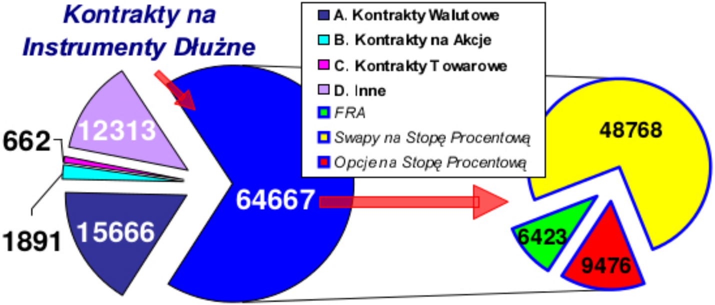

52 week
High
Low
Yld
Vol
P/e'000s
SUMMARY
AMERICA
ACTIVE STOCKS
LONDON
ACTIVE STOCKS
EURO MARKETS
ACTIVE STOCKS

Od obligacji do swapcji

Ile to kosztuje ?

Względny udział w rynku instrumentów pochodnych



Jaka jest cena pieniądza ?

Zwyczajowo jest to procent kapitału jaki podlega obrotowi.

Taka definicja nie jest wygodna.
Wygodniej jest odnieść ten procent do jednostkowego kapitału.
Wtedy mówimy o **stopie procentowej**.

Jak poprawnie zdefiniować stopę procentową

Rozważmy pożyczkę kapitału N.
Opłata za tę pożyczkę zależeć powinna nie tylko od wielości kapitału N, ale także od czasu na jaki pożyczamy te pieniądze.
Opłata ta powinna zależeć także od tego czy pożyczamy dziś, czy też dziś chcemy się umówić na pożyczkę, którą zaciągniemy za miesiąc.

Stóp procentowych może więc być wiele.

Jedna zasada obowiązuje powszechnie:
stopę procentową podaje się zawsze jako stopę odniesioną do jednego roku.

Jeśli kapitał N pożyczamy na okres inny niż 1 rok, to musimy znać regułę według której stopę roczną przelicza się na okresy o innej długości.

Obligacje

Zaczniemy od definicji abstrakcyjnej obligacji (zero-kuponowej).

Obligacja zero-kuponowa o czasie zapadalności T jest to papier wartościowy, który gwarantuje właścicielowi wypłatę jednostki waluty w chwili T. Cena w chwili $t \leqslant T$ obligacji o czasie zapadalności T oznaczana jest symbolem $P(t, T)$.

Z definicji tej wynika, że $P(T, T) = 1$. Założenie, że pieniądze można przechowywać bez ponoszenia dodatkowych kosztów, prowadzi do wniosku, że $P(t, T) \leqslant 1$ dla każdego $t \leqslant T$ (w normalnych warunkach $P(t, T) < 1$ dla $t < T$, co oznacza, że obligacje zero-kuponowe są sprzedawane z dyskontem).
Przyjmując jako instrument podstawowy obligacje zero-kuponowe możemy zdefiniować kilka stóp procentowych.

Stopy procentowe – definicje

Stopą terminową (forward interest rate) w chwili t *na okres* $[S, T]$ *nazywamy iloraz*

$$R(t; S, T) = -\frac{\ln P(t, T) - \ln P(t, S)}{T - S}.$$

Dysponując stopą terminową możemy zdefiniować stopę natychmiastową (spot interest rate) na okres $[S, T]$

$$R(S, T) = R(S; S, T),$$

a także chwilową stopę terminową (instantaneous forward rate)

$$f(t, T) = \lim_{S \to T} R(t; S, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T),$$

i chwilową stopę natychmiastową (instantaneous spot rate)

$$r(t) = f(t, t).$$

Obligacje abstrakcyjne – wyjaśnienie

Obligacje te nazwaliśmy abstrakcyjnymi, ponieważ chcemy mieć takie obligacje dla każdego $T \leqslant T^*$, gdzie T^* jest horyzontem inwestycyjnym.
Ponadto chcemy, aby były to obligacje o gładkiej zależności ceny od czasu zapadalności (aby istniały odpowiednie pochodne).

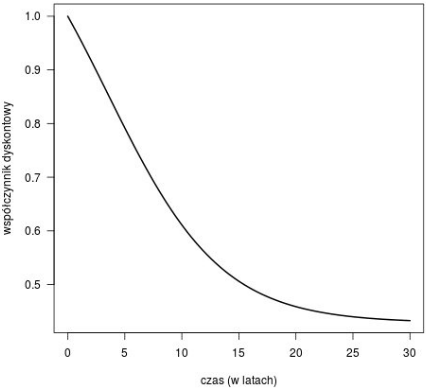
Takich obligacji nie ma na rynku !
Ale korzystając z tych obligacji można zdefiniować ważny obiekt – krzywą dyskontową.
Pokażemy później jak krzywą dyskontową można zbudować korzystając z instrumentów dostępnych na rynku finansowym.
Ponieważ z krzywej dyskontowej potrafimy odczytać część zdefiniowanych wcześniej stóp procentowych, możemy mówić o tych stopach także na rzeczywistym rynku.

Krzywa dyskontowa

Krzywa dyskontowa to funkcja

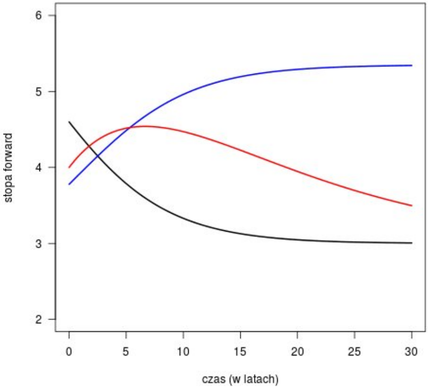
$$T \mapsto P(t, T).$$

Oznacza to, że dla każdej chwili czasu t mamy inną krzywą dyskontową.



Krzywa stóp forward

Ponieważ $f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T)$, to z gładkiej krzywej dyskontowej można wyliczyć stopy forward.
Rysunek ilustruje 3 podstawowe kształty krzywej stóp forward: opadającą, wznoszącą i garbatą.



Krzywa dyskontowa na rzeczywistym rynku

Krzywą dyskontową możemy zbudować tylko na dziś, bo tylko dziś znamy ceny obligacji.
Krzywej dyskontowej na przyszłe daty nie możemy zbudować, bo nie ma danych.
Na rynku są dostępne obligacje rządowe. To nie są zwykle obligacje zero-kuponowe, ale to nie jest poważnym problemem.
Ważniejszy jest fakt, czy codziennie mamy podawane ceny tych obligacji. Ceny sprzedaży tych obligacji przez rząd znamy tylko w nielicznych dniach (rządy zwykle sprzedają obligacje co jakiś czas: raz w tygodniu, raz w miesiącu, . . .).
Istnieje rynek wtórny tych obligacji (OTC), ale jest to rynek chimeryczny. Niektóre obligacje są przedmiotem transakcji na tym rynku często, ale inne bardzo rzadko.
W efekcie krzywą dyskontową musielibyśmy tworzyć z bardzo małej liczby punktów (czasem nie wiedząc, które ceny są wiarygodne).

Krzywa dyskontowa międzybankowa

Bardziej wiarygodną krzywą dyskontową dostaniemy wykorzystując instrumenty na rynku międzybankowym.

Stopa LIBOR $L(t, T, T+\delta)$ *na okres* δ *oznacza stopę procentową terminową widzianą z chwili czasu* t *dla depozytu założonego w chwili* T *i rozwiązanego po okresie* δ*, tj.* $L(t, T, T+\delta) = R(t; T, T+\delta)$*.*

Stopa $f(t, T)$ jest związana ze stopą LIBOR związkiem

$$\delta L(t, T, T+\delta) = \exp\Big(\int_T^{T+\delta} f(t, u) du\Big) - 1.$$

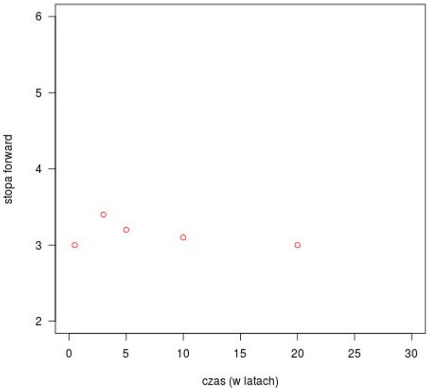
Wynika stąd także związek z krzywą dyskontową

$$L(t, T, T+\delta) = \frac{P(t, T) - P(t, T+\delta)}{\delta P(t, T+\delta)}.$$

Zwykle czas t jest dobrze znany i stosuje się uproszczony zapis stóp LIBOR $L(T, T+\delta)$.

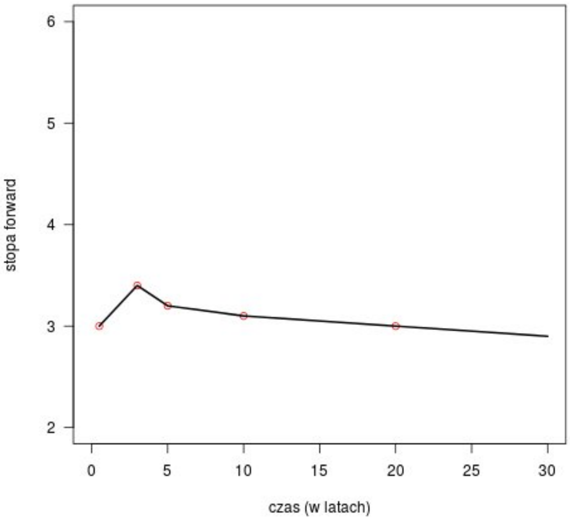
Tworzenie krzywej dyskontowej z danych LIBOR

Załóżmy, że mamy dane o stopach LIBOR6M dla pewnych dat zapadalności.

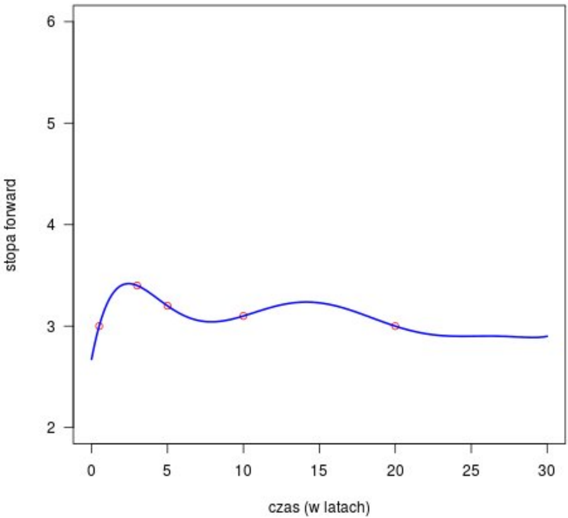


Aby stworzyć z tych danych krzywą dyskontową należy aproksymować wartości pośrednie. **Jak?**

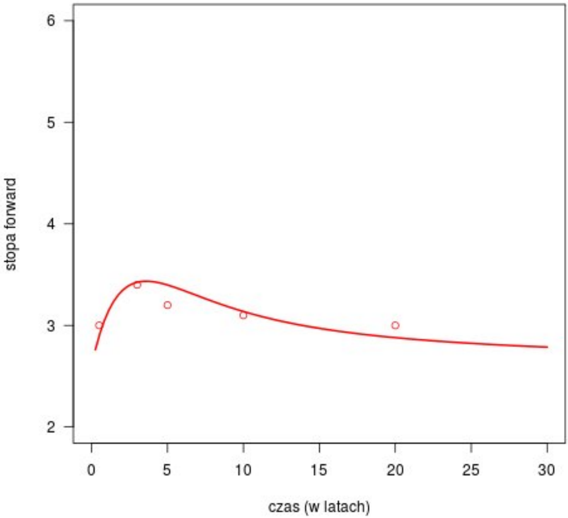
Aproksymacją liniową ?



Aproksymacją wielomianową ?



Aproksymacją krzywą Nelsona-Siegela ?



"Dobra" krzywa dyskontowa

Dobra krzywa dyskontowa musi:

- nie prowadzić do arbitrażu,[1] w szczególności musi być ściśle malejąca,
- musi być wystarczająco gładka aby można obliczyć z niej stopę forward,
- stopy forward wynikające z krzywej muszą być realistyczne.

---

[1] Arbitrażem nazywamy taką strategię inwestycyjną, która startując z zerowego kapitału, nie doprowadzi do bankructwa (ujemnego kapitału) a z dodatnim prawdopodobieństwem przyniesie zysk, czyli dodatni kapitał.

Cena obligacji (kuponowej)

Obligacją kuponową o stałym oprocentowaniu r o nominale N i czasie zapadalności T_n nazywamy papier wartościowy, który w w ustalonych momentach czasu $T_1 < T_2 < \cdots < T_n$ wypłaca właścicielowi kupony w wysokości rN a w chwili T_n także nominał N.

Znając krzywą dyskontową $P(t, T)$ na moment czasu t można obliczyć cenę takiej obligacji w chwili t:

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i) rN + P(t, T_n) N.$$

Kontrakty wymiany procentowej – SWAP (IRS)

Kontrakt wymiany procentowej (IRS) składa się z dwóch strumieni pieniężnych, tzw. nóg kontraktu. Strona kontraktu IRS otrzymuje/płaci płatności występujące na jednej nodze kontraktu w zamian za co płaci drugiej stronie/otrzymuje od drugiej strony kontraktu płatności drugiej nogi. Wyróżniamy dwa rodzaje nóg kontraktów wymiany procentowej:

- nogę stałą (ang. fixed leg) – odsetki są liczone według stałej stopy,
- nogę zmienną (ang. floating leg) – odsetki są liczone według zmiennej stopy.

Z każdą nogą kontraktu związana jest struktura dyskretnych dat T_j (tenor), $j = 0, \ldots, m$. Daty $T_0, \ldots, T_{m-1}$ są datami ustalania wielkości przepływów (*reset dates*), daty $T_1, \ldots, T_m$ są datami przepływów (*settlement dates*) a m nazywa się długością trwania kontraktu.

Noga stała kontraktu IRS

Noga stała kontraktu to strumień płatności $C(T_i)$ następujących w chwilach T_i , $i = 1, \ldots, M$ (T_M jest terminem zapadalności kontraktu), na który składają się odsetki wyliczone według ustalonej w kontrakcie stałej stopy κ

$$C(T_i) = \kappa \Delta_i N_i,$$

gdzie $\Delta_i = (T_i - T_{i-1})$ jest długością okresu odsetkowego obliczoną według właściwej dla stopy kontraktu konwencji a N_i jest nominałem, od którego w okresie odsetkowym $[T_{i-1}, T_i)$ liczone są odsetki.
Ostatnia płatność musi także uwzględniać płatność nominału. Stąd

$$C(T_M) = N + \kappa \Delta_M N_M.$$

Noga zmienna kontraktu IRS

Noga zmienna kontraktu to strumień płatności $\hat{C}(\hat{T}_i)$ następujących w chwilach $\hat{T}_i$, $i = 1, \dots, J$ ($\hat{T}_J = T_M$ jest terminem zapadalności kontraktu),[2] na który składają się odsetki wyliczone według zmiennej przyszłej stopy rynkowej LIBOR $L^*(\hat{T}_{i-1}, \hat{T}_i)$ powiększonej o marżę m

$$\hat{C}(\hat{T}_i) = (L^*(\hat{T}_{i-1}, \hat{T}_i) + m)\hat{\Delta}_i \hat{N}_i,$$

gdzie $\hat{\Delta}_i = (\hat{T}_i - \hat{T}_{i-1})$ jest długością okresu odsetkowego dla nogi zmiennej a $\hat{N}_i$ jest nominałem, od którego w okresie odsetkowym $[\hat{T}_{i-1}, \hat{T}_i)$ liczone są odsetki. Dodatkowo $\hat{C}(\hat{T}_J)$ powiększamy o spłatę nominału N.

[2] Okresy odsetkowe dla nogi stałej i zmiennej mogą być różne; ważne jest tylko aby oba strumienie płatności kończyły się w tym samym momencie.

Losowe stopy LIBOR

Przy wycenie nogi zmiennej kontraktu SWAP wprowadziliśmy stopę LIBOR $L^*(T, S)$. Stopa ta jest stopą procentową jaka będzie obowiązywała w okresie $[T, S)$.

W chwili $t < T$ jest to zmienna losowa.

Aby przeprowadzać obliczenia dla tej stopy podobnie jak dla deterministycznej stopy LIBOR $L(t, T, S)$ wprowadźmy losowy czynnik dyskontowy $D(T, S)$. Wielkość $D(T, S)$ jest wartością w chwili T instrumentu, który w chwili S płaci jednostkę waluty. Wtedy

$$L^*(T, S) = \frac{D(T, T) - D(T, S)}{\Delta(T, S)D(T, S)},$$

gdzie $\Delta(T, S)$ jest długością okresu $[T, S)$ liczoną według właściwej konwencji.

Zauważmy, że w momencie T stopa $L^*(T, S)$ jest znana i równa $L(T, T, S)$.

Cena kontraktu SWAP

Dla uproszczenia przyjmijmy, że terminy płatności nogi stałej i zmiennej są jednakowe a nominał jest stały i równy N. Przyjmijmy także, że marża $m = 0$ (to nie jest istotne założenie, bo $m \neq 0$ można sprowadzić do przypadku $m = 0$ modyfikując stałą stopę κ).

$$\begin{aligned} FS_0(\kappa) =& PV_{float}(0) - PV_{fixed}(0) \\ =& NP(0, T_0) - NP(0, T_M) - N\kappa \sum_{i=1}^{M} P(0, T_i)\Delta_i \end{aligned}$$

Wartość nogi stałej

$$PV_{fixed}(0) = \sum_{i=1}^{M} P(0, T_i)C(T_i) = \kappa N \sum_{i=1}^{M} P(0, T_i)\Delta_i + P(0, T_M)N.$$

Cena kontraktu SWAP – c.d.

Wartość nogi zmiennej

$$PV_{float}(0) = \sum_{i=1}^{M} P(0, T_i)\hat{C}(T_i)$$
$$= N \sum_{i=1}^{M} P(0, T_i) L^*(T_{i-1}, T_i)\Delta_i + P(0, T_M)N.$$

Z definicji

$$L^*(T, S) = \frac{D(T, T) - D(T, S)}{\Delta(T, S)D(T, S)},$$

więc $P(0, T_i)L^*(T_{i-1}, T_i)\Delta_i = P(0, T_i)(\frac{1}{D(T_{i-1}, T_i)} - 1) = P(0, T_{i-1}) - P(0, T_i)$.
Ponieważ $D(T, S)\frac{1}{D(T,S)} = 1$, więc posiadanie $\frac{1}{D(T,S)}$ jednostek pieniężnych w chwili S jest równoważne posiadaniu 1 jednostki w chwili T. Stąd $\frac{1}{D(T_{i-1}, T_i)}$ jednostek (losowych) w chwili T_i jest równoważne 1 jednostce w chwili T_{i-1}, a to jest równoważne $P(0, T_{i-1})$ jednostkom w chwili 0.

Poprawna wycena SWAP

Model rynku finansowego:

- istnieje na rynku miara martyngałowa *spot* $\mathbb{P}^*$,
- wartości czynników dyskontowych $D(t, T)$ zdyskontowane wartością *rachunku bankowego* B_T są martyngałami względem $\mathbb{P}^*$,
- stopy LIBOR $L(T_{i-1}, T_i)$ utożsamiamy ze stopami LIBOR forward $F(T_{i-1}, T_{i-1}, T_i)$, gdzie $F(t, T, S) = \frac{D(t,T)-D(t,S)}{\Delta(T,S)D(t,S)}$,
- stopy LIBOR forward $F(t, T_{i-1}, T_i)$ są martyngałami względem miary $\mathbb{P}_{T_i}$.

Na takim rynku

$$FS_t(\kappa) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\sum_{i=1}^{M} \frac{B_t}{B_{T_i}} \left(F(t, T_{i-1}, T_i) - \kappa\right)\Delta_i \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

gdzie B_t oznacza wartość rachunku bankowego w chwili t.

Stopa swapowa

Stopą swapową (przyszłą) nazywamy taką stopę κ, przy której wartość kontraktu SWAP w chwili $t \leqslant T_0$ wynosi zero

$$\kappa(t, T_0, T_M) = (P(t, T_0) - P(t, T_M)\Big(\sum_{i=1}^{M} P(t, T_i)\Delta_i\Big)^{-1}.$$

Jeśli znamy stopę swapową, to cenę kontraktu SWAP na dowolną inną stałą stopę można łatwo obliczyć ze wzoru

$$\begin{aligned} FS_t(\kappa) &= FS_t(\kappa) - FS_t(\kappa(t, T_0, T_M)) \\ &= (\kappa(t, T_0, T_M) - \kappa)\sum_{i=1}^{M} P(t, T_i)\Delta_i. \end{aligned}$$

Krzywa dyskontowa raz jeszcze

Stopy LIBOR, które służyły nam do konstrukcji krzywej dyskontowej znane są jedynie dla czasów do 2 lat.
Dla dłuższych okresów zapadalności, aby zbudować krzywą dyskontową (międzybankową) dysponujemy stopami swapowymi.
Jak zobaczyliśmy to ostatnio, stopa swapowa, to stopa po której dyskontujemy wszystkie przepływy finansowe w kontrakcie SWAP, aby dostać zerową wartość kontraktu.
Załóżmy dla uproszczenia, że płatności w kontrakcie SWAP następują raz w roku.
Jeśli znamy czynniki dyskontowe do 2 lat oraz znamy stopę swapową w kontrakcie na 3 lata, to możemy wyznaczyć czynnik dyskontowy na 3 lata. Następnie na 4 lata, 5 lat itd.

Krzywa dyskontowa raz jeszcze – c.d.

To postępowanie załamuje się w dwóch przypadkach:
1) nie mamy stóp swapowych podawanych w kolejnych latach (bo kontrakty o pewnej długości nie są standardowo kwotowane)
2) płatności są częstsze niż raz w roku a stopy swapowe są podawane tylko dla pełnych lat.
Najczęściej (dla większości walut) oba te przypadki zachodzą jednocześnie.

Co wtedy?

Musimy przyjąć jakąś regułę aproksymacji czynników dyskontowych a następnie rozwiązywać zadanie samouzgodnienia czynników dyskontowych.
To jest skomplikowane numerycznie (pierwiastki nieliniowego równania) i nie ma twierdzenia, które gwarantuje istnienie jednoznacznego rozwiązania.

Capy i floory

Kontrakt cap na stopę procentową jest kontraktem opcyjnym o ustalonej strukturze czasowej (tenor) $0 < T_0 < T_1 < \cdots < T_n$*, w którym wystawca opcji zobowiązuje się zapłacić posiadaczowi opcji w każdym terminie* T_i*,* $i = 1, \ldots, n$*, różnicę między bazową stopą LIBOR ustaloną w momencie* T_{i-1} *a stopą referencyjną* K*, jeśli stopa bazowa przekracza stopę referencyjną.*
Płatność jest odniesiona do wartości nominalnej kontraktu (płaci się procent od wartości nominalnej).
Kontrakt floor to analogiczny kontrakt, w którym płacona jest różnica między stopą referencyjną a stopą bazową, jeśli stopa bazowa jest niższa niż stopa referencyjna.
W standardowym kontrakcie stopa bazowa LIBOR to stopa $L^*(T_{i-1}, T_i)$.

Cap można traktować jako sumę pojedynczych opcji (capletów) płatnych w momentach T_i. Analogicznie floor składa się z sumy floorletów.

Wzór Blacka

Cena capletu o terminie zapadalności T_{i-1} i stopie referencyjnej K na okres $[T_{i-1}, T_i]$ dana jest wzorem Blacka

$$Cpl_B(0, T_{i-1}, T_i, K) = P(0, T_i)(T_i - T_{i-1})C_B(F_i(0), K, v_i),$$
$$C_B(F_i(0), K, v_i) = F_i(0)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2),$$

gdzie

$$d_1 = \frac{\ln(F_i/K) + v_i^2/2}{v_i}, \quad d_2 = \frac{\ln(F_i/K) - v_i^2/2}{v_i},$$

$F_i = F(0, T_{i-1}, T_i)$ *jest stopą forward na okres* $[T_{i-1}, T_i]$ *a*

$$v_i^2 = T_{i-1}\nu_{T_{i-1}}^2.$$

$\nu_{T_{i-1}}$ *w ostatnim wzorze jest rynkową volatility capletu o terminie zapadalności* T_{i-1}*, która z volatility stóp forward związana jest zależnością*

$$\nu_{T_{i-1}}^2 = \frac{1}{T_{i-1}} \int_0^{T_{i-1}} \sigma_i^2(t)dt.$$

Skąd wzór Blacka?

Wzór Blacka wynika z przyjętego *ad hoc* założenia, że dynamika stopy LIBOR forward $F(t, T, S)$ opisywana jest geometrycznym ruchem Browna (bez dryfu) względem pewnej miary $\mathbb{Q}$

$$dF(t, T, S) = F(t, T, S)\sigma dW_t,$$

gdzie W_t jest jednowymiarowym standardowym ruchem Browna względem $\mathbb{Q}$ a σ jest dodatnią deterministyczną funkcją $\sigma(t)$.
Przy tych założeniach wzór Blacka jest szczególną postacią wzoru Blacka-Scholesa.

Istnienie takiej miary i dynamiki można wykazać przy pewnych technicznych założeniach w modelu Heatha, Jarrowa i Mortona (HJM) dynamiki stopy forward $f(t, T)$.

Ale istnienie odpowiednich miar oraz ewolucji stóp LIBOR forward dla wszystkich capletów wchodzących w skład capa stało się możliwe dopiero dzięki pracom Musieli i Rutkowskiego.

Wykorzystanie wzoru Blacka do wyceny capów

Typowa tabela kwotowań volatility capów.

	STK	ATM	0.0200	0.0225	0.0250	0.0300	0.0350
1Y	0.0116	0.5202	0.5020	0.5060	0.5110	0.5220	0.5340
18M	0.0152	0.4996	0.4700	0.4610	0.4550	0.4520	0.4550
2Y	0.0182	0.4645	0.4530	0.4390	0.4300	0.4210	0.4190
3Y	0.0250	0.3703	0.4050	0.3850	0.3700	0.3500	0.3400
4Y	0.0278	0.3297	0.3840	0.3630	0.3450	0.3200	0.3050
5Y	0.0299	0.2980	0.3670	0.3450	0.3260	0.2980	0.2800
6Y	0.0316	0.2730	0.3520	0.3300	0.3110	0.2810	0.2600
7Y	0.0330	0.2523	0.3380	0.3160	0.2970	0.2670	0.2450
8Y	0.0342	0.2358	0.3260	0.3050	0.2860	0.2550	0.2330
9Y	0.0351	0.2229	0.3170	0.2960	0.2770	0.2470	0.2230
10Y	0.0360	0.2124	0.3090	0.2890	0.2710	0.2400	0.2160
12Y	0.0375	0.1962	0.2980	0.2780	0.2600	0.2300	0.2060
15Y	0.0392	0.1802	0.2850	0.2660	0.2490	0.2190	0.1960
20Y	0.0402	0.1675	0.2710	0.2530	0.2370	0.2080	0.1850

*1 and 2 years are vs 3m

Wykorzystanie wzoru Blacka do wyceny capów c.d.

Volatility kwotowane na rynku nie są wartościami volatility capletów, ale wielkością, która przy wycenie capa jako sumy capletów ma tę samą wartość we wzorze Blacka dla wszystkich capletów, czyli zgodnie z konwencją rynkową cena capa o terminie zapadalności T_j dana jest wzorem

$$\sum_{i=1}^{j}(T_i - T_{i-1})P(0, T_i)C_B\big(F_i(0), k, \sqrt{T_{i-1}}\nu_{T_j}^{cap}\big).$$

Aby odzyskać volatility poszczególnych capletów musimy rozwiązać równanie, w którym powyższe wyrażenie przyrównamy do

$$\sum_{i=1}^{j}(T_i - T_{i-1})P(0, T_i)C_B\big(F_i(0), k, \sqrt{T_{i-1}}\nu_{T_{i-1}}^{caplet}\big)$$

i rozwiążemy ze względu na $\nu_{T_{i-1}}^{caplet}$.

Wykorzystanie wzoru Blacka do wyceny capów c.d.

Rozwiązanie takie jest mało skomplikowane jeśli mamy kwotowane volatility capów dla wszystkich kolejnych maturity, np. dla capów na LIBOR6M mamy kwotowanie co 6M. Wtedy obliczyć możemy wartości $\nu_{T_{i-1}}^{caplet}$ robiąc rekurencję po j startując od $j = 1$ aż do najdłuższej maturity.

Kiedy volatility jest kwotowane nie dla wszystkich maturity możemy postąpić dwojako:

1. dokonać interpolacji brakujących wartości volatility i zastosować standardową procedurę rekurencyjnego obliczania volatility capletów;
2. przyjąć, że volatility capletów dla brakujących kwotowań jest taka sama jak dla kolejnego dostępnego kwotowania; wtedy należy rozwiązać nieco trudniejsze zadanie algebraiczne polegające na odwróceniu wzoru Blacka dla kilku różnych czasów zapadalności jednocześnie.

Wykorzystanie wzoru Blacka do wyceny capów c.d.

Zadanie odwracania wzoru Blacka posiada zwykle poprawne rozwiązanie. Poprawność polega na tym, że otrzymane rozwiązanie jest dodatnie.

Ale istnienie dodatniego rozwiązania nie jest oczywiste. W końcu szukamy miejsca zerowego skomplikowanej nieliniowej funkcji

$$f(v) = A\Phi\Big(\frac{A + v^2/2}{v}\Big) - \Phi\Big(\frac{A - v^2/2}{v}\Big).$$

Doświadczenia numeryczne pokazują, że przy braku niektórych kwotowań, poprawne rozwiązanie łatwiej jest otrzymać korzystając wyłącznie z wartości kwotowanych na rynku niż dokonując interpolacji brakujących wielkości.

Swapcje

Swapcja z czasem wykonania T i ceną referencyjną κ jest kontraktem opcyjnym, w którym właściciel opcji ma prawo wejść w chwili $T = T_0$ w kontrakt SWAP o ustalonej strukturze czasowej (tenor) $T_0 < T_1 < \cdots < T_n$ ze stopą referencyjną κ.

W praktyce występują dwa rodzaje opcji:

- *payer swaption*, gdy właściciel opcji ma prawo wejść w kontrakt *payer swap*, czyli kontrakt, w którym dostaje nogę stałą kontraktu a płaci nogę zmienną,
- *receiver swaption*, gdy właściciel opcji ma prawo wejść w kontrakt *receiver swap*, czyli kontrakt, w którym płaci nogę stałą kontraktu a dostaje nogę zmienną.

Przy wycenie tych opcji przyjmuje się, że nominał kontraktu SWAP $N = 1$.

Wzór Blacka dla swapcji

Cena swapcji o terminie zapadalności T_0 *i stopie referencyjnej* κ *na kontrakt SWAP o strukturze czasowej* $T_0 < T_1 < \cdots < T_n$ *dana jest wzorem Blacka*

$$PS(0) = \sum_{i=1}^{n} P(0, T_i)\Delta_i\big(\kappa(0, T_0, T_n)\Phi(h_1) - \kappa\Phi(h_2)\big),$$

gdzie

$$h_1 = \frac{\ln(\kappa(0, T_0, T_n)/\kappa) + v^2/2}{v}, \; h_2 = \frac{\ln(\kappa(0, T_0, T_n)/\kappa) - v^2/2}{v},$$

$\kappa(0, T_0, T_n)$ *jest stopą swapową kontraktu SWAP (stopą przy której wartość tego kontraktu jest zero) a* v *jest pewną stałą zależną od tenora kontraktu SWAP (volatility stóp swapowych).*

Wykorzystanie wzoru Blacka do wyceny swapcji

To jest dużo trudniejsze zadanie niż dla capów.
Tablica rynkowych kwotowań volatility swapcji

	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y	15Y	20Y
1Y	0.424	0.346	0.315	0.295	0.281	0.267	0.258	0.251	0.247	0.243	0.225	0.222
2Y	0.296	0.266	0.250	0.240	0.232	0.225	0.220	0.217	0.215	0.213	0.202	0.201
3Y	0.246	0.227	0.215	0.209	0.205	0.201	0.197	0.195	0.194	0.194	0.186	0.187
4Y	0.215	0.201	0.193	0.190	0.188	0.185	0.182	0.180	0.178	0.178	0.174	0.177
5Y	0.191	0.181	0.177	0.176	0.174	0.171	0.169	0.168	0.167	0.167	0.165	0.169
7Y	0.160	0.156	0.154	0.154	0.153	0.151	0.151	0.150	0.151	0.151	0.154	0.159
10Y	0.134	0.132	0.132	0.134	0.136	0.137	0.138	0.139	0.141	0.142	0.149	0.154
15Y	0.126	0.124	0.128	0.131	0.135	0.138	0.141	0.143	0.145	0.146	0.150	0.157
20Y	0.144	0.145	0.150	0.155	0.158	0.161	0.162	0.163	0.163	0.164	0.169	0.176

Wartości w pierwszej kolumnie to czas życia swapcji (*swaption maturity*).
Wartości w pierwszym wierszu to czasy życia kontraktów SWAP, na które wystawiona jest swapcja.

Wykorzystanie wzoru Blacka do wyceny swapcji – c.d.

Tablica jaką musimy z kwotowań rynkowych stworzyć.
Element $S_{m,n}$ tej tablicy to volatility stopy LIBOR forward na moment T_{n-1} na okres $[T_{m-1}, T_m)$.

0.291									
0.232	0.242								
0.199	0.183	0.222							
0.169	0.173	0.177	0.199						
0.167	0.120	0.169	0.180	0.180					
0.156	0.136	0.146	0.158	0.175	0.180				
0.132	0.147	0.097	0.155	0.129	0.155	0.155			
0.133	0.137	0.113	0.063	0.148	0.165	0.165	0.155		
0.128	0.122	0.103	0.107	0.097	0.141	0.141	0.165	0.155	
0.108	0.133	0.100	0.101	0.112	0.093	0.093	0.155	0.155	0.155
0.125	0.125	0.099	0.098	0.104	0.094	0.094	0.123	0.123	0.123
0.122	0.122	0.122	0.051	0.097	0.103	0.103	0.110	0.110	0.110
0.129	0.129	0.129	0.129	0.045	0.070	0.070	0.090	0.090	0.090
0.130	0.130	0.130	0.130	0.130	0.060	0.060	0.067	0.067	0.067
0.116	0.116	0.116	0.116	0.116	0.116	0.116	0.068	0.068	0.068
0.110	0.110	0.110	0.110	0.110	0.110	0.110	0.085	0.085	0.085
0.093	0.093	0.093	0.093	0.093	0.093	0.093	0.093	0.093	0.093
0.108	0.108	0.108	0.108	0.108	0.108	0.108	0.108	0.108	0.108
0.126	0.126	0.126	0.126	0.126	0.126	0.126	0.126	0.126	0.126

Brak zgodności modelu rynku capów i swapcji

Nie może istnieć model w którym jednocześnie są log-normalne stopy LIBOR forward, które pozwalają wyprowadzić wzór Blacka dla capletów oraz stopy swapowe, które pozwalają wyprowadzić wzór Blacka dla swapcji.

Ten problem czeka na rozwiązanie !


infomax