Dlaczego do finansów nie wystarczą proste rachunki, a jest potrzebna matematyka finansowa?

Jacek Jakubowski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski
i
Wydział MiNI Politechniki Warszawskiej

LV Szkoła Matematyki Poglądowej, 30 styczeń 2017

Matematyka finansowa jest potrzebna, by modelować rynek i ryzyko na nim, co pozwala m.in.:

Matematyka finansowa jest potrzebna, by modelować rynek i ryzyko na nim, co pozwala m.in.:

1. Wyceniać wypłaty/ strumienie wypłat (jest to szczególnie istotne dla instrumentów niepłynnych).

Matematyka finansowa jest potrzebna, by modelować rynek i ryzyko na nim, co pozwala m.in.:

1. Wyceniać wypłaty/ strumienie wypłat (jest to szczególnie istotne dla instrumentów niepłynnych).

2. Podać sposób postepowania sprzedającego wypłatę by mógł wywiązać się ze swoich zobowiązań.

Matematyka finansowa jest potrzebna, by modelować rynek i ryzyko na nim, co pozwala m.in.:

1. Wyceniać wypłaty/ strumienie wypłat (jest to szczególnie istotne dla instrumentów niepłynnych).
2. Podać sposób postepowania sprzedającego wypłatę by mógł wywiązać się ze swoich zobowiązań.
3. Przewidywać przyszłe zachowania cen, co można robić mając model dynamiczny (przewaga modelu na badaniami statystycznymi).

Matematyka finansowa jest potrzebna, by modelować rynek i ryzyko na nim, co pozwala m.in.:

1. Wyceniać wypłaty/ strumienie wypłat (jest to szczególnie istotne dla instrumentów niepłynnych).
2. Podać sposób postepowania sprzedającego wypłatę by mógł wywiązać się ze swoich zobowiązań.
3. Przewidywać przyszłe zachowania cen, co można robić mając model dynamiczny (przewaga modelu na badaniami statystycznymi).
4. Konstruować różne miary ryzyka oceniające różne sposoby postępowania na rynku (ryzyko związane z zajęciem konkretnej pozycji).

Matematyka finansowa jest potrzebna, by modelować rynek i ryzyko na nim, co pozwala m.in.:

1. Wyceniać wypłaty/ strumienie wypłat (jest to szczególnie istotne dla instrumentów niepłynnych).
2. Podać sposób postepowania sprzedającego wypłatę by mógł wywiązać się ze swoich zobowiązań.
3. Przewidywać przyszłe zachowania cen, co można robić mając model dynamiczny (przewaga modelu na badaniami statystycznymi).
4. Konstruować różne miary ryzyka oceniające różne sposoby postępowania na rynku (ryzyko związane z zajęciem konkretnej pozycji).
5. Uwzględniać wpływ różnych czynników ekonomicznych (np. ratingów).

Wprowadzenie - jak wyceniać i zabezpieczać wypłaty?

Przyjmujemy także założenie, że rynek jest rynkiem idealnym tzn. oprocentowanie kredytów i depozytów bankowych jest jednakowe, inwestorzy nie ponoszą żadnych kosztów, tzn. kosztów transakcji, kosztów prowizji, nie płacą podatków, itp., nie ma ograniczeń w dostępie do kredytów oraz rynek jest płynny, tzn. możemy kupić lub sprzedać dowolną liczbę aktywów.

Wprowadzenie - jak wyceniać i zabezpieczać wypłaty?

Przyjmujemy także założenie, że rynek jest rynkiem idealnym tzn. oprocentowanie kredytów i depozytów bankowych jest jednakowe, inwestorzy nie ponoszą żadnych kosztów, tzn. kosztów transakcji, kosztów prowizji, nie płacą podatków, itp., nie ma ograniczeń w dostępie do kredytów oraz rynek jest płynny, tzn. możemy kupić lub sprzedać dowolną liczbę aktywów.

Rozważmy najprostszy model rynku finansowego - rynek jednookresowy dwustanowy. Zatem $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, prawdopodobieństwo P jest takie, że $P(\{\omega_1\}) = p > 0$, $P(\{\omega_2\}) = 1 - p > 0$. Na rynku jednookresowym dwustanowym transakcje odbywają się w dwu chwilach czasu: chwili 0 i chwili T.

Dwa papiery wartościowe: jeden ryzykowny (np. akcje) o cenie S_t i drugi pozbawiony ryzyka – rachunek bankowy o cenie B_t, gdzie $t \in \{0, T\}$. Są to instrumenty bazowe na tym rynku. Stopa procentowa jest stała i wynosi r w okresie czasu od 0 do T.

Zatem

$$B_0 = 1, \quad B_T = 1 + r,$$

$$S_0 = s, \qquad S_T(\omega) = \begin{cases} S^u, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ S^d, & \text{gdy } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Na rynku istnieje wiele instrumentów pochodnych, tzn. takich, których cena zależy od cen aktywów podstawowych np.
europejska opcja kupna: wypłata $(S_T - K)^+$.
Każde aktywo pochodne można utożsamiać z wypłatą X generowaną przez to aktywo. Wypłata X zależy od scenariusza, więc jest zmienną losową określoną na Ω.

Zatem

$$B_0 = 1, \quad B_T = 1 + r,$$

$$S_0 = s, \qquad S_T(\omega) = \begin{cases} S^u, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ S^d, & \text{gdy } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Na rynku istnieje wiele instrumentów pochodnych, tzn. takich, których cena zależy od cen aktywów podstawowych np.
europejska opcja kupna: wypłata $(S_T - K)^+$.
Każde aktywo pochodne można utożsamiać z wypłatą X generowaną przez to aktywo. Wypłata X zależy od scenariusza, więc jest zmienną losową określoną na Ω.
Wiemy, ile możemy dostać w przyszłości, gdy posiadamy wypłatę europejską. Powstaje pytanie ile za tę wypłatę powinniśmy zapłacić (jest to problem wyceny opcji).

Przykład 1:

Zakładamy, że dwa możliwe scenariusze są jednakowo prawdopodobne. Aktywo ryzykowne: $S_0 = 1$, $S_1(\omega_1) = 7$, $S_1(\omega_2) = 1$. Cena aktywa bez ryzyka jest równa $B_0 = 1$, $B_1 = 2$. Jak wycenić opcję kupna dającą wypłatę końcową $C_1 = (S_1 - K)^+$, gdy $K = 3$.

Przykład 1:

Zakładamy, że dwa możliwe scenariusze są jednakowo prawdopodobne. Aktywo ryzykowne: $S_0 = 1$, $S_1(\omega_1) = 7$, $S_1(\omega_2) = 1$. Cena aktywa bez ryzyka jest równa $B_0 = 1$, $B_1 = 2$. Jak wycenić opcję kupna dającą wypłatę końcową $C_1 = (S_1 - K)^+$, gdy $K = 3$.

Korzystamy z metod matematyki ubezpieczeniowej. Dla ustalonego scenariusza wartość dzisiejsza strumienia pieniędzy jest równa sumie zdyskontowanych przepływów. Zatem możemy przypuszczać, że cena opcji

$$C_0 = E\left(\frac{C_1}{B_1}\right) = \frac{1}{2}[0{,}5 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 0] = 1,$$

gdyż $C_1(\omega_1) = 4$, $C_1(\omega_2) = 0$.

Przykład 1:

Zakładamy, że dwa możliwe scenariusze są jednakowo prawdopodobne. Aktywo ryzykowne: $S_0 = 1$, $S_1(\omega_1) = 7$, $S_1(\omega_2) = 1$. Cena aktywa bez ryzyka jest równa $B_0 = 1$, $B_1 = 2$. Jak wycenić opcję kupna dającą wypłatę końcową $C_1 = (S_1 - K)^+$, gdy $K = 3$.

Korzystamy z metod matematyki ubezpieczeniowej. Dla ustalonego scenariusza wartość dzisiejsza strumienia pieniędzy jest równa sumie zdyskontowanych przepływów. Zatem możemy przypuszczać, że cena opcji

$$C_0 = E\left(\frac{C_1}{B_1}\right) = \frac{1}{2}[0{,}5 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 0] = 1,$$

gdyż $C_1(\omega_1) = 4$, $C_1(\omega_2) = 0$.

Ale, czy tak wyliczona cena opcji jest sensowna?

Przykład 1:

Zakładamy, że dwa możliwe scenariusze są jednakowo prawdopodobne. Aktywo ryzykowne: $S_0 = 1$, $S_1(\omega_1) = 7$, $S_1(\omega_2) = 1$. Cena aktywa bez ryzyka jest równa $B_0 = 1$, $B_1 = 2$. Jak wycenić opcję kupna dającą wypłatę końcową $C_1 = (S_1 - K)^+$, gdy $K = 3$.

Korzystamy z metod matematyki ubezpieczeniowej. Dla ustalonego scenariusza wartość dzisiejsza strumienia pieniędzy jest równa sumie zdyskontowanych przepływów. Zatem możemy przypuszczać, że cena opcji

$$C_0 = E\left(\frac{C_1}{B_1}\right) = \frac{1}{2}[0{,}5 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 0] = 1,$$

gdyż $C_1(\omega_1) = 4$, $C_1(\omega_2) = 0$.

Ale, czy tak wyliczona cena opcji jest sensowna? NIE. Tak wyliczona cena opcji jest równa 1, ale nikt rozsądny nie będzie kupował opcji za tę cenę, gdyż lepiej kupić za tę cenę akcję. Akcja daje zawsze większy zysk niż opcja. Przy tej wycenie na rynku pojawiła się możliwość uzyskania zysku bez ryzyka. Sprzedajemy opcje i za uzyskane pieniądze kupujemy akcje.

Poprzednia sytuacja wyniknęła z przyjęcia założenia, że oba scenariusze wydarzeń są równoprawdopodobne. Załóżmy, że scenariusze mają różne szanse realizacji. Gdy $P(\{\omega_1\}) = p \in (0,1)$, to licząc j.w. otrzymujemy $C_0 = 2p$.

Tu oczywiście widać, że tak wyznaczona wielkość zależy od wyboru prawdopodobieństwa P, zatem od oszacowania szans zajścia poszczególnych scenariuszy na rynku przez inwestora.

Poprzednia sytuacja wyniknęła z przyjęcia założenia, że oba scenariusze wydarzeń są równoprawdopodobne. Załóżmy, że scenariusze mają różne szanse realizacji. Gdy $P(\{\omega_1\}) = p \in (0,1)$, to licząc j.w. otrzymujemy $C_0 = 2p$.

Tu oczywiście widać, że tak wyznaczona wielkość zależy od wyboru prawdopodobieństwa P, zatem od oszacowania szans zajścia poszczególnych scenariuszy na rynku przez inwestora.

Jakie przyjąć kryterium wyboru rozkładu prawdopodobieństwa P dającego prawdziwą cenę opcji na rynku?

Więcej, nie jest jasne co to jest cena. Zatem jak wyceniać na chwilę obecną wypłatę X otrzymywaną w chwili końcowej?

Idea rozwiązania tego problemu: **portfel replikujący**.
Portfel $\varphi = (\beta, \alpha)$ jest to para liczb, gdzie α jest liczbą posiadanych akcji w chwili zero, zaś β jest wysokością wkładu bankowego (ewentualnie wielkością kredytu, gdy $\beta < 0$) w chwili zero.
Każda para $(\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ tworzy portfel, co odzwierciedla fakt, że można handlować dowolną liczbą aktywów, dopuszczenie wartości ujemnych β oznacza, że możemy dowolnie dużo pożyczać, a dopuszczenie wartości ujemnych α oznacza, że rynek ten dopuszcza także *krótką sprzedaż* akcji.
Zbiór wszystkich możliwych portfeli oznaczać będziemy przez Φ. W modelu, który przyjęliśmy, $\Phi = \mathbb{R}^2$.
Dla przykładu, portfel $(-3, 7)$ oznacza, że w portfelu jest siedem akcji, tzn. inwestor kupił 7 akcji i pożyczył 3 jednostki z banku.

Wartość portfela

Niech $\varphi = (\beta, \alpha)$ będzie portfelem inwestora, który sprzedał wypłatę X. Wartość portfela $V_t(\varphi)$ w chwili t wynosi dla $t = 0$ i $t = T$, odpowiednio:

$$V_0(\varphi) = \alpha S_0 + \beta, \quad V_T(\varphi) = \alpha S_T + \beta(1 + r).$$

Inwestor sprzedający wypłatę X musi umieć ją zabezpieczyć tzn. wartość portfela φ zbudowanego za otrzymane ze sprzedaży pieniądze musi w chwili T być równa wartości wypłaty, czyli portfel φ musi replikować wypłatę X:

$$V_T(\varphi)(\omega_i) = X(\omega_i) \qquad \text{dla } i = 1, 2.$$

Portfel φ jest **doskonałym zabezpieczeniem** wypłaty X, gdyż eliminuje całkowicie ryzyko. Znajdując taki portfel inwestor rozwiązuje drugi podstawowy problem matematyki finansowej: jak zabezpieczyć wypłatę X posiadając pieniądze z jej sprzedaży?

Naturalne jest zdefiniowanie racjonalnej ceny $\Pi_0(X)$ wypłaty X jako początkowej inwestycji potrzebnej do konstrukcji portfela replikującego, tzn.:

$$\Pi_0(X) \stackrel{def.}{=} V_0(\varphi),$$

gdzie φ jest portfelem replikującym.
Fakt. Na rynku dwustanowym jednookresowym każda wypłata jest replikowalna.

Przykład

Wycenimy opcję z przykładu 1. Portfel $\varphi = (\alpha, \beta)$ jest portfelem replikującym, gdy

$$7\alpha + 2\beta = 4, \quad \alpha + 2\beta = 0.$$

Ten układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie: $\alpha = 2/3$, $\beta = -1/3$. Stąd $C_0 = V_0(\varphi) = 2/3 - 1/3 = 1/3$.

Znając skład portfela replikującego wystawca opcji wie jak wygenerować wielkość $(S_T - 3)^+$ w chwili T dysponując zapłatą za opcję. Zatem potrafi rozwiązać problem zabezpieczenia wypłaty - problem hedgingu.

Przykład

Gdy $S_0 = 10$, $S^d = 12$, $S^u = 13$, $X^d = 5$, $X^u = 15$, $r = 0,1$, *to otrzymujemy* $\Pi_0(X) = -50/11$.
Na tym rynku możemy osiągnąć zysk bez ryzyka pożyczając 10 jednostek z banku i kupując za tę kwotę akcję. Wtedy w chwili T *sprzedając akcję otrzymujemy co najmniej 12, a do banku musimy zwrócić 11.*

Chcemy takie sytuacje wykluczyć, zatem chcemy z rynku wykluczyć portfel φ (nazywany arbitrażem lub portfelem arbitrażowym) dla którego

$$V_0(\varphi) = 0, \qquad V_T(\varphi) \geq 0, \quad \exists\, \omega \in \Omega \quad V_T(\varphi)(\omega) > 0.$$

Mówimy, że model rynku $\mathcal{M} = (S, B, \Phi)$ jest wolny od arbitrażu, gdy nie ma możliwości arbitrażu w klasie portfeli Φ.
Istnienie możliwości arbitrażu świadczy o serii poważnych błędów w wycenie instrumentów na rynku. Zatem model rynku powinien być modelem bez możliwości arbitrażu.

Liczenie wprost z definicji ceny instrumentu pochodnego na dowolnym rynku bez możliwości arbitrażu jest bardzo skomplikowane.

Liczenie wprost z definicji ceny instrumentu pochodnego na dowolnym rynku bez możliwości arbitrażu jest bardzo skomplikowane.
Czy możemy wyliczyć cenę instrumentu pochodnego opierając się na liczeniu wartości oczekiwanej względem pewnej wyróżnionej miary probabilistycznej? Znowu przeprowadzimy rozważania dla rynku jednookresowego dwustanowego.

cd. przykładu 1.

$S_0 = 1$, $S_1(\omega_1) = 7$, $S_1(\omega_2) = 1$, $B_0 = 1$, $B_1 = 2$. Wiemy, że cena wypłaty $X = C_1 = (S_1 - 3)^+$ jest równa $C_0 = 1/3$. Zatem $C_0 \in [0, 2]$, gdzie $X(\omega_1)/B_1 = 0, X(\omega_2)/B_1 = 2$, Stąd dla $q = 1/6$

$$C_0 = qX(\omega_1)/B_1 + (1 - q)X(\omega_2)/B_1 = E_Q X,$$

gdzie $Q(\{\omega_1\}) = q = 1/6$, $Q(\{\omega_2\}) = 1 - q$. Dla tej miary probabilistycznej Q zachodzi także

$$S_0 = 1 = 7/12 + 5/12 = E_Q S_1/B_1.$$

Czy jest to przypadek wynikający ze szczególnego doboru danych? Czy cena jest wartością oczekiwaną wypłaty względem pewnego rozkładu?

Czy jest to przypadek wynikający ze szczególnego doboru danych? Czy cena jest wartością oczekiwaną wypłaty względem pewnego rozkładu?

Czy jest to przypadek wynikający ze szczególnego doboru danych? Czy cena jest wartością oczekiwaną wypłaty względem pewnego rozkładu?
Rynek jest bez możliwości arbitrażu $\Longleftrightarrow$ gdy $S^d < S_0(1+r) < S^u$ tzn. $S_0(1+r)$ jest kombinacją wypukłą końców odcinka
$\Longleftrightarrow$ gdy istnieje $\gamma \in (0,1)$, takie że

$$S_0(1+r) = \gamma S^u + (1-\gamma)S^d.$$

Liczba γ zadaje nowe prawdopodobieństwo Q, takie że $Q(\omega_1) = \gamma$. Wtedy

$$S_0 = \frac{1}{1+r} E_Q S_T,$$

czyli otrzymaliśmy wzór przedstawiający cenę dzisiejszą jako zdyskontowaną wartość oczekiwaną ceny jutrzejszej względem prawdopodobieństwa Q.

Czy jest to przypadek wynikający ze szczególnego doboru danych? Czy cena jest wartością oczekiwaną wypłaty względem pewnego rozkładu? Rynek jest bez możliwości arbitrażu $\iff$ gdy $S^d < S_0(1+r) < S^u$ tzn. $S_0(1+r)$ jest kombinacją wypukłą końców odcinka $\iff$ gdy istnieje $\gamma \in (0,1)$, takie że

$$S_0(1+r) = \gamma S^u + (1-\gamma) S^d.$$

Liczba γ zadaje nowe prawdopodobieństwo Q, takie że $Q(\omega_1) = \gamma$. Wtedy

$$S_0 = \frac{1}{1+r} E_Q S_T,$$

czyli otrzymaliśmy wzór przedstawiający cenę dzisiejszą jako zdyskontowaną wartość oczekiwaną ceny jutrzejszej względem prawdopodobieństwa Q. Brak możliwości arbitrażu $\equiv$ istnieniu prawdopodobieństwa Q, takiego $S_0 = \frac{1}{1+r} E_Q S_T$.

Mając takie Q znajdujemy cenę. Gdy $\varphi = (\beta, \alpha)$ jest portfelem replikującym X (taki jest tylko jeden), to

$$\begin{aligned} E_Q\Big(\frac{X}{1+r}\Big) &= E_Q\Big(\frac{V_T(\varphi)}{1+r}\Big) = E_Q\Big(\frac{\alpha S_T}{1+r} + \frac{(1+r)\beta}{1+r}\Big) = \\ &= E_Q\Big(\frac{\alpha S_T}{1+r}\Big) + \beta = \alpha S_0^* + \beta = V_0(\varphi) = \Pi_0(X). \end{aligned}$$

Mając takie Q znajdujemy cenę. Gdy $\varphi = (\beta, \alpha)$ jest portfelem replikującym X (taki jest tylko jeden), to

$$\begin{aligned} E_Q\Big(\frac{X}{1+r}\Big) &= E_Q\Big(\frac{V_T(\varphi)}{1+r}\Big) = E_Q\Big(\frac{\alpha S_T}{1+r} + \frac{(1+r)\beta}{1+r}\Big) = \\ &= E_Q\Big(\frac{\alpha S_T}{1+r}\Big) + \beta = \alpha S_0^* + \beta = V_0(\varphi) = \Pi_0(X). \end{aligned}$$

Jak to przenieść na modele ogólne?

Opiszemy idee rozwiązania tego problemu na przykładzie rynku z czasem dyskretnym.

S to wektor cen $(k+1)$ instrumentów finansowych (instrumentów pierwotnych) istniejących na tym rynku

$$S_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^k)',$$

S jest procesem adaptowanym. $S^0 \stackrel{(\mathrm{ozn})}{=} B$ jest ceną aktywa bez ryzyka, jest to proces prognozowalny.

Opiszemy idee rozwiązania tego problemu na przykładzie rynku z czasem dyskretnym.

S to wektor cen $(k+1)$ instrumentów finansowych (instrumentów pierwotnych) istniejących na tym rynku

$$S_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^k)',$$

S jest procesem adaptowanym. $S^0 \overset{\text{(ozn)}}{=} B$ jest ceną aktywa bez ryzyka, jest to proces prognozowalny.
Wypłatą (europejską) X w chwili T nazwiemy dowolną zmienną losową $\mathcal{F}_T$-mierzalną.

Opiszemy idee rozwiązania tego problemu na przykładzie rynku z czasem dyskretnym.

S to wektor cen $(k+1)$ instrumentów finansowych (instrumentów pierwotnych) istniejących na tym rynku

$$S_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^k)',$$

S jest procesem adaptowanym. $S^0 \overset{(\mathrm{ozn})}{=} B$ jest ceną aktywa bez ryzyka, jest to proces prognozowalny.
Wypłatą (europejską) X w chwili T nazwiemy dowolną zmienną losową $\mathcal{F}_T$-mierzalną.
Strategią finansową (portfelem) będziemy nazywać dowolny proces prognozowalny $(\varphi_t)_{t\in\mathcal{T}}$ o wartościach w R^{k+1}:

$$\varphi_t = (\varphi_t^0, \varphi_t^1, \ldots, \varphi_t^k)'.$$

Portfel φ nazywamy samofinansującym się gdy

$$\sum_{i=0}^{k} \varphi_t^i S_t^i = \sum_{i=0}^{k} \varphi_{t+1}^i S_t^i.$$

Portfel φ nazywamy samofinansującym się gdy

$$\sum_{i=0}^{k} \varphi_t^i S_t^i = \sum_{i=0}^{k} \varphi_{t+1}^i S_t^i.$$

Wartością portfela φ w chwili t nazywamy liczbę:

$$V_t(\varphi) = \sum_{i=0}^{k} \varphi_t^i S_t^i.$$

Portfel φ jest samofinansujący się wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich t spełniona jest równość

$$V_t(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{u=0}^{t-1} \varphi_{u+1}(S_{u+1} - S_u).$$

Wypłatę X nazwiemy **osiągalną**, gdy istnieje portfel φ taki, że $V_T(\varphi) = X$.

Wypłatę X nazwiemy **osiągalną**, gdy istnieje portfel φ taki, że $V_T(\varphi) = X$.

Ale trzeba wykluczyć **arbitraż**, zatem wykluczyć możliwość osiągnięcia zysku bez ryzyka przy pomocy odpowiedniej strategii.

Wypłatę X nazwiemy **osiągalną**, gdy istnieje portfel φ taki, że $V_T(\varphi) = X$.

Ale trzeba wykluczyć **arbitraż**, zatem wykluczyć możliwość osiągnięcia zysku bez ryzyka przy pomocy odpowiedniej strategii.

Zatem na rynku bez możliwości arbitrażu cenę wypłaty osiągalnej X w chwili t definiujemy jak wartość portfela replikującego X w chwili t.

Wypłatę X nazwiemy **osiągalną**, gdy istnieje portfel φ taki, że $V_T(\varphi) = X$.

Ale trzeba wykluczyć **arbitraż**, zatem wykluczyć możliwość osiągnięcia zysku bez ryzyka przy pomocy odpowiedniej strategii.

Zatem na rynku bez możliwości arbitrażu cenę wypłaty osiągalnej X w chwili t definiujemy jak wartość portfela replikującego X w chwili t.

Problem: Znaleźć narzędzia pozwalające znajdować ceny i odpowiednie strategie.

Miara martyngałowa

Wszystko dzieje się na ustalonej przestrzeni probabilistycznej z filtracją. Model rynku finansowego to para $\mathcal{M} = (S, \Phi)$, gdzie S to wektor cen $(k+1)$ instrumentów finansowych, a Φ podklasa strategii samofinansujących się. Zakładamy, że na rynku nie istnieje strategia arbitrażowa.

Miara martyngałowa

Wszystko dzieje się na ustalonej przestrzeni probabilistycznej z filtracją. Model rynku finansowego to para $\mathcal{M} = (S, \Phi)$, gdzie S to wektor cen $(k+1)$ instrumentów finansowych, a Φ podklasa strategii samofinansujących się. Zakładamy, że na rynku nie istnieje strategia arbitrażowa.

Wartość procesu replikującego wypłatę osiągalną X nazywamy ceną arbitrażową X na rynku $\mathcal{M}$ i oznaczamy przez $\Pi_t(X)$.

Miara martyngałowa

Wszystko dzieje się na ustalonej przestrzeni probabilistycznej z filtracją. Model rynku finansowego to para $\mathcal{M} = (S, \Phi)$, gdzie S to wektor cen $(k+1)$ instrumentów finansowych, a Φ podklasa strategii samofinansujących się. Zakładamy, że na rynku nie istnieje strategia arbitrażowa.

Wartość procesu replikującego wypłatę osiągalną X nazywamy ceną arbitrażową X na rynku $\mathcal{M}$ i oznaczamy przez $\Pi_t(X)$.

Wektor $S^* = (1, S^{*1}, \ldots, S^{*k})'$, gdzie $S_t^{*i} = \frac{S_t^i}{B_t}$ dla $i = 1, \ldots, k$, nazwiemy zdyskontowanym procesem cen. Oznaczenie: $V_t^*(\varphi) = \frac{V_t(\varphi)}{B_t}$.

Definicja

Miarę probabilistyczną P^* na $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ równoważną z P nazywa się miarą martyngałową dla zdyskontowanego procesu cen S^*, gdy S^* jest P^*-martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_t$.

Definicja

Miarę probabilistyczną P^* na $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ równoważną z P nazywa się miarą martyngałową dla zdyskontowanego procesu cen S^*, gdy S^* jest P^*-martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_t$.

Strategia φ jest samofinansująca się wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $t \leq T$ zachodzi równość:

$$V_t^*(\varphi) = V_0^*(\varphi) + \sum_{u=0}^{t-1} \varphi_{u+1}(S_{u+1}^* - S_u^*).$$

Stąd strategia φ jest samofinansująca się wtedy i tylko wtedy, gdy $V_t^*(\varphi)$ jest martyngałem

Twierdzenie

Niech $\mathcal{P}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$. Wtedy $\mathcal{M}$ jest rynkiem bez możliwości arbitrażu. Ponadto, cena arbitrażowa w chwili t osiągalnej na rynku $\mathcal{M}$ wypłaty X jest dana wzorem

$$\Pi_t(X) = B_t E_{P^*}\left(\frac{X}{B_T}|\mathcal{F}_t\right),$$

dla dowolnego $P^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Twierdzenie

Niech $\mathcal{P}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$. Wtedy $\mathcal{M}$ jest rynkiem bez możliwości arbitrażu. Ponadto, cena arbitrażowa w chwili t osiągalnej na rynku $\mathcal{M}$ wypłaty X jest dana wzorem

$$\Pi_t(X) = B_t E_{P^*}\left(\frac{X}{B_T}|\mathcal{F}_t\right),$$

dla dowolnego $P^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Dla wypłaty nieosiągalnej wprowada się pojęcie ceny arbitrażowej uogólnionej, to taka cena instrumentu, która nie wprowadza arbitrażu na ten rynek. W chwili $t = 0$ jest to liczba z dobrze zdefiniowanego przedziału.

To wszystko w naturalny sposób przenosi się na rynek z czasem ciągłym ze skończoną liczbą instrumentów bazowych.

Klasyczny model Blacka-Scholesa Zakładamy, że

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad \sigma > 0, \quad \mu \in R,$$

$$dB_t = rB_t dt, \quad r \geq 0.$$

To wszystko w naturalny sposób przenosi się na rynek z czasem ciągłym ze skończoną liczbą instrumentów bazowych.

Klasyczny model Blacka-Scholesa Zakładamy, że

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad \sigma > 0, \quad \mu \in R,$$

$$dB_t = rB_t dt, \quad r \geq 0.$$

W klasycznym modelu Blacka-Scholesa istnieje jedyna miara martyngałowa. Dynamika S^* przy mierze P^* ma postać

$$dS_t^* = \sigma S_t^* d\widehat{W}_t,$$

gdzie $\widehat{W}_t = W_t - \frac{r-\mu}{\sigma} t$ jest P^*-procesem Wienera.

Twierdzenie - (sławne wzory Blacka-Scholesa)

Cena arbitrażowa europejskiej opcji kupna $C_t = C(S_t, t, T, K)$ z ceną wykonania K i momentem wykonania T na rynku Blacka-Scholesa jest równa:

$$C_t = c(S_t, T - t),$$

dla $t \in [0, T]$, przy czym funkcja $C : R_+ \times [0, T] \to R$ jest postaci

$$c(x, t) = x\, N(d_1(x, t)) - Ke^{-rt} N(d_2(x, t)),$$

gdzie

$$d_1(x, t) = \frac{\ln \frac{x}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad (1)$$

$$d_2(x, t) = d_1(x, t) - \sigma\sqrt{t} = \frac{\ln \frac{x}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad (2)$$

a $N(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu $N(0, 1)$.

W modelu Blacka-Scholesa każda wypłata w chwili T zdefiniowana przez $\mathcal{F}_T$ mierzalną zmienną losową X, która jest całkowalna z kwadratem względem P^* jest osiągalna i jej cena arbitrażowa jest równa

$$\Pi_t(X) = E_{P^*}(e^{-(T-t)r} X | \mathcal{F}_t). \tag{3}$$

W modelu Blacka-Scholesa każda wypłata w chwili T zdefiniowana przez $\mathcal{F}_T$ mierzalną zmienną losową X, która jest całkowalna z kwadratem względem P^* jest osiągalna i jej cena arbitrażowa jest równa

$$\Pi_t(X) = E_{P^*}(e^{-(T-t)r}X|\mathcal{F}_t). \tag{3}$$

Ale nie zawsze znajdujemy jawną formułę dającą cenę.

Często już nie potrafimy znaleźć jawnych wzorów na ceny:
np. na ceny opcji zależnych od całej trajektorii lub ceny opcji nieliniowych tzn. opcji o wypłacie $X = (h(S_T) - K)^+$ dla bardziej skomplikowanej postaci funkcji h.

W takich przypadkach często stosuje się metody symulacyjne opierające się na Mocnym Prawie Wielkich Liczb. Do wyliczenia tej wartości oczekiwanej używamy metod Monte Carlo.

Model Blacka-Scholesa – wszystko zależy od współczynnika zmienności σ. Pozostałe dane bierzemy z rynku.

Model Blacka-Scholesa – wszystko zależy od współczynnika zmienności σ. Pozostałe dane bierzemy z rynku.

Zmienność implikowana: Dla ustalonych T, K znajdujemy taką liczbę σ_{imp}, że

$$\text{cena rynkowa} = C(S_0, 0, T, K, \sigma_{imp}).$$

Okazuje się, że $\sigma_{imp} = \sigma_{imp}(K, T)$.

Model Blacka-Scholesa – wszystko zależy od współczynnika zmienności σ. Pozostałe dane bierzemy z rynku.

Zmienność implikowana: Dla ustalonych T, K znajdujemy taką liczbę σ_{imp}, że

$$\text{cena rynkowa} = C(S_0, 0, T, K, \sigma_{imp}).$$

Okazuje się, że $\sigma_{imp} = \sigma_{imp}(K, T)$.

Rynek rzeczywisty (realny, nie model) wycenia europejską opcję kupna za pomocą wzoru Blacka-Scholesa (tzn. formuły zadanej wzorem $C(S_t, t, T, K)$).
Zatem gdy proponuje sie inny model rynku, to cena europejskiej opcji kupna musi być zadana za pomocą wzoru Blacka-Scholesa.

Modele stochastycznej zmienności

Model zmienności lokalnej. Przy mierze martyngałowej P^*

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(S_t, t) S_t d\overline{W}_t,$$

Modele stochastycznej zmienności

Model zmienności lokalnej. Przy mierze martyngałowej P^*

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(S_t, t) S_t d\overline{W}_t,$$

Model stochastycznej zmienności. Przy mierze martyngałowej P^*

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t^*, \\ d\sigma_t &= \bar{a}(\sigma_t, t) dt + b(\sigma_t, t) d\widetilde{W}_t, \end{aligned}$$

gdzie W^* i $\widetilde{W}$ są standardowymi procesami Wienera na wspólnej przestrzeni probabilistycznej ze współczynnikiem korelacji $\rho \in [-1, 1]$.

Model Hestona

$$
\begin{aligned}
dS_t &= rS_t dt + \sqrt{\sigma_t} S_t dW_t^*, \\
d\sigma_t &= \kappa(\nu - \sigma_t)dt + \eta\sqrt{\sigma_t} d\widetilde{W}_t,
\end{aligned}
$$

gdzie $W^*, \widetilde{W}$ sa j.w. z ρ stałym, κ, η, ν są stałymi, $\nu > 0$ jest długoterminową średnią, $\kappa > 0$ współczynnikiem powrotu do średniej, $\eta \geq 0$ zmiennością kwadratu zmienności.

Model Hestona

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{\sigma_t} S_t dW_t^*, \\ d\sigma_t &= \kappa(\nu - \sigma_t)dt + \eta\sqrt{\sigma_t} d\widetilde{W}_t, \end{aligned}$$

gdzie W^*, $\widetilde{W}$ sa j.w. z ρ stałym, κ, η, ν są stałymi, $\nu > 0$ jest długoterminową średnią, $\kappa > 0$ współczynnikiem powrotu do średniej, $\eta \geq 0$ zmiennością kwadratu zmienności.

Ostatnio intensywnie bada się **model SABR** (stochastic $\alpha\beta\rho$ model)

$$\begin{aligned} dF_t &= v_t F_t^\beta dW_t^*, \\ dv_t &= \alpha v_t d\widetilde{W}_t, \qquad v_0 = a, \end{aligned}$$

gdzie W i $\overline{W}$ j.w., a stałe $\beta \in (0, 1)$, $\alpha > 0$.

Rynek obligacji

Instrumentem bazowym jest obligacja zero–kuponowa t.j. instrument płacący posiadaczowi 1 jednostkę pieniężną w ustalonej z góry chwili θ w przyszłości. Niech $P(t, \theta)$, $0 \leq t \leq \theta$ oznacza cenę rynkową obligacji w chwili t.

• Na rynku jest rachunek bankowy bezryzykowny zdany przez podanie stopy krótko terminowej (short term interest rate) r_t. Zatem $B_t = \exp(\int_0^t r_u du)$.

Jaki jest związek pomiędzy obligacją, a rachunkiem bankowym?

Rynek składający się z k obligacji i rachunku bankowego mieści się w poprzednim schemacie, więc

$$P(t,\theta) = B_t E_{P^*}\left(\frac{1}{B_\theta}|\mathcal{F}_t\right) = E_{P^*}(e^{-\int_t^\theta r_s ds}|\mathcal{F}_t)$$

dla $\theta \in \{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$.

Rynek składający się z k obligacji i rachunku bankowego mieści się w poprzednim schemacie, więc

$$P(t,\theta) = B_t E_{P^*}\left(\frac{1}{B_\theta}|\mathcal{F}_t\right) = E_{P^*}(e^{-\int_t^\theta r_s ds}|\mathcal{F}_t)$$

dla $\theta \in \{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$.
Ogólnie

Definicja

Rodzinę $P(t,\theta)$, $0 \leq t \leq \theta \leq T$ procesów adaptowanych nazywamy wolną od arbitrażu rodziną cen obligacji względem r jeśli
i) $P(\theta,\theta) = 1$ dla każdego $\theta \leq T$,
ii) istnieje miara probabilistyczna P^* taka, że $P^*(t,\theta) = P(t,\theta)/B_t$ jest P^*-martyngałem dla każdego $\theta \leq T$.

Zatem dla każdego terminu zapadalności θ:

$$P(t,\theta) = E_{P^*}(e^{-\int_t^\theta r_s ds}|\mathcal{F}_t)$$

Model - należy zachować balans pomiędzy komplikacją modelu, a jego użytecznością.

Model - należy zachować balans pomiędzy komplikacją modelu, a jego użytecznością.

Model free approach

Model - należy zachować balans pomiędzy komplikacją modelu, a jego użytecznością.

Model free approach

Kiedy ta teoria jest niepotrzebna? Kiedy tego typu matematyka jest zbędnym ozdobnikiem w finansach?

Model - należy zachować balans pomiędzy komplikacją modelu, a jego użytecznością.

Model free approach

Kiedy ta teoria jest niepotrzebna? Kiedy tego typu matematyka jest zbędnym ozdobnikiem w finansach?

Jest niepotrzebna dla ludzi i firm szukających natychmiastowego zysku i traktujących rynek jak pole gry.

Dla nich podstawowym narzędziem jest analiza techniczna (ale tu oprócz psychologii wykorzystuje się statystykę i informatykę).

Dziękuję za uwagę !