

LV Szkoła Matematyki Poglądowej, 27 – 31 stycznia 2017  
Co pieniądz robi z nami, a co my robimy z pieniądzem?

# Jak zdobyć Nobla z matematyki ?

o Johnie Nashu i Lloydzie Shapleyu

Jacek Miękiś  
Instytut Matematyki Stosowanej  
Uniwersytet Warszawski

# Dlaczego nie ma Nagrody Nobla z matematyki ?

## Odpowiedź romantyczna

Bo Alfred Nobel nie chciał by nagrodę dostał matematyk Gustav Mittag-Leffler, który odbił mu jego ukochaną.

## Odpowiedź pesymistyczna

Bo nagroda ma trafiać do tych, którzy „wyświadczyli ludzkości największe dobrodziejstwa”.

## Odpowiedź filozoficzna

By nagradzać tych, którzy odkrywają prawa natury.

# Nagroda Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych



The Royal Swedish Academy of Sciences has decided to award the Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel, 1994, jointly to

Professor John C. Harsanyi, University of California, Berkeley, CA, USA,

Dr. John F. Nash, Princeton University, Princeton, NJ, USA,

Professor Dr. Reinhard Selten, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn, Germany,

“for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games”.



The Royal Swedish Academy of Sciences  
has decided to award The Sveriges  
Riksbank Prize in Economic Sciences in  
Memory of Alfred Nobel for 2012 to

Alvin E. Roth  
Harvard University, Cambridge, MA, USA,  
and Harvard Business School, Boston, MA,  
USA

and

Lloyd S. Shapley  
University of California, Los Angeles, CA,  
USA

"for the theory of stable allocations and the  
practice of market design".

John Nash (13 czerwca 1928 – 23 maja 2015)

Doktorat, Princeton University, 1950

dotyczył równowag Nasha

Lloyd Shapley (2 czerwca 1923 - 12 marca 2016)

Doktorat, Princeton University, 1953

dotyczył wartości Shapleya

# Gra

1) Zbiór graczy  $n=2$ , dwóch myśliwych

$$I = \{1, \dots, n\}$$

2) Zbiór strategii  $S = \{\text{polować na jelenia, gonić zająca}\}$

$$S = \{1, \dots, m\}$$

3) Wyплаты

$$u_i: S^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$i=1, \dots, n$

		J	Z	J	Z
jeleń - 10	J	5	0	5	3
zając - 3	Z	3	3	0	

# Jak grać?

## Równowaga Nasha

Przypisanie graczom strategii, tak iż żadnemu z graczy, przy ustalonych strategiach wszystkich innych graczy, nie opłaca się zmienić swojej strategii



	J	Z	J	Z
J	5	0	5	3
Z	3	3	0	3

równowagi Nasha: (J,J), (Z,Z)

# Gra w kamień, papier, nożyczki

	R	S	P
R	1	2	0
S	0	1	2
P	2	0	1

nie ma równowag Nasha



# Strategie mieszane

Rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze czystych strategii  $S$

$\Delta$  - zbiór wszystkich strategii mieszanych

$$\Delta = \left\{ x \in R^m; x = \{x_1, \dots, x_m\}, x_k \geq 0, \sum_{k=1}^m x_k = 1 \right\}$$

$$\Theta = \times_{i=1}^n \Delta \quad \text{zbiór profili}$$

Niech  $s = (s_1, \dots, s_n) \equiv (s_i, s_{-i}) \in S^n$

i  $X \in \Theta$

$$u_i(X) = \sum_{s \in S^n} X(s) u_i(s)$$

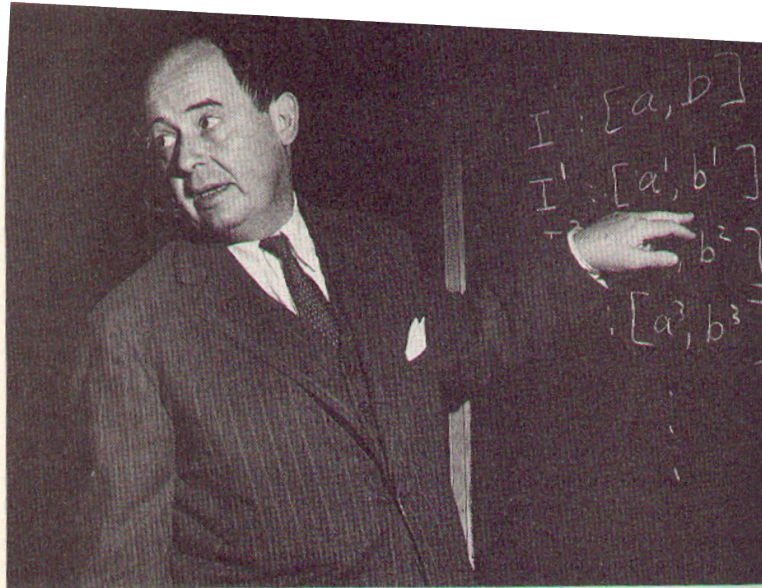
## Definicja

$X^*$  jest równowagą Nasha

jeśli dla każdego gracza  $i$  i dla każdej mieszanej strategii  $x \in \Theta$

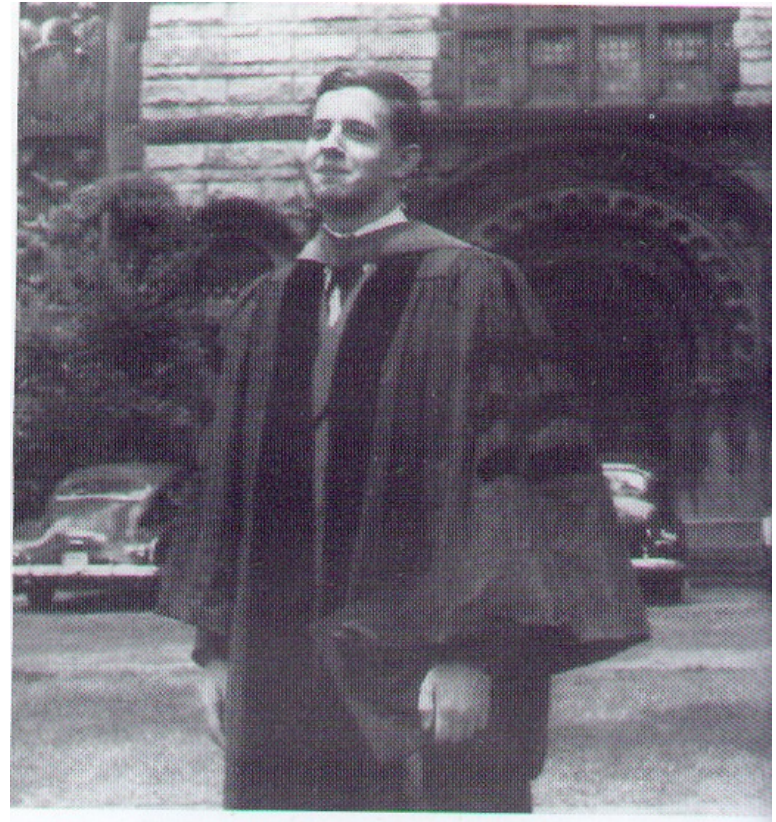
$$u_i(X_i^*, X_{-i}^*) \geq u_i(x, X_{-i}^*)$$

# Spotkanie w Princeton, 1949



Von Neumann lecturing to students. He was notorious for dashing out equations on the blackboard and erasing them before students had time to copy them. (Photo © Wolf-Semana/*Time* magazine)

John von Neumann 1903-1957



John Forbes Nash 1928-2015

## Twierdzenie (Nash, 1950)

Każda skończona gra ma co najmniej jedną równowagę Nasha.

Dowód:

odwzorowanie najlepszej odpowiedzi  $\beta_i : \Theta \rightarrow \Delta$

$$\beta_i(X) = \{y, u_i(y, X_{-i}) \geq u_i(x, X_{-i}) \quad \forall x \in \Delta\}$$

$$\beta = \times_i \beta_i \quad \beta : \Theta \rightarrow \Theta$$

równowagi Nasha to punkty stałe  $\beta$

Punkty takie istnieją co wynika

z twierdzenia o punkcie stałym Kakutaniego.

# Gry mitosne Lloyd Shapleya





## Allocation Games—the Deferred Acceptance Algorithm\*

Prize Lecture, December 8, 2012

by Lloyd S. Shapley

University of California, Los Angeles, CA, USA

**M**y work is in a branch of mathematics called “game theory.” Game theory is a mathematical study of conflict and cooperation between any number of rational decision-makers, or “players.” As such, it is a very useful tool for economists, as a large part of their work involves situations with multiple players working for optimal solutions.

One type of problem involves “matching,” that is, the allocation of items or partners, based upon their preferences.

In this example, we look at a set of boys and girls arranging their dates. First, each player ranks the members of the opposite sex in order of their desirability.

źródło:<http://www.nobelprize.org>



Boys' Preferences			
Adam	Bob	Charlie	Don
Mary	Jane	Mary	Mary
Jane	Mary	Kate	Kate
Kate	Kate	Jane	Jane

Girls' Preferences		
Mary	Jane	Kate
Adam	Adam	Don
Bob	Charlie	Charlie
Charlie	Don	Bob
Don	Bob	Adam

	Round 1	Round 2	Round 3	Round 4	Round 5
Mary	<b>Adam</b> (Charlie & Don rejected)	<b>Adam</b> (no new proposal)	<b>Adam</b> (no new proposal)	<b>Adam</b> (Bob rejected)	<b>Adam</b> (no new proposal)
Kate	No proposal	<b>Don</b> (Charlie rejected)	<b>Don</b> (no new proposal)	<b>Don</b> (no new proposal)	<b>Don</b> (Bob rejected)
Jane	<b>Bob</b>	<b>Bob</b> (no new proposal)	<b>Charlie</b> (Bob rejected)	<b>Charlie</b> (no new proposal)	<b>Charlie</b> (no new proposal)

# Algorytm Gale-Shapleya

Stabilny zbiór par jest równowagą Nasha



# Gry kooperacyjne Lloyda Shapleya



# Orkiestra jazzowa

za

Marcin Malawski, Andrzej Wieczorek, Honorata Sosnowska  
Konkurencja i kooperacja, Teoria gier w ekonomii i nauka społecznych  
PWN 1997

Zespół jazzowy składający się ze śpiewaka, pianisty i perkusisty dostał kontrakt na występ za 1000 PLN.

Jak podzielić wypłatę między trzech muzyków ?

Każdemu według potrzeb ... to już przerabialiśmy.

Każdemu po równo ... to może nie jest sprawiedliwe.

# Wartość Shapleya

Wyплаты poszczególnych koalicji (podzespołów)

Śpiewak, Pianista, Perkusista	1000
Śpiewak, Pianista	800
Pianista, Perkusista	650
Śpiewak, Perkusista	500
Pianista	300
Śpiewak	200
Perkusista	0

Wkłady poszczególnych muzyków w trakcie tworzenia zespołu

Kolejność	Wkład Śpiewaka	Wkład Pianisty	Wkład Perkusisty
Śp, Pia, Perk	200	600	200
Śp, Perk, Pia	200	500	300
Pia, Śp, Perk	500	300	200
Pia, Perk, Śp	350	300	350
Perk, Śp, Pia	500	500	0
Perk, Pia, Śp	350	650	0
Średnia	350	475	175

(Wartość Shapleya)

# Gra kooperacyjna w postaci charakterystycznej

$$I = \{1, \dots, n\}, \mu : 2^I \rightarrow R$$

$\mu(I)$  - kwota do podziału

$K \subset I, \mu(K)$  - wartość koalicji

$(x_1, \dots, x_n)$  jest podziałem indywidualnie racjonalnym jeśli

$$x_1 + \dots + x_n = \mu(I) \text{ i } x_i \geq \mu(\{x_i\})$$

# Aksjomaty Wartości Shapleya

## 1. Równość

Jeśli  $i$  i  $j$  odgrywają symetryczną rolę, to  $x_i = x_j$ .

## 2. Sprawiedliwość

Jeśli  $\mu(S) = \mu(S - i)$  dla każdego  $S \subset I$ , to  $x_i = 0$

## 3. Addytywność

$(I, \mu), (I, \omega), (I, \mu + \omega)$

dla każdego  $i \in I$ ,  $x_i^{\mu+\omega} = x_i^\mu + x_i^\omega$

Twierdzenie (Shapley 1953)

Jedynie wartość Shapleya spełnia aksjomaty 1-3

# Posłowie

Lloyd Shapley: "I consider myself a mathematician and the award is for economics. I never, never in my life took a course in economics

The Norwegian Academy of Sciences and Letters has decided to award the Abel Prize for 2015 to the American mathematicians John F. Nash, Jr. and Louis Nirenberg "for striking and seminal contributions to the theory of nonlinear partial differential equations and its applications to geometric analysis."

# Wskazówki dla młodych matematyków

Jeśli chcesz zdobyć Nobla, to

1. Ucz się języków obcych, to znaczy biologii, fizyki, ekonomii.
2. Rozwiązuj dany problem, szukaj i rozwijaj odpowiednie narzędzia matematyczne a nie szukaj zastosowania Twojej ulubionej techniki matematycznej.
3. Zaakceptuj, że najprawdopodobniej Twoje osiągnięcie nie będzie wyrażone matematycznie.
4. Zaakceptuj, że Twoi koledzy matematycy nie będą uważać Ciebie za matematyka.

Dziękuję za uwagę

<https://www.mimuw.edu.pl/~miekisz>