# Matematyk patrzy na Piketty'ego

Andrzej Dąbrowski
Wrocław

Piketty, *Kapitał XXI wieku*

*Ekonomiści są zbyt często zajęci trywialnymi problemami matematycznymi mających znaczenie tylko dla nich samych. Ta obsesja matematyczna ma służyć unaukowieniu ich pracy bez konieczności udzielania odpowiedzi na znacznie bardziej złożone pytania postawione przez świat, w którym żyjemy.*

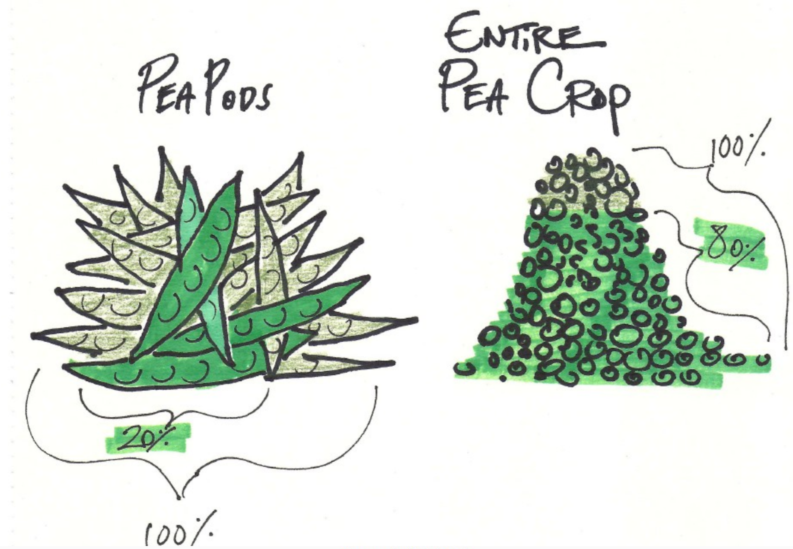
*Proszę czytelników niezbyt dobrze zorientowanych w zagadnieniach matematycznych aby byli cierpliwi i nie zamykali książki zbyt wcześnie.*

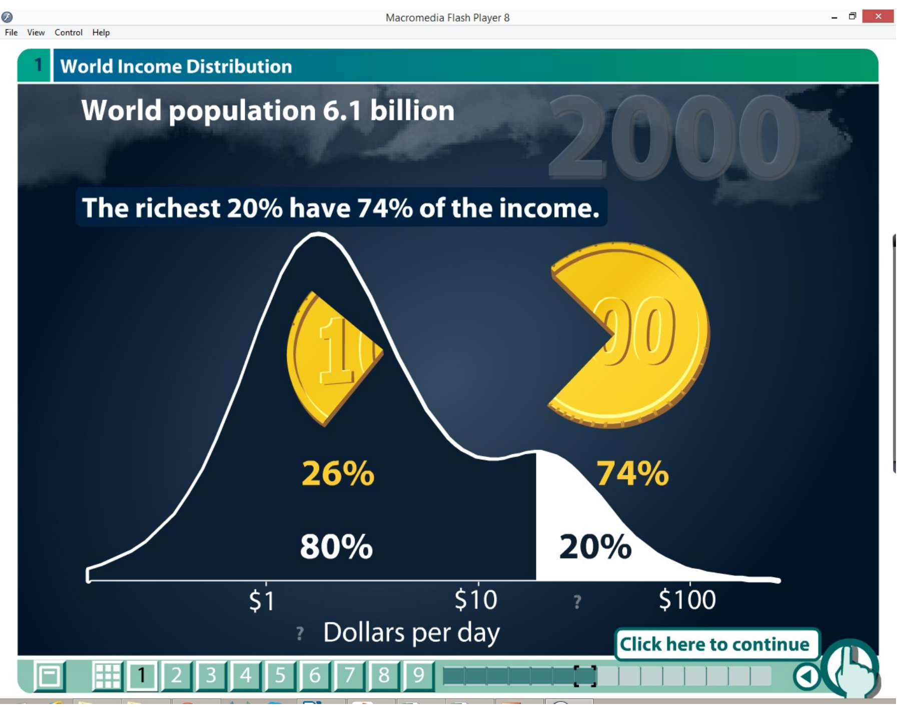
Jak przedstawiać dane o nierównościach w całej ich złożoności?

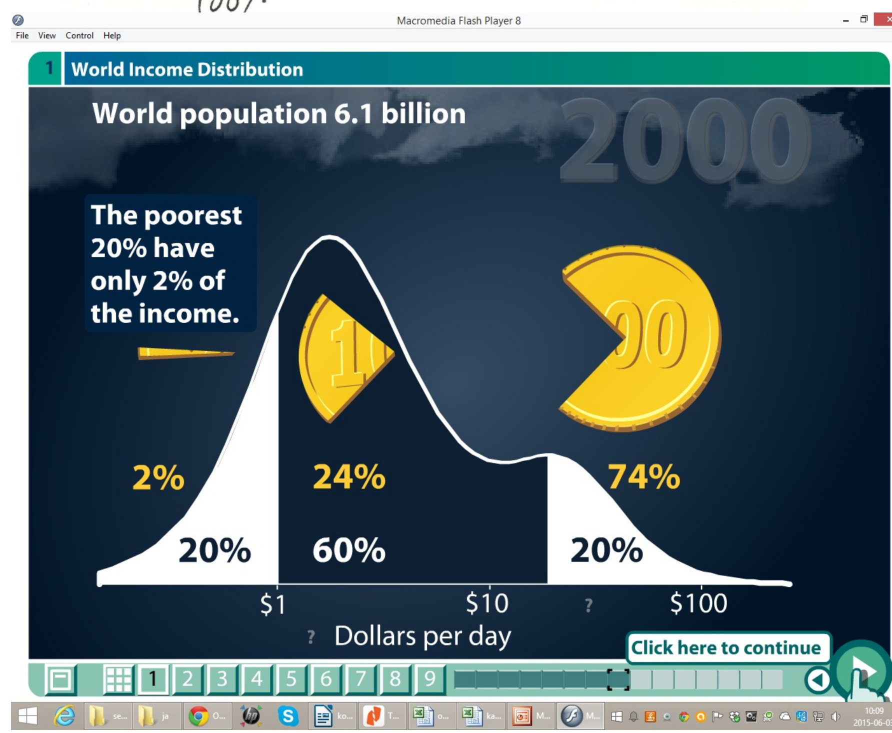
Piketty prezentuje dane punktowo: dochody 1% najbogatszych, 50% najuboższych. Narzeka na oceny globalne (wskaźnik Giniego)

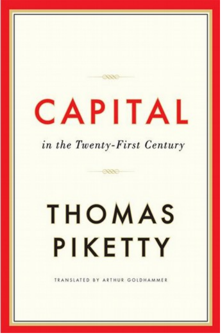
Vilfredo Federico Damaso Pareto
1848-1923

**80/20**

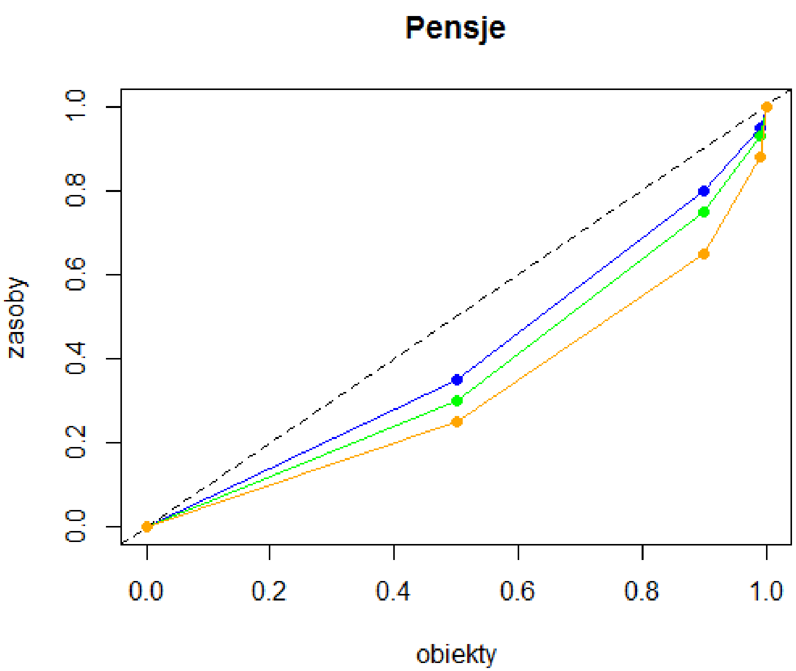


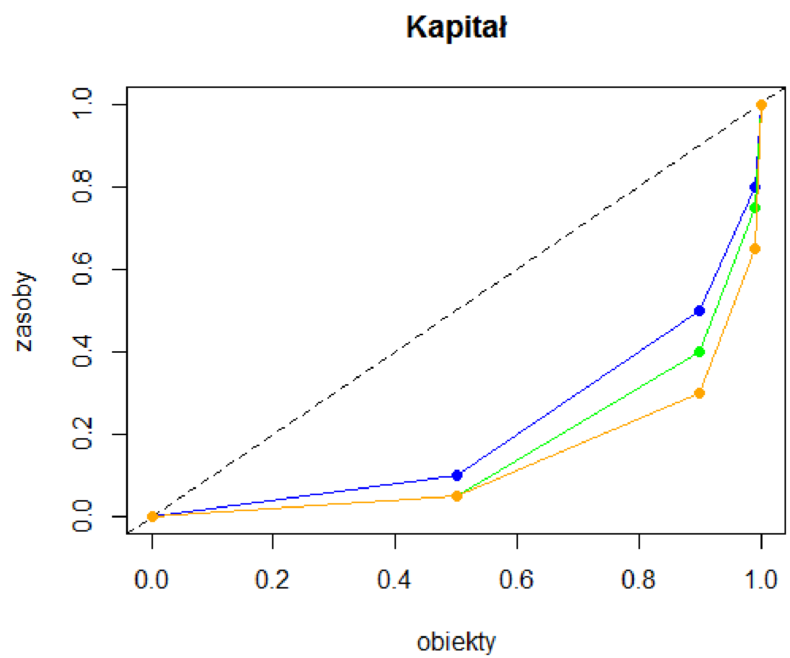






| | % populacji (poniżej) | 50% | 90% | 99% |
|---|---|---|---|---|
| **Dochody z pracy** | Kraje Skandynawskie (lata 80. XX w.) | 35% | 80% | 95% |
| | Europa 2010 | 30% | 75% | 93% |
| | USA 2010 | 25% | 65% | 88% |
| **Dochody z kapitału** | Kraje Skandynawskie (lata 80. XX w.) | 10% | 50% | 80% |
| | Europa 2010 | 5% | 40% | 75% |
| | USA 2010 | 5% | 30% | 65% |

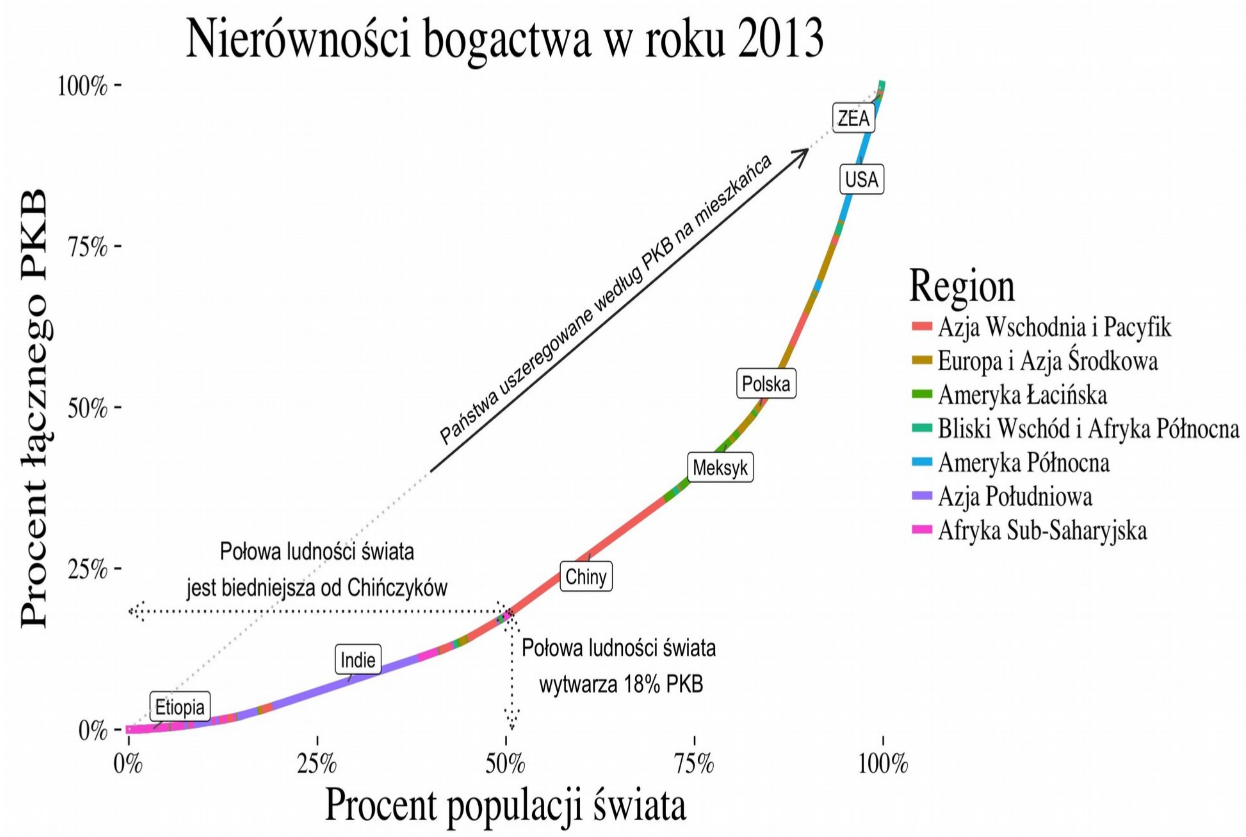





**Krzywe Lorenza** (1876-1959)

Lorenz, M. O. (1905). *Methods of measuring the concentration of wealth* Publications of the American Statistical Association. Vol. 9 (New Series, No. 70) 209-219.

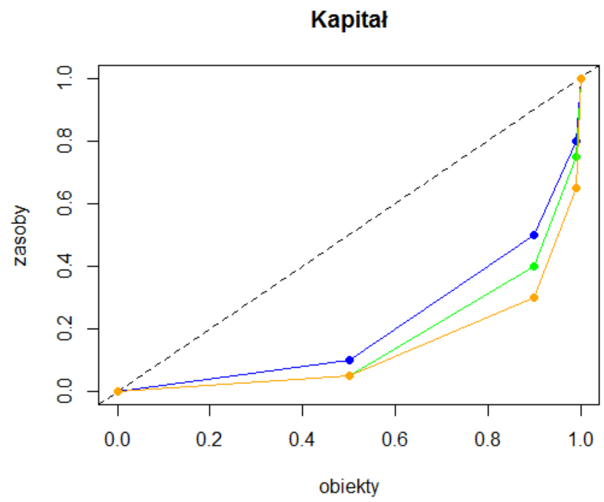





Zakładamy, że *F(x)* jest rosnąca i ciągła a *X>0*

$$L(u)=\frac{1}{\mu}\int_0^u F^{-1}(p)dp \qquad \mu = EX$$

$$\mu L'(u)=F^{-1}(u)$$




Krzywa Lorenza jest skumulowaną krzywą kwantylową rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej *X* o dystrybuancie *F(x).*

*L* jest rosnąca, ciągła i wypukła. *L(0)=1, L(1)=1*.
Prawdziwe jest twierdzenie odwrotne.

Rodzina funkcji Lorenza $$L(u)=u^{\alpha}, \alpha > 1$$

$$L_1L_2 \qquad L_1 \circ L_2 \qquad \max(L_1, L_2) \qquad \lambda L_1 + (1-\lambda)L_2$$



## Fraktalność nierówności

**Piketty i Saez . Dane dla USA z 2008**:

Górne 10% ma 48.23% całkowitego dochodu
Górne 1% ma 20.95 % całkowitego dochodu
Górne 0.1% ma 10.40 % całkowitego dochodu
Górne 0.01% ma 5.03%. całkowitego dochodu

Porównajmy:

10%=0.1 0.4823

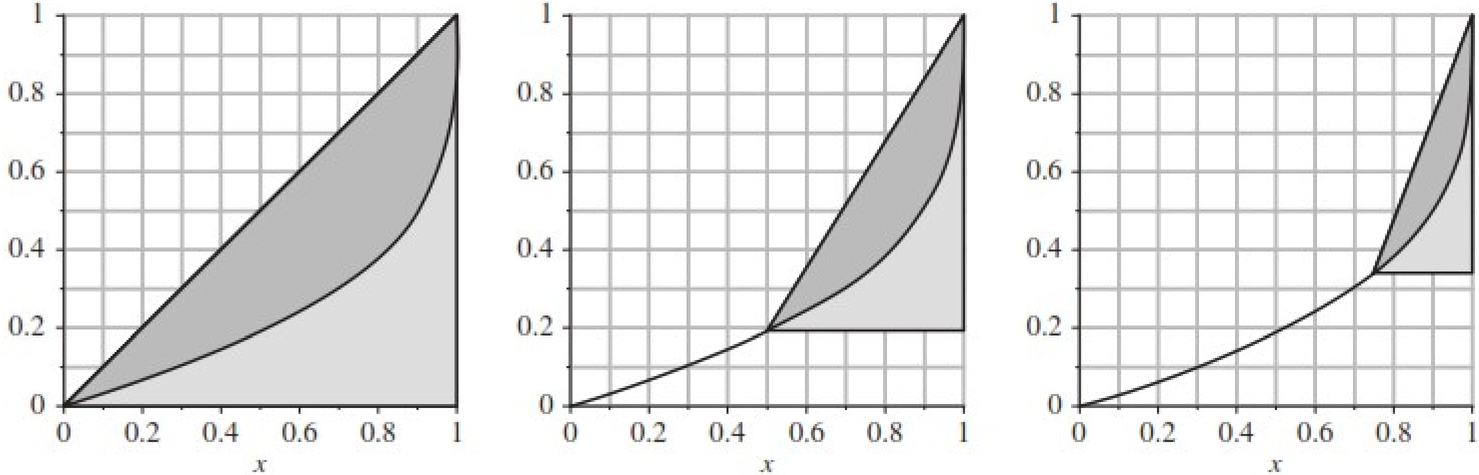
1%=$0.1^2$ $0.4823^2$=0.2361=23.61% (13% bł względny)

0.1%=$0.1^3$ $0.4823^3$=0.1129=11.29% (9% bł względny)

0.01%=$0.1^4$ $0.4823^4$=0.0541= 5.41% (8% bł względny)



Figure 5: A family of Lorenz curves associated with the Pareto distribution.




$$L\left(1-R^k\right)=1-P^k, k=1,2,3,\ldots$$

To równanie ma rozwiązanie

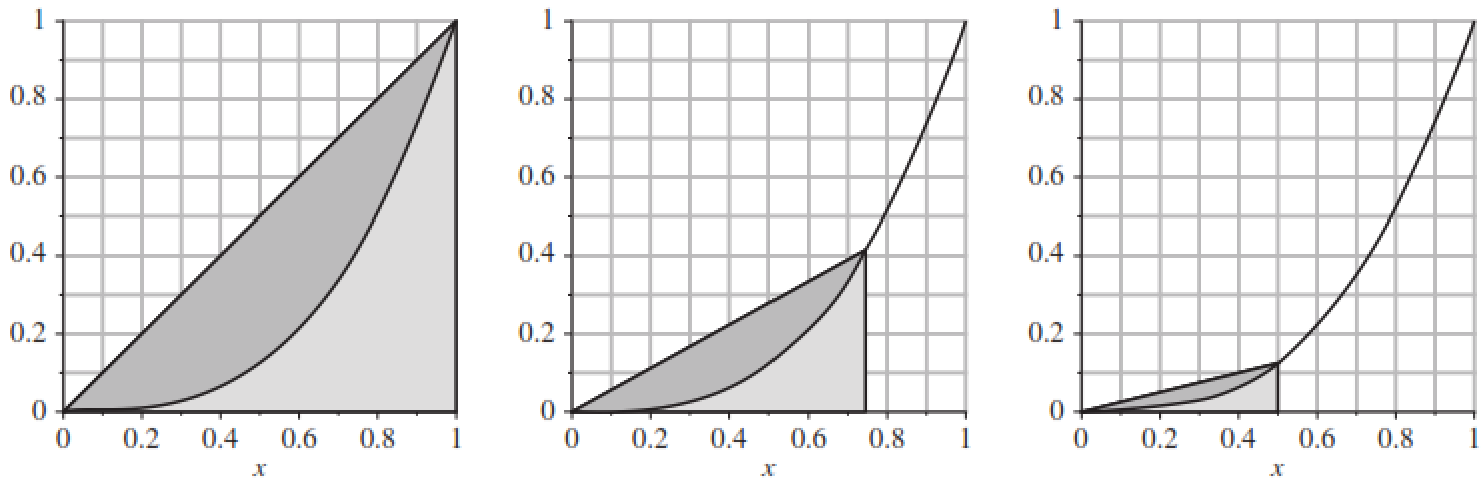
$$L\left(u\right)=1-(1-u)^{\alpha}, \alpha<1$$

Dystrybuanta, odpowiadajaca tej funkcji Lorenza

$$F(x)=1-\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\alpha-1}$$

Rozkład
Parety

## Samopodobieństwo ubogich




$$L\left(R^k\right) = P^k, k = 1,2,3,\ldots$$

To równanie ma rozwiązanie

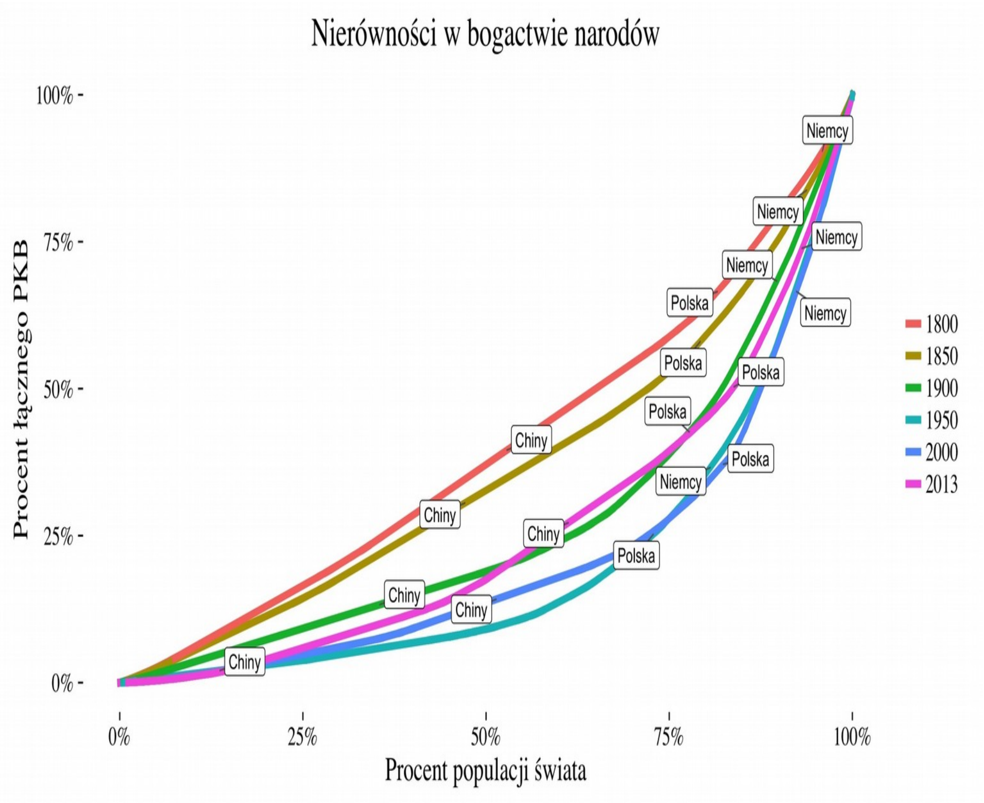
$$L(u) = u^{\alpha}, \alpha > 1$$

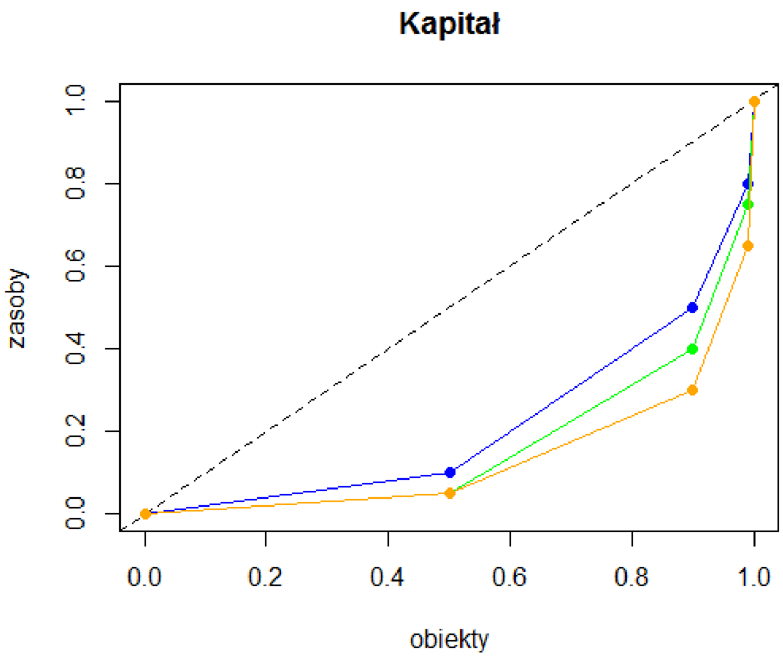
Dystrybuanta, odpowiadająca tej funkcji Lorenza

$$F(x) = x^{\beta}, \beta > 0$$

Rozkład wykładniczy

# Porządkowanie nierówności




$$X \succ Y \Leftrightarrow L_X(u) \leq L_Y(u)$$



Zasada Robin Hooda (Janosika):

Zabrać bogatemu i dać biednemu, ale tak, aby ich miejsce w hierarchii nie uległo zmianie

Wymiana między u i b

$$u < b \Rightarrow u^{*} = (1-\theta)b + \theta u,\ b^{*} = \theta b + (1-\theta)u$$

$$u^{*} < b^{*} \Leftrightarrow \theta > 0.5$$

Gdy populacja składa się ze skończonej liczby jednostek to wymiana janosikowa jest równoważna przekształceniu

$$Y = PX$$

Macierz *P* jest podwójnie stochastyczna

Twierdzenie

$$X \succ Y$$

Janosik zmniejsza nierówności



## Inne przekształcenia zmniejszające nierówności

$$Y = g(X)$$

$g(x)$ rosnąca $\qquad \dfrac{g(x)}{x}$ malejąca

Twierdzenie $\qquad X \succ Y$

**C+ dla wszystkich**

$$g(x) = x + c \qquad \frac{g(x)}{x} = \frac{x+c}{x} = 1 + \frac{c}{x}$$

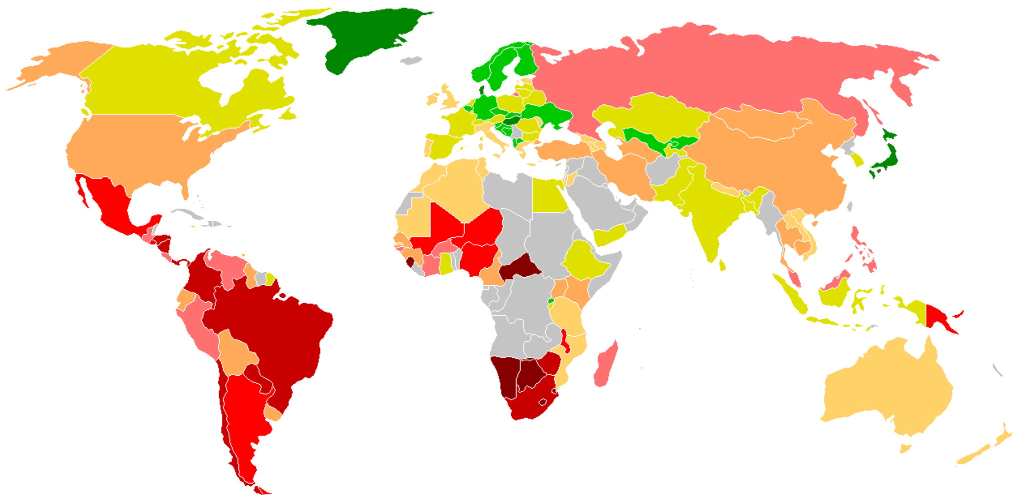
**Podatek progresywny**

$$g(x) = xh(x) \qquad 0 < h(x) < 1,\ h(x)\downarrow$$

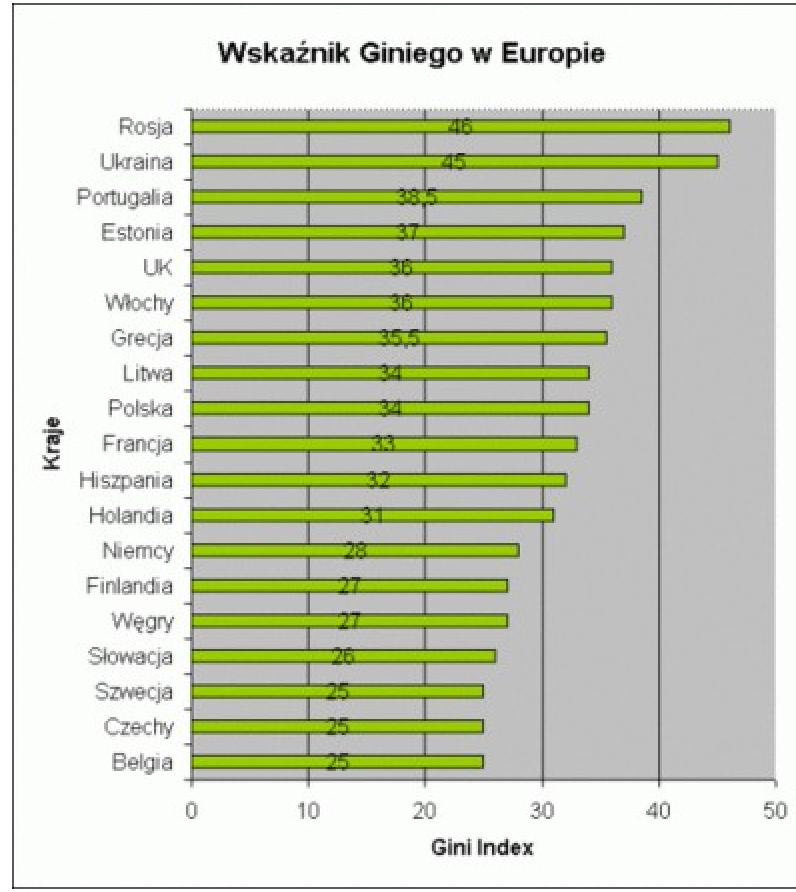
$$\frac{g(x)}{x} = h(x)$$



Współczynnik Giniego (**Corrado Gini** (1884-1935))

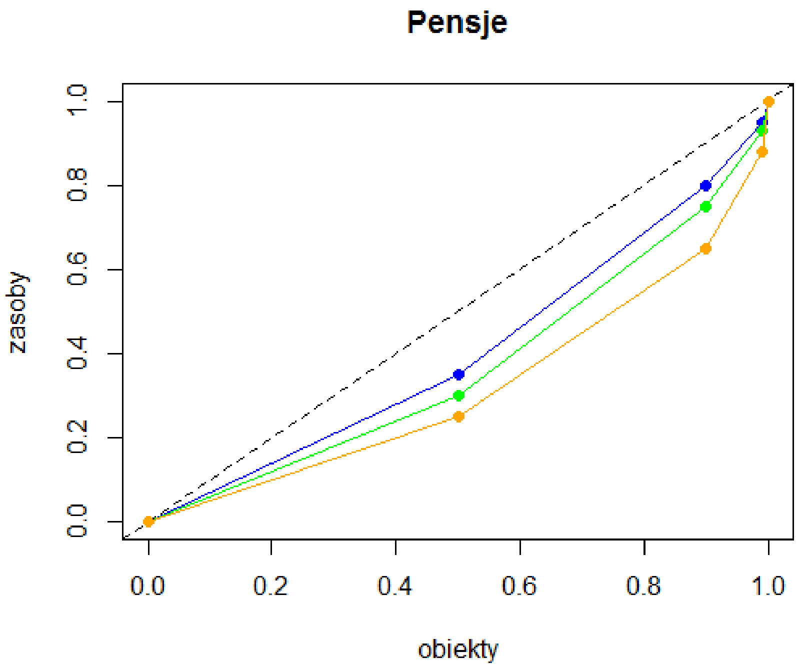


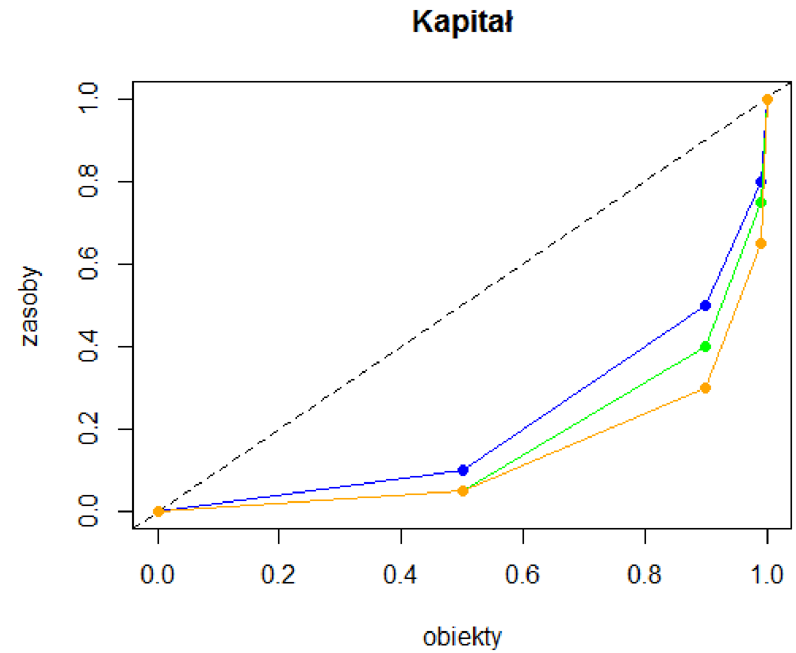
| Color | Gini coefficient |
|---|---|
| | < 0,25 |
| | 0,25 - 0,29 |
| | 0,30 - 0,34 |
| | 0,35 - 0,39 |
| | 0,40 - 0,44 |
| | 0,45 - 0,49 |
| | 0,50 - 0,54 |
| | 0,55 - 0,59 |
| | > 0,60 |
| | NA |




G=2*pole między linią sprawiedliwości a krzywą Lorenza





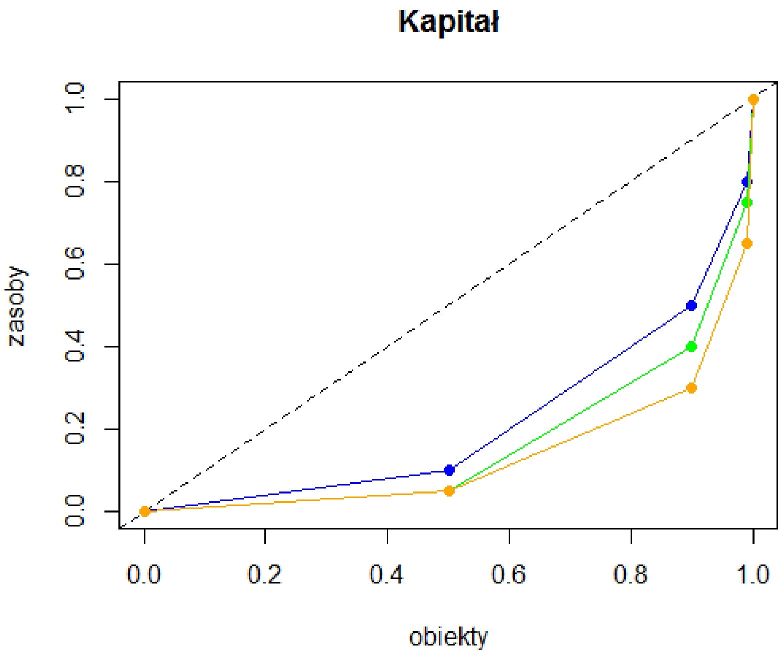




| | Gini |
|---|---|
| Skandynawia | 0,19 |
| Europa | 0,26 |
| USA | 0,36 |

| | Gini |
|---|---|
| Skandynawia | 0,58 |
| Europa | 0,67 |
| USA | 0,73 |

Pareto 80/20 – Gini=0,6

Dla nierówności
a/b Gini=a-b




$$X \succ Y \Rightarrow G_X \geq G_Y$$

$$X, Y \; iid \Rightarrow G_X = \frac{E(|X-Y|)}{2EX}$$

$$G_X = \frac{E(|X-Y|)}{2EX} = \frac{E(X+Y-2\min(X,Y))}{2EX} = 1 - \frac{E(\min(X,Y))}{EX}$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \; iid, Y_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad G_n = 1 - \frac{E(Y_n)}{EX_1}$$

Twierdzenie. Ciąg $G_n$ wyznacza $L_X$ z dokładnością do stałej



$$f(x)=\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}$$

Wskaźnik Giniego dla rozkładu Parety

$$G=\frac{1}{2\alpha-1} \qquad \alpha=\frac{1+G}{2G}$$

Polska ma wskaźnik Giniego 0,34 stąd $\alpha=1{,}97$

Stą np. wynika, że majątek 10 – krotnie większy od minimalnego posiada

$$\left(\frac{x_0}{10x_0}\right)^{1{,}97}=10^{-1{,}97}=0{,}01=1\%$$

## Jak poznać, czy dane mają rozkład Parety i jak znaleźć wykładnik α

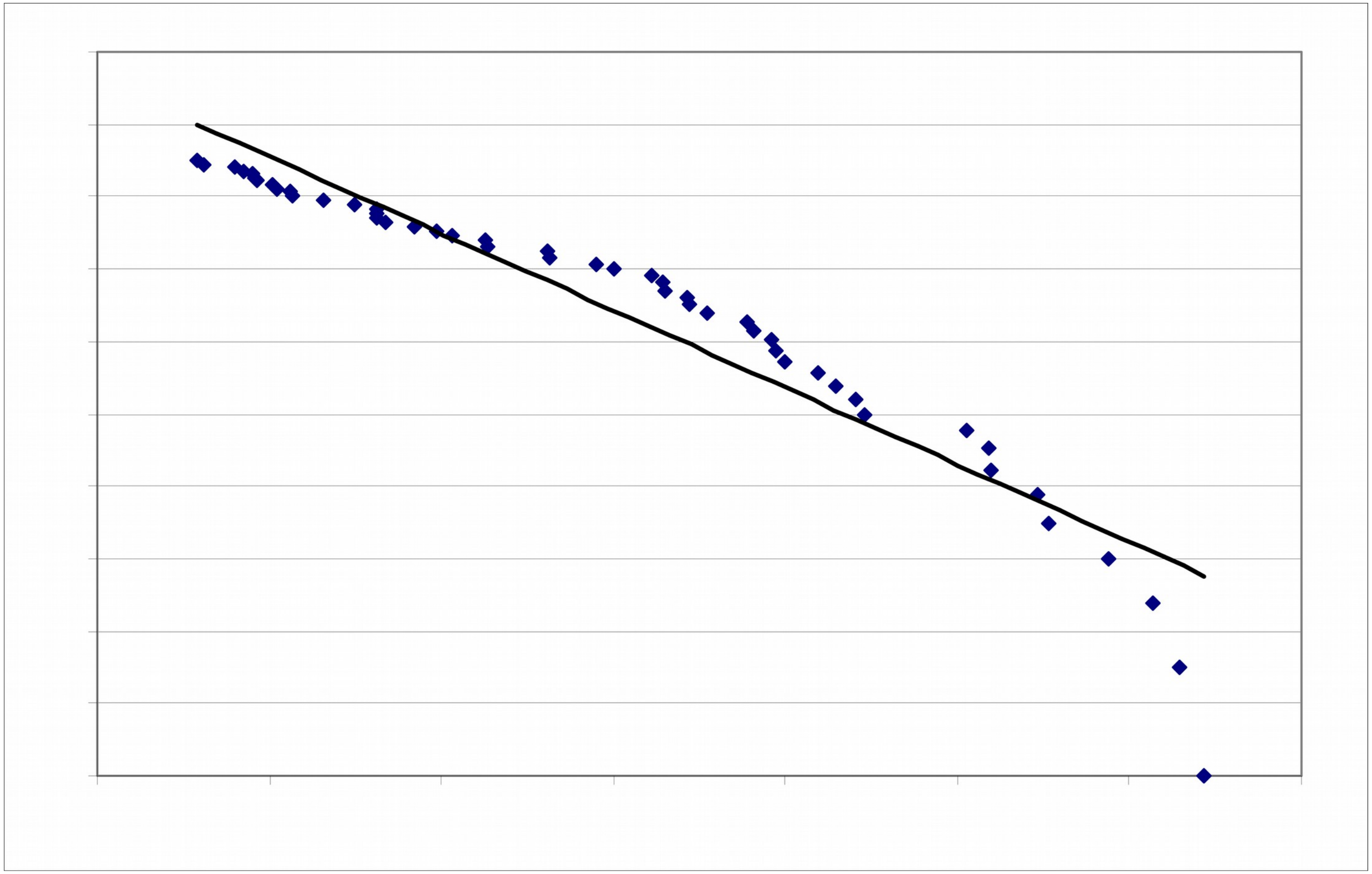
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Mumbaj | 13922125 | 41 | Rangun | 4088000 |
| 2 | Szanghaj | 13481600 | 42 | Hajdarabad | 4025335 |
| 3 | Karaczi | 12991000 | 43 | Shenyang | 3995531 |
| 4 | Delhi | 12259230 | 44 | Ahmadabad | 3913793 |
| 5 | Stambuł | 11289613 | 45 | Ankara | 3901201 |
| 6 | Nowy Jork | 11125000 | 46 | Johannesburg | 3888180 |
| 7 | Moskwa | 10452000 | 47 | Los Angeles | 3849378 |
| 8 | Seul | 10421782 | 48 | Abidżan | 3802000 |
| 9 | Pekin | 10123000 | 49 | Jokohama | 3650000 |
| 10 | Meksyk | 8836045 | 50 | Pusan | 3615101 |

r-te miasto na liście o ludności $u_r$ ma $f(u_r) = \frac{r}{n}$ miast co najmniej tak dużych

$$\frac{r}{n} = f(u_r) = \left(\frac{x_0}{u_r}\right)^{\alpha} \qquad r = n\left(\frac{x_0}{u_r}\right)^{\alpha}$$

$$\log(r) = \log\left(n x_0^{\alpha}\right) - \alpha \log(u_r) = a - \alpha \log(u_r)$$

$$\log(r) = a - \alpha \log(u_r)$$



$\alpha = 2{,}13 \qquad G = 0{,}31$

Projekt Gutenberg:

Angielski 2 880 579 249 słów

Francuski139 837 771 słów

Słowo bogate – często występujące w języku

| ANG | FRA | bogactwo |
|---|---|---|
| 93 | 89 | 50% |
| 696 | 795 | 70% |
| 6428 | 9050 | 90% |
| 14736 | 21231 | 95% |

| | ANG | FRA |
|---|---|---|
| alfa | 2,15 | 2,32 |
| G | 0,30 | 0,27 |