathbb{E}_{\text{po 2 turach}}$$

de Moivre

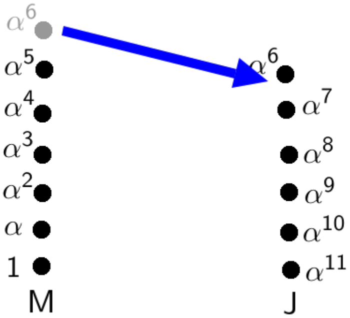
$\alpha = q/p$



$$\mathbb{E}_{\text{1 tura}} = p \cdot \alpha^7 + q \cdot (-\alpha^6) = 0$$

$$\frac{\overbrace{1-\alpha^7}^{\text{ile na starcie}}}{1-\alpha} = \mathbb{E}_{\text{po 1 turze}} = \mathbb{E}_{\text{po 2 turach}} = \ldots = \mathbb{E}_{\text{na koniec}}$$

$\alpha = q/p$

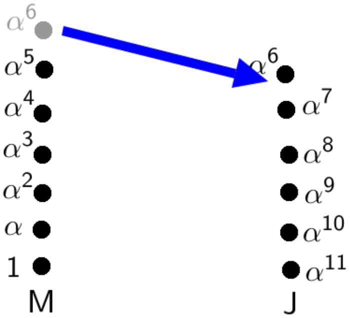


$$\mathbb{E}_{\text{1 tura}} = p \cdot \alpha^7 + q \cdot (-\alpha^6) = 0$$

$$\overbrace{\frac{1-\alpha^7}{1-\alpha}}^{\text{ile na starcie}} = \mathbb{E}_{\text{po 1 turze}} = \mathbb{E}_{\text{po 2 turach}} = \ldots = \mathbb{E}_{\text{na koniec}} = P \cdot \frac{1-\alpha^{12}}{1-\alpha}$$

de Moivre

$\alpha = q/p$



$$\boxed{P : Q = \frac{p^5(p^7-q^7)}{p^7(p^5-q^5)}}$$

$$\mathbb{E}_{\text{1 tura}} = p \cdot \alpha^7 + q \cdot (-\alpha^6) = 0$$

$$\frac{\overbrace{1-\alpha^7}^{\text{ile na starcie}}}{1-\alpha} = \mathbb{E}_{\text{po 1 turze}} = \mathbb{E}_{\text{po 2 turach}} = \ldots = \mathbb{E}_{\text{na koniec}} = P \cdot \frac{1-\alpha^{12}}{1-\alpha}$$

Martyngały – definicje

Martyngały – definicje

$$\overbrace{X_1, X_2, \ldots, X_n}^{\text{wyniki gier}}$$

Martyngały – definicje

$$\overbrace{X_1, X_2, \ldots, X_n}^{\text{wyniki gier}} \to \overbrace{f_n(X_1, \ldots, X_n) = M_n}^{\text{wypłata}}$$

Martyngały – definicje

$$\overbrace{X_1, X_2, \ldots, X_n}^{\text{wyniki gier}} \to \overbrace{f_n(X_1, \ldots, X_n) = M_n}^{\text{wypłata}}$$

Powyższa sekwencja gier jest **martyngałem**, jeśli

$$\mathbb{E}\left(M_{n+1} \,|\, X_1, \ldots, X_n\right) = M_n$$

Martyngały – definicje

$$\overbrace{X_1, X_2, \ldots, X_n}^{\text{wyniki gier}} \to \overbrace{f_n(X_1, \ldots, X_n) = M_n}^{\text{wypłata}}$$

Powyższa sekwencja gier jest **martyngałem**, jeśli

$$\mathbb{E}\left(M_{n+1} \,|\, X_1, \ldots, X_n\right) = M_n$$

Zmienna losowa N o wartościach w $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ jest **momentem zatrzymania** jeśli to, czy zaszło $\{N = n\}$ można stwierdzić na podstawie $X_1, \ldots, X_n$.

Martyngały

Jeśli $X_1, X_2, \dots, M_1, M_2, \dots$ to martyngał, to

$$\mathbb{E}\, X_1 = \mathbb{E}\, X_2 = \ldots = \mathbb{E}\, X_n.$$

Martyngały

Jeśli $X_1, X_2, \ldots, M_1, M_2, \ldots$ to martyngał, to

$$\mathbb{E}\, X_1 = \mathbb{E}\, X_2 = \ldots = \mathbb{E}\, X_n.$$

Niech N – moment zatrzymania. Kiedy $\mathbb{E}\, X_1 = \mathbb{E}\, X_N$?

Martyngały

Jeśli $X_1, X_2, \ldots, M_1, M_2, \ldots$ to martyngał, to

$$\mathbb{E}\, X_1 = \mathbb{E}\, X_2 = \ldots = \mathbb{E}\, X_n.$$

Niech N – moment zatrzymania. Kiedy $\mathbb{E}\, X_1 = \mathbb{E}\, X_N$?

(**Optional Stopping Theorem**) Gdy $N \overset{p.n.}{<} \infty$, $\mathbb{E}\, N < \infty$ oraz $\mathbb{E}\left(|M_{n+1} - M_n| \,|\, X_1, \ldots, X_n\right)$ jest ograniczone na zbiorze $n < N$.

Martyngały

W przypadku zadania o ruinie gracza

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \;\; \mathbb{P}(X_n = -1) = q$$

Nietrudno sprawdzić, że

$M_n = (q/p)^{S_n}$ jest martyngałem ($S_n = X_1 + \ldots + X_n$),

$N = \min\{n\colon S_n \in \{-a, b\}\}$ jest momentem zatrzymania.

Martyngały

W przypadku zadania o ruinie gracza

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \;\; \mathbb{P}(X_n = -1) = q$$

Nietrudno sprawdzić, że

$M_n = (q/p)^{S_n}$ jest martyngałem $(S_n = X_1 + \ldots + X_n)$,

$N = \min\{n\colon S_n \in \{-a, b\}\}\}$ jest momentem zatrzymania.

N_{blok}: numer pierwszego bloku długości $m + n$, w którym wystąpiły same wygrane Małgosi.

$$N \leqslant (a+b)N_{\mathrm{blok}} \;\; \text{oraz} \;\; N_{\mathrm{blok}} < \infty, \mathbb{E}\, N_{\mathrm{blok}} < \infty$$

Martyngały

W przypadku zadania o ruinie gracza

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = q$$

Nietrudno sprawdzić, że

$M_n = (q/p)^{S_n}$ jest martyngałem ($S_n = X_1 + \ldots + X_n$),

$N = \min\{n\colon S_n \in \{-a, b\}\}$ jest momentem zatrzymania.

N_{blok}: numer pierwszego bloku długości $m + n$, w którym wystąpiły same wygrane Małgosi.

$$N \leqslant (a+b)N_{\mathrm{blok}} \quad \text{oraz} \quad N_{\mathrm{blok}} < \infty, \mathbb{E}\, N_{\mathrm{blok}} < \infty$$

Dla $n < N$ mamy $|S_n| \leqslant \min\{a, b\}$, a zatem warunkowe wartości oczekiwane przyrostów M_n są ograniczone na $\{n < N\}$.

Martyngały

W przypadku zadania o ruinie gracza

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \ \ \mathbb{P}(X_n = -1) = q$$

Nietrudno sprawdzić, że

$M_n = (q/p)^{S_n}$ jest martyngałem ($S_n = X_1 + \ldots + X_n$),

$N = \min\{n \colon S_n \in \{-a, b\}\}\}$ jest momentem zatrzymania.

N_{blok}: numer pierwszego bloku długości $m + n$, w którym wystąpiły same wygrane Małgosi.

$$N \leqslant (a + b)N_{\mathrm{blok}} \ \text{ oraz } \ N_{\mathrm{blok}} < \infty, \mathbb{E}\, N_{\mathrm{blok}} < \infty$$

Dla $n < N$ mamy $|S_n| \leqslant \min\{a, b\}$, a zatem warunkowe wartości oczekiwane przyrostów M_n są ograniczone na $\{n < N\}$.

W tej sytuacji, z twierdzenia o opcjonalnym stopowaniu:

$$\mathbb{E}\, M_0 = \mathbb{E}\, M_N$$

Martyngały

W przypadku zadania o ruinie gracza

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = q$$

Nietrudno sprawdzić, że

$M_n = (q/p)^{S_n}$ jest martyngałem ($S_n = X_1 + \ldots + X_n$),

$N = \min\{n \colon S_n \in \{-a, b\}\}\}$ jest momentem zatrzymania.

N_{blok}: numer pierwszego bloku długości $m + n$, w którym wystąpiły same wygrane Małgosi.

$$N \leqslant (a + b) N_{\text{blok}} \quad \text{oraz} \quad N_{\text{blok}} < \infty, \mathbb{E}\, N_{\text{blok}} < \infty$$

Dla $n < N$ mamy $|S_n| \leqslant \min\{a, b\}$, a zatem warunkowe wartości oczekiwane przyrostów M_n są ograniczone na $\{n < N\}$.

W tej sytuacji, z twierdzenia o opcjonalnym stopowaniu:

$$(q/p)^0 = P \cdot (q/p)^b + (1 - P) \cdot (q/p)^{-a},$$

Martyngały

$\overline{M}_n = S_n - (p-q)n$: też martyngał.

Martyngały

$\overline{M}_n = S_n - (p-q)n$: też martyngał. Podobnie:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,\overline{M}_N &= \mathbb{E}\,\overline{M}_0 = 0 \\ \mathbb{E}\,\overline{M}_N &= \mathbb{E}\,S_N - (p-q)\mathbb{E}\,N \end{aligned}$$

Martyngały

$\overline{M}_n = S_n - (p-q)n$: też martyngał. Podobnie:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,\overline{M}_N &= \mathbb{E}\,\overline{M}_0 = 0 \\ \mathbb{E}\,\overline{M}_N &= \mathbb{E}\,S_N - (p-q)\mathbb{E}\,N \end{aligned} \implies \mathbb{E}\,N = \frac{\mathbb{E}\,S_N}{p-q} = \frac{P\cdot b - Q\cdot a}{p-q}$$

Martyngały

$\overline{M}_n = S_n - (p-q)n$: też martyngał. Podobnie:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,\overline{M}_N &= \mathbb{E}\,\overline{M}_0 = 0 \\ \mathbb{E}\,\overline{M}_N &= \mathbb{E}\,S_N - (p-q)\mathbb{E}\,N \end{aligned} \implies \mathbb{E}\,N = \frac{\mathbb{E}\,S_N}{p-q} = \frac{P\cdot b - Q\cdot a}{p-q}$$

Co dla $p=q$?
$\hat{M}_n = S_n^2 - n$: też martyngał. W tym wypadku $\mathbb{E}\,S_N = ab$.

Trzech graczy

Opis gry

Tytus, Romek i Atomek grają w następującą grę: w każdej rundzie każdy z nich rzuca monetą. Jeśli wynik jednego z nich jest różny od wyników pozostałych, bierze on od pozostałych po złotówce. Gra kończy się, kiedy jeden z graczy zbankrutuje.

Trzech graczy

Opis gry

Tytus, Romek i Atomek grają w następującą grę: w każdej rundzie każdy z nich rzuca monetą. Jeśli wynik jednego z nich jest różny od wyników pozostałych, bierze on od pozostałych po złotówce. Gra kończy się, kiedy jeden z graczy zbankrutuje.

Niech N – liczba rozegranych rund. Jeśli mają równe prawdopodobieństwa wygranej, wartość $\mathbb{E}\, N$ można obliczyć w podobny sposób (Dennis Sandell, 1987).

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$. Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$.
Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i \leqslant n}\right) =$$
$$=$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$.
Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i \leqslant n}\right) =$$
$$= \mathbb{E}\left(S_{1,n} S_{2,n} S_{3,n} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) + \ \ldots$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$.
Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i \leqslant n}\right) = \\ = S_{1,n} S_{2,n} S_{3,n} + \ \ldots$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$.
Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i \leqslant n}\right) =$$
$$= V_n + \ \ldots$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$.
Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i\leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i\leqslant n}\right) =$$
$$= V_n + \sum_{3} \mathbb{E}\left(S_{i,n} S_{j,n} X_{k,n+1} \,|\, X_{i\leqslant n}\right) + \ \dots$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$.
Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i \leqslant n}\right) =$$
$$= V_n + \sum_{3} S_{i,n} S_{j,n} \mathbb{E}\left(X_{k,n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) + \ \ldots$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$. Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i \leqslant n}\right) =$$
$$= V_n + \sum_{3} S_{i,n} S_{j,n} \mathbb{E}\left(X_{k,n+1}\right) + \ \ldots$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$.
Rozważmy $V_n = S_{i,n}S_{2,n}S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i\leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i\leqslant n}\right) =$$
$$= V_n + \sum_{3} S_{i,n}S_{j,n} \cdot 0 + \ \ldots$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$.
Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \mid X_{i \leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \mid X_{i \leqslant n}\right) =$$
$$= V_n + 0 + \ \ldots$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$. Rozważmy $V_n = S_{i,n}S_{2,n}S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i \leqslant n}\right) =$$
$$= V_n + 0 + \sum_{3} \mathbb{E}\left(S_{i,n}X_{j,n+1}X_{k,n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) \ldots$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$.
Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i \leqslant n}\right) =$$
$$= V_n + 0 + \sum_{3} S_{i,n} \mathbb{E}\left(X_{j,n+1} X_{k,n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) \ldots$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$.
Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i \leqslant n}\right) =$$
$$= V_n + 0 + \sum_{3} S_{i,n} \mathbb{E}\left(X_{j,n+1} X_{k,n+1}\right) \ldots$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$. Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i \leqslant n}\right) =$$
$$= V_n + 0 + \sum_{3} S_{i,n} \cdot (-1) + \ \ldots$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$.
Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i \leqslant n}\right) =$$
$$= V_n + 0 + \sum_{3} S_{i,n} \cdot (-1) + \mathbb{E}\left(X_{1,n+1} X_{2,n+1} X_{3,n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right)$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$.
Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \mid X_{i \leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \mid X_{i \leqslant n}\right) =$$
$$= V_n + 0 + \sum_{3} S_{i,n} \cdot (-1) + \mathbb{E}\left(X_{1,n+1} X_{2,n+1} X_{3,n+1}\right)$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$.
Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i \leqslant n}\right) =$$
$$= V_n + 0 + \sum_{3} S_{i,n} \cdot (-1) + 2$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$.
Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i\leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i\leqslant n}\right) =$$
$$= V_n + 0 + \mathbf{(-1)} \sum_{\mathbf{3}} \mathbf{S_{i,n}} + 2$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$. Rozważmy $V_n = S_{i,n} S_{2,n} S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i \leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i \leqslant n}\right) =$$

$$= V_n + 0 - (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + 2$$

Trzech graczy

Niech $X_{i,j}$ – zysk i-tego gracza w j-tej rundzie, $S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} X_{i,j}$. Rozważmy $V_n = S_{i,n}S_{2,n}S_{3,n}$.

$$\mathbb{E}\left(V_{n+1} \,|\, X_{i\leqslant n}\right) = \mathbb{E}\left((S_{1,n} + X_{1,n})(S_{2,n} + X_{2,n})(S_{3,n} + X_{3,n}) \,|\, X_{i\leqslant n}\right) =$$
$$= V_n + 0 - (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + 2$$

Łatwo stąd wywnioskować, że $V_n + n(3/4 \cdot a - 2)$ jest martyngałem. Ponadto, tak jak poprzednio, $\mathbb{E}\, N$ jest skończone, podobnie jak samo N, i w związku z tym możemy korzystać z twierdzenia o opcjonalnym stopowaniu. Oczywiście $\mathbb{E}\, V_0 = abc$, $\mathbb{E}\, V_N = a + b + c - 2$ i dlatego

$$\mathbb{E}\, N = \frac{abc}{a + b + c - 2}.$$

Co jeszcze?

1. Chang (1995), Cho (1996) – 4 i więcej graczy w przypadku symetrycznym

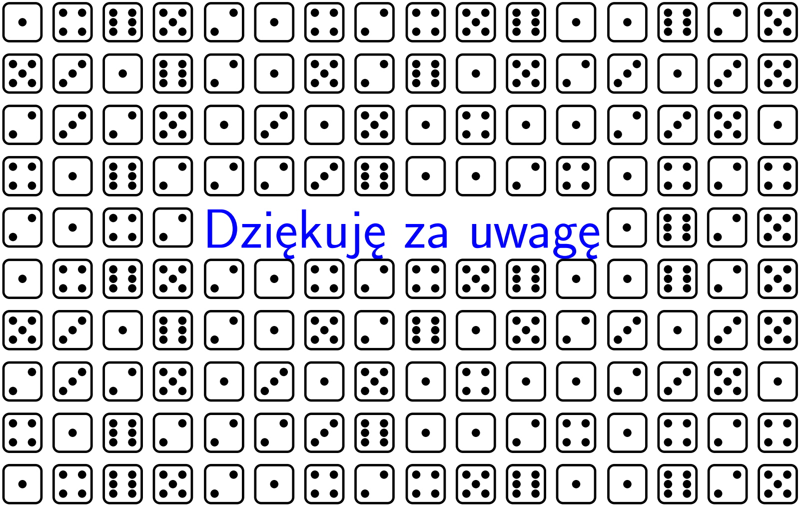
Co jeszcze?

1. Chang (1995), Cho (1996) – 4 i więcej graczy w przypadku symetrycznym
2. Zagadnienia numeryczne

Co jeszcze?

1. Chang (1995), Cho (1996) – 4 i więcej graczy w przypadku symetrycznym
2. Zagadnienia numeryczne
3. Zastosowania w statystyce

Koniec Oczekiwany



Dziękuję za uwagę