

Na końcu nie zawsze jest odpowiedź

(LXVIII Szkoła Matematyki Poglądowej, 28-31 sierpnia 2025 r.)

Zbigniew Marciniak, Uniwersytet Warszawski

Na Analizie I poznajemy funkcje elementarne.

Uczymy się też wzorów pozwalających je różniczkować, z których wynika, że pochodna funkcji elementarnej jest także funkcją elementarną.

Na Analizie I poznajemy funkcje elementarne.

Uczymy się też wzorów pozwalających je różniczkować, z których wynika, że pochodna funkcji elementarnej jest także funkcją elementarną.

Poznajemy też algorytm z którego wynika, że całka nieoznaczona z każdej funkcji wymiernej jest funkcją elementarną, np.

$$\int \frac{dx}{x^3 - 8} = \frac{1}{12} \ln|x - 2| - \frac{1}{24} \ln|x^2 + 2x + 4| - \frac{\sqrt{3}}{12} \operatorname{arctg} \left(\frac{x + 1}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

Każdy student matematyki słyszy też na pierwszym roku studiów, że

nie istnieje funkcja elementarna f taka, że $\int e^{-x^2} dx = f(x)$

i... do końca studiów nie dowiaduje się dlaczego tak jest. Czyli: na końcu nie zawsze jest odpowiedź.

$$f \rightarrow f'$$

Funkcje elementarne

f. wymierne

Funkcje elementarne

f. wymierne

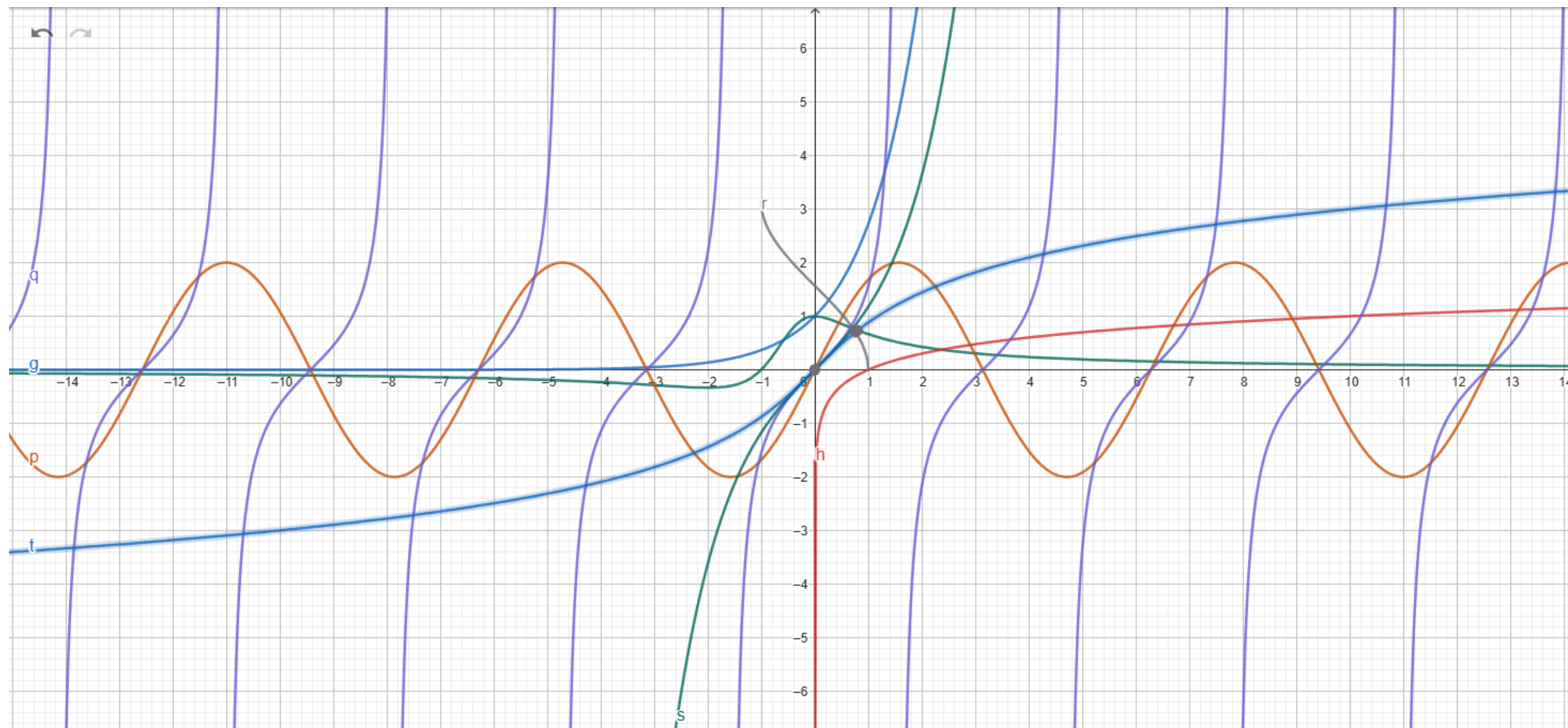
$$\int f \leftarrow f$$



TWIERDZENIE (Joseph Liouville, 1835)

Nie istnieje funkcja elementarna f taka, że $f' = e^{-x^2}$.





Funkcje elementarne, to:

- funkcje wielomianowe i wymierne,
- funkcje potęgowe,
- funkcje wykładnicze i logarytmiczne,
- funkcje trygonometryczne i funkcje do nich odwrotne,
- funkcje hiperboliczne i funkcje do nich odwrotne

oraz dowolne funkcje, które możemy otrzymać z powyższych za pomocą wielokrotnego wykonywania na nich czterech działań arytmetycznych oraz ich składania.

Funkcje elementarne, to:

- funkcje wielomianowe i wymierne,
- funkcje potęgowe,
- funkcje wykładnicze i logarytmiczne,
- funkcje trygonometryczne i funkcje do nich odwrotne,
- funkcje hiperboliczne i funkcje do nich odwrotne

oraz dowolne funkcje, które możemy otrzymać z powyższych za pomocą wielokrotnego wykonywania na nich czterech działań arytmetycznych oraz ich składania.

• Na przykład, funkcją elementarną jest

$$f(z) = \frac{\ln \left(z^2 + e^{\frac{z+1}{z^2+2}} \right)}{z^3}$$

Funkcje elementarne, to:

- funkcje wielomianowe i wymierne,
- funkcje potęgowe,
- funkcje wykładnicze i logarytmiczne,
- funkcje trygonometryczne i funkcje do nich odwrotne,
- funkcje hiperboliczne i funkcje do nich odwrotne

oraz dowolne funkcje, które możemy otrzymać z powyższych za pomocą wielokrotnego wykonywania na nich czterech działań arytmetycznych oraz ich składania.

Funkcje elementarne, to:

- funkcje wielomianowe i wymierne,
- funkcje potęgowe,
- funkcje wykładnicze i logarytmiczne,
- funkcje trygonometryczne i funkcje do nich odwrotne,
- funkcje hiperboliczne i funkcje do nich odwrotne

oraz dowolne funkcje, które możemy otrzymać z powyższych za pomocą wielokrotnego wykonywania na nich czterech działań arytmetycznych oraz ich składania.

– funkcje potęgowe:

$$x^a = e^{a \ln x}$$

Funkcje elementarne, to:

- funkcje wielomianowe i wymierne,
- ~~funkcje potęgowe,~~
- funkcje wykładnicze i logarytmiczne,
- funkcje trygonometryczne i funkcje do nich odwrotne,
- funkcje hiperboliczne i funkcje do nich odwrotne

oraz dowolne funkcje, które możemy otrzymać z powyższych za pomocą wielokrotnego wykonywania na nich czterech działań arytmetycznych oraz ich składania.

– funkcje potęgowe:

$$x^a = e^{a \ln x}$$

Funkcje elementarne, to:

- funkcje wielomianowe i wymierne,
- ~~funkcje potęgowe~~,
- funkcje wykładnicze i logarytmiczne,
- funkcje trygonometryczne i funkcje do nich odwrotne,
- funkcje hiperboliczne i funkcje do nich odwrotne

oraz dowolne funkcje, które możemy otrzymać z powyższych za pomocą wielokrotnego wykonywania na nich czterech działań arytmetycznych oraz ich składania.

– funkcje hiperboliczne:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \dots$$

Funkcje elementarne, to:

- funkcje wielomianowe i wymierne,
- ~~funkcje potęgowe,~~
- funkcje wykładnicze i logarytmiczne,
- funkcje trygonometryczne i funkcje do nich odwrotne,
- ~~funkcje hiperboliczne~~ i funkcje do nich odwrotne

oraz dowolne funkcje, które możemy otrzymać z powyższych za pomocą wielokrotnego wykonywania na nich czterech działań arytmetycznych oraz ich składania.

– funkcje hiperboliczne:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \dots$$

Funkcje elementarne, to:

- funkcje wielomianowe i wymierne,
- ~~funkcje potęgowe,~~
- funkcje wykładnicze i logarytmiczne,
- funkcje trygonometryczne i funkcje do nich odwrotne,
- ~~funkcje hiperboliczne~~ i funkcje do nich odwrotne

oraz dowolne funkcje, które możemy otrzymać z powyższych za pomocą wielokrotnego wykonywania na nich czterech działań arytmetycznych oraz ich składania.

– odwrotne funkcje hiperboliczne:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$\operatorname{artgh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \dots$$

Funkcje elementarne, to:

- funkcje wielomianowe i wymierne,
- ~~funkcje potęgowe,~~
- funkcje wykładnicze i logarytmiczne,
- funkcje trygonometryczne i funkcje do nich odwrotne,
- ~~funkcje hiperboliczne i funkcje do nich odwrotne~~

oraz dowolne funkcje, które możemy otrzymać z powyższych za pomocą wielokrotnego wykonywania na nich czterech działań arytmetycznych oraz ich składania.

– odwrotne funkcje hiperboliczne:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$\operatorname{artgh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \dots$$

Zatem funkcje elementarne to:

- funkcje wymierne,
- funkcje e^x oraz $\ln x$,
- funkcje trygonometryczne i do nich odwrotne

oraz dowolne funkcje, które możemy otrzymać z powyższych za pomocą wielokrotnego wykonywania na nich czterech działań arytmetycznych oraz składania.

Możliwe jest dalsze skrócenie tej listy, gdy do rodziny funkcji elementarnych zaliczymy powyższe funkcje rozszerzone na liczby zespolone.

Wtedy możemy wyeliminować z naszej listy funkcje trygonometryczne:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \operatorname{tg}(x) = -\frac{i}{2} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}, \quad \dots$$

oraz odwrotne do nich funkcje cyklometryczne:

$$\operatorname{arctg}(x) = -\frac{i}{2} \cdot \left[\ln \frac{x-i}{x+i} - \frac{\pi}{2} \right], \quad \arccos(x) = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right),$$

$$\arcsin(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right), \quad \dots$$

Zatem funkcje elementarne to:

- funkcje wymierne,
- funkcje e^x oraz $\ln x$,
- ~~funkcje trygonometryczne i do nich odwrotne~~

oraz dowolne funkcje, które możemy otrzymać z powyższych za pomocą wielokrotnego wykonywania na nich czterech działań arytmetycznych oraz składania.

Powyższe uogólnienie nie wpłynie na rozwiązanie naszego zadania, bowiem udowodnimy, że $\int e^{-x^2} dx$ nie jest funkcją elementarną nawet w tym ogólniejszym sensie.



Funkcje elementarne to funkcje z , e^z , $\ln z$ oraz wszystkie te funkcje, które możemy z nich uzyskać za pomocą wielokrotnego wykonywania czterech działań arytmetycznych oraz składania.

Każda z nich jest określona na pewnym podzbiorze otwartym $\mathbb{C}$.

Jak powstaje $\frac{\ln\left(z^2 + e^{\frac{z+1}{z^2+2}}\right)}{z^3}$?

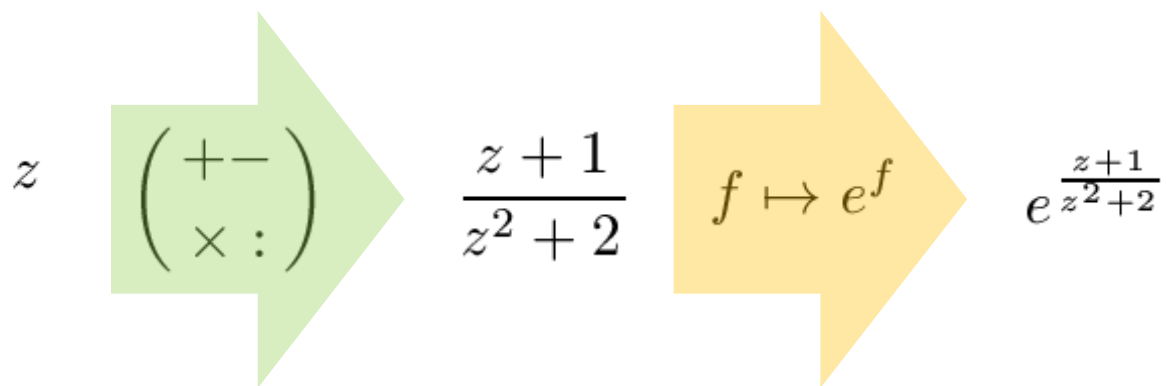
Jak powstaje $\frac{\ln\left(z^2 + e^{\frac{z+1}{z^2+2}}\right)}{z^3}$?

z

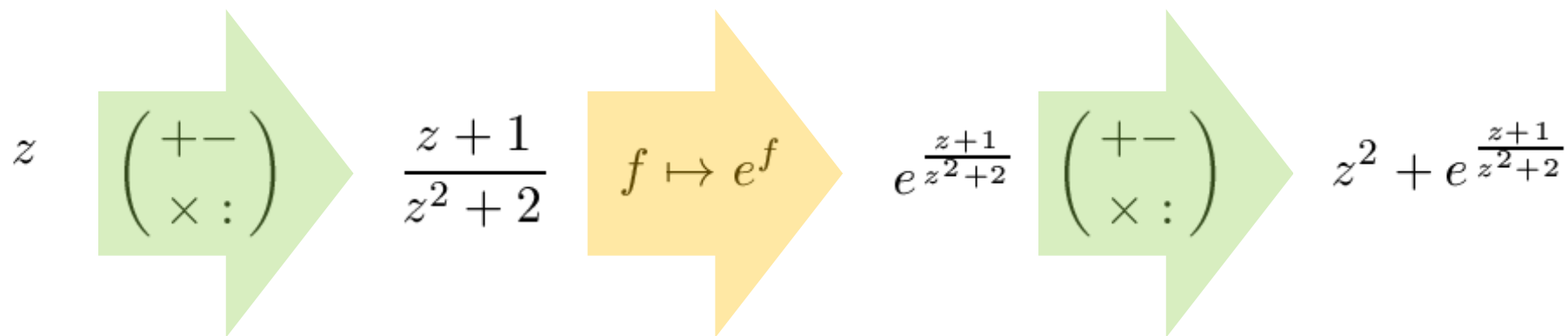
Jak powstaje $\frac{\ln\left(z^2 + e^{\frac{z+1}{z^2+2}}\right)}{z^3}$?

$$z \quad \left(\begin{array}{c} + - \\ \times : \end{array} \right) \rightarrow \frac{z+1}{z^2+2}$$

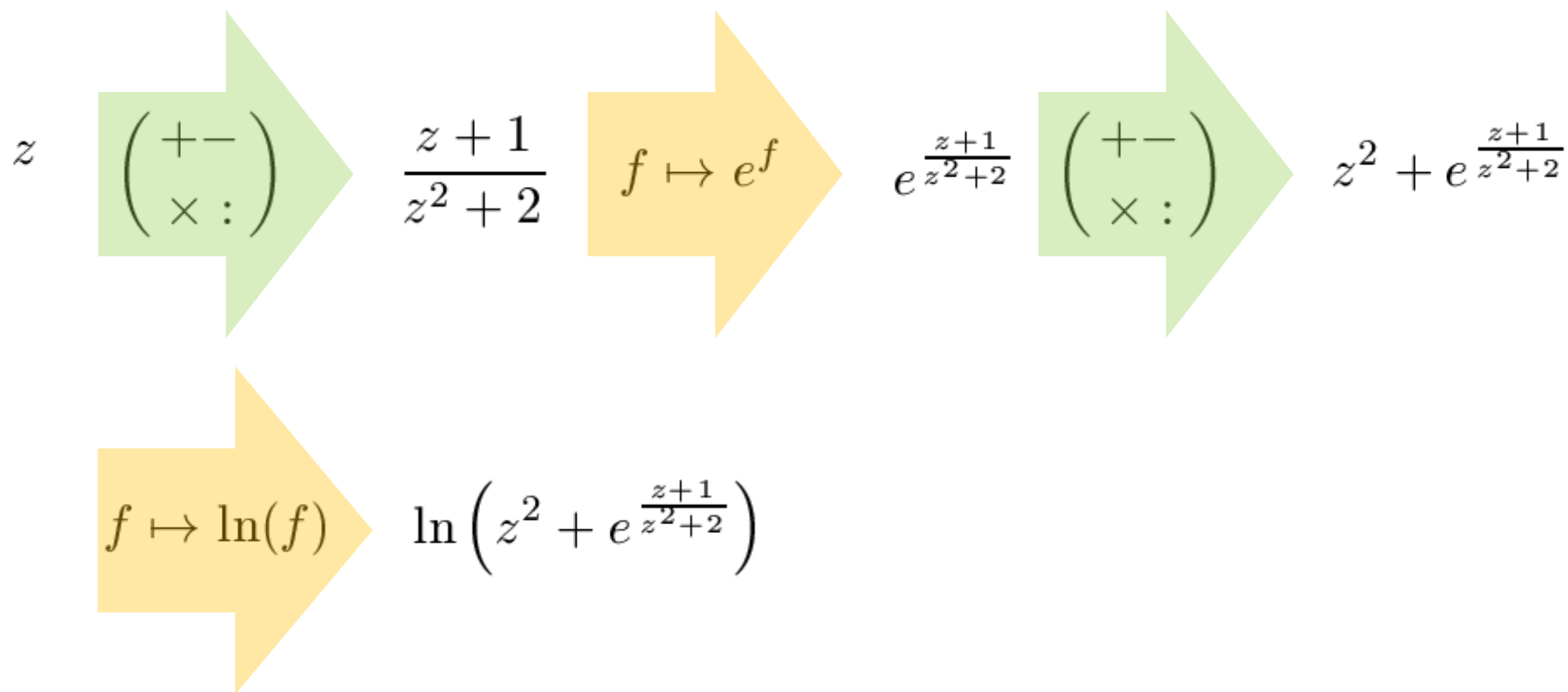
Jak powstaje $\frac{\ln\left(z^2 + e^{\frac{z+1}{z^2+2}}\right)}{z^3}$?



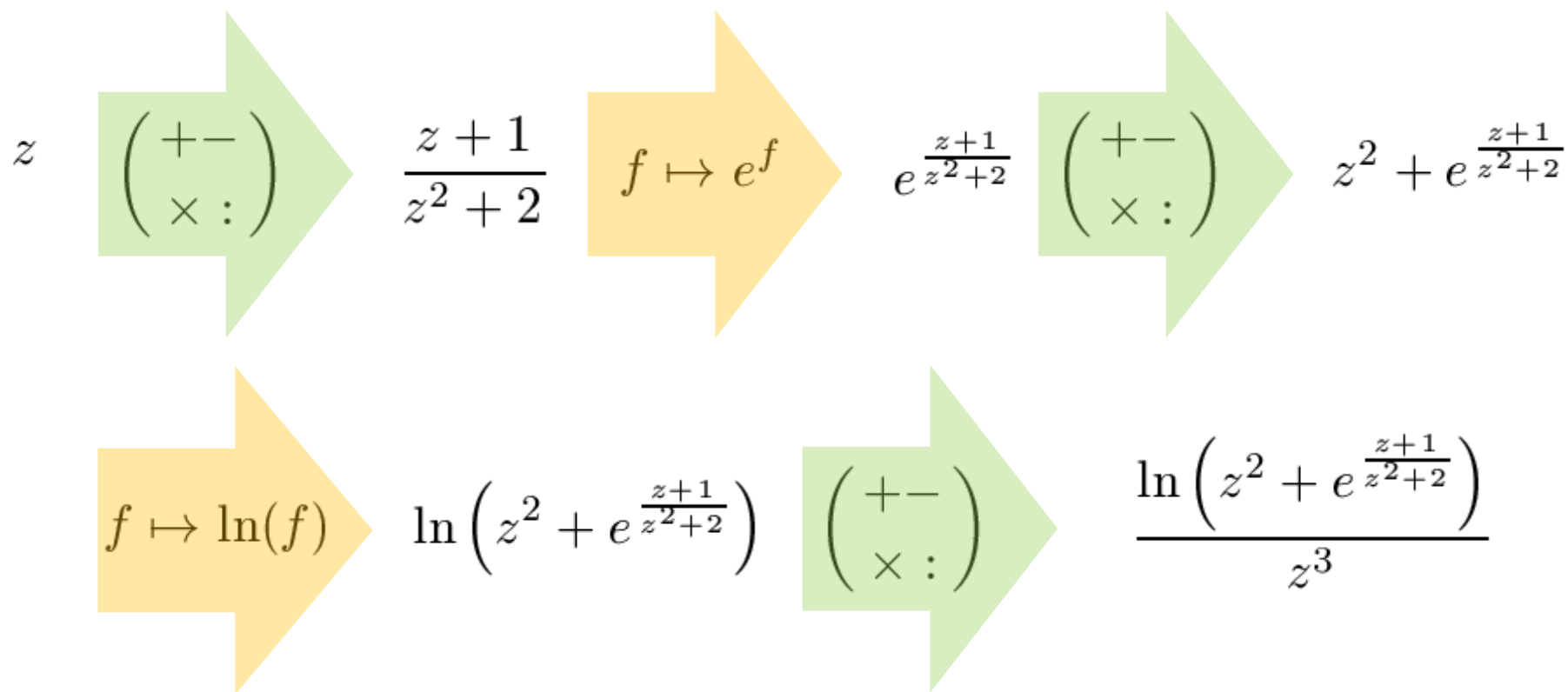
Jak powstaje $\frac{\ln\left(z^2 + e^{\frac{z+1}{z^2+2}}\right)}{z^3}$?



Jak powstaje $\frac{\ln\left(z^2 + e^{\frac{z+1}{z^2+2}}\right)}{z^3}$?



Jak powstaje $\frac{\ln\left(z^2 + e^{\frac{z+1}{z^2+2}}\right)}{z^3}$?



Przyjrzyjmy się "zielonej" operacji.

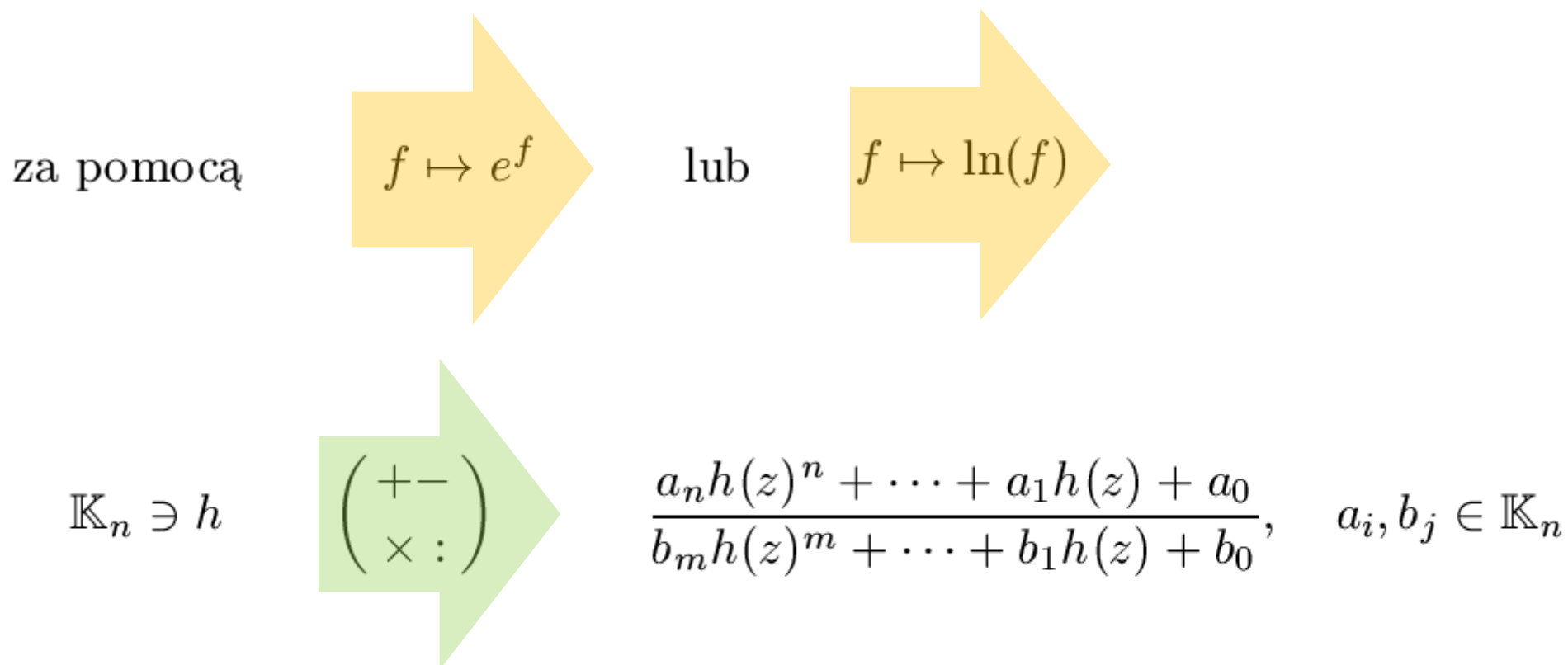
◊

$$z \quad \left(\begin{array}{c} + - \\ \times : \end{array} \right) \rightarrow \frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}, \quad a_i, b_j \in \mathbb{C}$$

Otrzymujemy ciało funkcji wymiernych $\mathbb{C}(z)$.

Jak wyglądają następne zastosowania "zielonej" operacji?

Gdy do danego ciała funkcji $\mathbb{K}_n$ dołączymy nową funkcję h , na przykład



Tak otrzymane funkcje tworzą nowe ciało $\mathbb{K}_{n+1}$.

Widzimy, że funkcje elementarne zdefiniowane są w sposób rekurencyjny. Wobec tego każdą funkcję elementarną znajdziemy na ostatnim piętrze pewnej wieży ciał:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{K}_0 & \subseteq & \mathbb{K}_1 & \subseteq & \mathbb{K}_2 & \subseteq & \cdots \subseteq \mathbb{K}_n \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathbb{C}(x) & & \mathbb{K}_0(f_1) & & \mathbb{K}_1(f_2) & & \mathbb{K}_{n-1}(f_n) \end{array}$$

przy czym dla każdego $i = 1, \dots, n$ funkcja $f_i(x)$ jest postaci $\ln(g(x))$ lub $e^{g(x)}$ dla pewnej funkcji $g(x) \in \mathbb{K}_{i-1}$.

To już prawie algebraizacja problemu.

Ale jeszcze nie całkiem, bo pozostają dwie kwestie:

- 1) Mamy wykazać, że w żadnym ciele $\mathbb{K}_n$ nie ma funkcji f takiej, że $f' = e^{-x^2}$, więc w naszej algebrze musi pojawić się pochodna.
- 2) Jak zdefiniować funkcje e^z oraz $\ln(z)$ w języku algebry, czyli bez użycia granic i szeregów zbieżnych?

DEFINICJA.

Ciałem różniczkowym nazywamy ciało $\mathbb{K}$ wyposażone w różniczkowanie, tj. w funkcję $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \mapsto a'$, która spełnia dwa warunki:

◊

$$(a + b)' = a' + b', \quad (a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'.$$

DEFINICJA.

Ciałem różniczkowym nazywamy ciało $\mathbb{K}$ wyposażone w różniczkowanie, tj. w funkcję $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \mapsto a'$, która spełnia dwa warunki:

◊

$$(a + b)' = a' + b', \quad (a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'.$$

PRZYKŁADY.

1) $\mathbb{K} = \mathcal{M}(U)$ – ciało funkcji meromorficznych na podzbiorze otwartym, ze zwykłą pochodną zespoloną.

2) $\mathbb{K} = \mathbb{F}(t)$ – ciało funkcji wymiernych o współczynnikach w dowolnym ciele (np. w ciele $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$) z różniczkowaniem takim, że $\mathbb{F}' = 0$ oraz $t' = 1$.

W dowolnym ciele różniczkowym mamy:

$$(a^2)' = (a \cdot a)' = a' \cdot a + a \cdot a' = 2aa'$$

$$(a^n)' = na^{n-1}a', \text{ dla } n \geq 1$$

$$a' = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)' = \left(\frac{a}{b}\right)' \cdot b + \frac{a}{b} \cdot b', \text{ skąd } \left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a' \cdot b - a \cdot b'}{b^2}$$

W dowolnym ciele różniczkowym mamy:

$$(a^2)' = (a \cdot a)' = a' \cdot a + a \cdot a' = 2aa'$$

$$(a^n)' = na^{n-1}a', \text{ dla } n \geq 1$$

$$a' = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)' = \left(\frac{a}{b}\right)' \cdot b + \frac{a}{b} \cdot b', \text{ skąd } \left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a' \cdot b - a \cdot b'}{b^2}$$

$$\frac{(a \cdot b)'}{a \cdot b} = \frac{a' \cdot b + a \cdot b'}{a \cdot b} = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}$$

W dowolnym ciele różniczkowym mamy:

$$(a^2)' = (a \cdot a)' = a' \cdot a + a \cdot a' = 2aa'$$

$$(a^n)' = na^{n-1}a', \text{ dla } n \geq 1$$

$$a' = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)' = \left(\frac{a}{b}\right)' \cdot b + \frac{a}{b} \cdot b', \text{ skąd } \left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a' \cdot b - a \cdot b'}{b^2}$$

$$\frac{(a \cdot b)'}{a \cdot b} = \frac{a' \cdot b + a \cdot b'}{a \cdot b} = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}$$

$$\frac{(a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_r^{k_r})'}{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_r^{k_r}} = k_1 \cdot \frac{a_1'}{a_1} + k_2 \cdot \frac{a_2'}{a_2} + \cdots + k_r \cdot \frac{a_r'}{a_r}$$

W dowolnym ciele różniczkowym mamy:

$$(a^2)' = (a \cdot a)' = a' \cdot a + a \cdot a' = 2aa'$$

$$1' = (1^2)' = 2 \cdot 1' \cdot 1 = 2 \cdot 1' \Rightarrow 1' = 0,$$

$$0 = 1' = [(-1) \cdot (-1)]' = 2 \cdot (-1) \cdot (-1)' = -2 \cdot (-1)' \Rightarrow (-1)' = 0$$

$$(-a)' = [(-1) \cdot a]' = (-1)' \cdot a + (-1) \cdot a' = -a' \Rightarrow (a - b)' = a' - b'$$

Zatem $\mathbb{F} = \{a \in \mathbb{K} : a' = 0\}$ jest podciałem ciała $\mathbb{K}$ ('podciało stałych')

W dowolnym ciele różniczkowym mamy:

$$(a^2)' = (a \cdot a)' = a' \cdot a + a \cdot a' = 2aa'$$

$$1' = (1^2)' = 2 \cdot 1' \cdot 1 = 2 \cdot 1' \Rightarrow 1' = 0,$$

$$0 = 1' = ((-1) \cdot (-1))' = 2 \cdot (-1) \cdot (-1)' = -2 \cdot (-1)' \Rightarrow (-1)' = 0$$

Zatem $\mathbb{F} = \{a \in \mathbb{K} : a' = 0\}$ jest podciałem ciała $\mathbb{K}$ ('podciało stałych')

W przykładzie 2):

$\mathbb{K} = \mathbb{F}(t)$, $\mathbb{F}' = 0$, $t' = 1$, dla $a \in \mathbb{F}$ mamy $(a \cdot t^n)' = a \cdot nt^{n-1}$, więc znamy pochodną każdego wielomianu, a więc także każdej funkcji wymiernej.

Widzimy, że funkcje elementarne zdefiniowane są w sposób rekurencyjny. Wobec tego każdą funkcję elementarną znajdziemy na ostatnim piętrze pewnej wieży ciał różniczkowych:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{K}_0 & \subseteq & \mathbb{K}_1 & \subseteq & \mathbb{K}_2 & \subseteq & \dots & \subseteq & \mathbb{K}_n \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ \mathbb{C}(x) & & \mathbb{K}_0(f_1) & & \mathbb{K}_1(f_2) & & & & \mathbb{K}_{n-1}(f_n) \end{array}$$

przy czym dla każdego $i = 1, \dots, n$ funkcja $f_i(x)$ jest postaci $\ln(g(x))$ lub $e^{g(x)}$ dla pewnej funkcji $g(x) \in \mathbb{K}_{i-1}$.

Jak zalgebraizować e^z oraz $\ln(z)$?

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \cdots$$

Jak zaalgebraizować e^z oraz $\ln(z)$?

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \cdots$$



Nie chcemy obliczać wartości funkcji e^z oraz $\ln(z)$,
a jedynie wyznaczać ich pochodne!

$$\begin{array}{ll}
 a = e^b & \Rightarrow a' = e^b \cdot b' = a \cdot b', \\
 b = \ln(a) & \Rightarrow b' = \frac{a'}{a}.
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a = e^b &\Rightarrow a' = e^b \cdot b' = a \cdot b', \\ b = \ln(a) &\Rightarrow b' = \frac{a'}{a}. \end{aligned}$$

DEFINICJA. Niech a, b będą elementami pewnego ciała różniczkowego $\mathbb{K}$, przy czym $a \neq 0$. Powiemy, że a jest eksponentą b (b jest logarytmem a) jeśli

$$b' = \frac{a'}{a}.$$

$$\mathbb{F} \quad \xrightarrow{f \mapsto e^f} \quad \mathbb{K} :$$

Dane $f, f' \in \mathbb{F}$, dołączamy do $\mathbb{F}$ element $t = e^f$. Wtedy

$$t' = e^f \cdot f' = t \cdot f' \Rightarrow \frac{t'}{t} = f' \in \mathbb{F}$$

czyli dołączyliśmy element t taki, że $t'/t \in \mathbb{F}$.

$$\mathbb{F} \quad \xrightarrow{f \mapsto \ln(f)} \quad \mathbb{K} :$$

Dane $f, f' \in \mathbb{F}$, dołączamy do $\mathbb{F}$ element $t = \ln(f)$. Wtedy

$$t' = \frac{f'}{f} \in \mathbb{F}$$

czyli dołączyliśmy element t taki, że $t' \in \mathbb{F}$.

Zatem

$$\mathbb{F} \xrightarrow{f \mapsto \ln(f)} \mathbb{K} \Leftrightarrow \mathbb{F} \subseteq \mathbb{K} = \mathbb{F}(t), \text{ gdzie } t' \in \mathbb{F}$$

$$\mathbb{F} \xrightarrow{f \mapsto e^f} \mathbb{K} \Leftrightarrow \mathbb{F} \subseteq \mathbb{K} = \mathbb{F}(t), \text{ gdzie } \frac{t'}{t} \in \mathbb{F}$$

PEŁNA ALGEBRAIZACJA PROBLEMU

Każdą funkcję elementarną znajdziemy na ostatnim piętrze pewnej wieży ciał różniczkowych:

$$\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{K}_n,$$

gdzie dla $i = 0, \dots, n-1$ mamy

1) $\mathbb{K}_0 = \mathbb{C}(z),$

2) $\mathbb{K}_{i+1} = \mathbb{K}_i(t_i),$

3) albo $t'_i \in \mathbb{K}_i$, albo $t'_i/t_i \in \mathbb{K}_i$.

NASZ PROBLEM:

Chcemy wykazać, że e^{-z^2} nie jest pochodną żadnej funkcji elementarnej.

Które funkcje elementarne są pochodną jakiejś funkcji elementarnej?

NASZ PROBLEM:

Chcemy wykazać, że e^{-z^2} nie jest pochodną żadnej funkcji elementarnej.

Które funkcje elementarne są pochodną jakiejś funkcji elementarnej?

TWIERDZENIE. Niech

$$\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{K}_n$$

będzie wieżą ciał różniczkowych char 0 o wspólnym podciele stałych $\mathbb{F}$. Jeśli $f \in \mathbb{K}_r$, $0 \leq r \leq n$, jest pochodną pewnej funkcji elementarnej leżącej na najwyższym piętrze tej wieży, to istnieją stałe $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{F}$ oraz elementy $u_1, \dots, u_k, v \in \mathbb{K}_r$ takie, że

$$\diamond \quad f = \sum_{i=1}^k c_i \cdot \frac{u'_i}{u_i} + v'.$$

Idea dowodu: indukcja względem $n - r$.

$$f \in \mathbb{K}_r \subseteq \mathbb{K}_{r+1} = \mathbb{K}_r(t) \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{K}_n \ni g, \quad g' = f.$$

Z założenia indukcyjnego:

$$f = \sum_{i=1}^k c_i \cdot \frac{u'_i(t)}{u_i(t)} + v'(t), \quad f \text{ nie zależy od } t.$$

Pokazujemy, że t nie może też wystąpić po prawej stronie.

$$f = \sum_{i=1}^k c_i \cdot \frac{u'_i}{u_i} + v'.$$

Jeśli $r \geq 1$, to $f \in \mathbb{K}_r = \mathbb{K}_{r-1}(t)$.

Czasem można zrobić jeszcze jeden krok. Załóżmy, że

- 1) element t jest przestępny nad $\mathbb{K}_{r-1}$,
- 2) $t'/t \in \mathbb{K}_{r-1}$,
- 3) f jest wielomianem od t

Wtedy istnieje element $c \in \mathbb{K}_{r-1}$ i wielomian $v(t) \in \mathbb{K}_{r-1}[t]$ takie, że

$$f = c + v'(t).$$

Zastosujemy to do $f = e^{-z^2}$ oraz $r = 1$. Mamy

$$\mathbb{C}(z) = \mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_0(t), \quad t = e^{-z^2}.$$

Sprawdzamy założenia:

1) t jest elementem przestępnym nad podciałem $\mathbb{C}(z)$:

Gdyby

$$t^n + a_{n-1}(z)t^{n-1} + \dots + a_1(z)t + a_0(z) = 0$$

z najmniejszym możliwym n , to bierzmy pochodną. Ponieważ $t' = t \cdot (-2z)$, otrzymujemy

$$nt^{n-1} \cdot t \cdot (-2z) + \dots = 0, \quad t^n + \dots = 0$$

i odejmując uzyskalibyśmy wielomian niższego stopnia o pierwiastku t .

2) $t'/t \in \mathbb{C}(z)$, gdyż $t' = (e^{-z^2})' = e^{-z^2} \cdot (-2z) = t \cdot (-2z)$, czyli $t'/t = -2z$.

3) $f = t$ jest wielomianem.

Zatem

$$t = c + v'(t) = c + \left(\sum_{j=0}^m b_j t^j \right)', \quad c, b_j \in \mathbb{C}(z).$$

$$t = c + \sum_{j=0}^m (b'_j t^j + b_j \cdot j \cdot t^{j-1} \cdot t') = c + \sum_{j=0}^m (b'_j - 2zjb_j) \cdot t^j$$

$$1 = b'_1 - 2zb_1, \quad b_1 \in \mathbb{C}(z).$$

WNIOSEK.

Jeśli $\int e^{-z^2} dz$ jest funkcją elementarną, to istnieje funkcja wymierna $\phi(z)$, która jest rozwiązaniem równania $\phi' - 2z \cdot \phi = 1$.

WNIOSEK.

Jeśli $\int e^{-z^2} dz$ jest funkcją elementarną, to istnieje funkcja wymierna $\phi(z)$, która jest rozwiązaniem równania $\phi' - 2z \cdot \phi = 1$.

Niech $\phi = p/q$ dla pary względnie pierwszych wielomianów p, q . Wtedy

$$\left(\frac{p}{q}\right)' - 2z \left(\frac{p}{q}\right) = 1$$

$$\frac{p'q - pq'}{q^2} - \frac{2zp}{q} = 1, \quad p'q - pq' - 2zpq = q^2$$

$$q(p' - 2zp - q) = pq'$$

skąd $q|q'$, więc q jest stałą, zaś ϕ jest wielomianem.

Ale jeśli $n = \deg(\phi)$, to $\deg(\phi' - 2z \cdot \phi) = n + 1 \geq 1$, więc $\phi' - 2z \cdot \phi \neq 1$.

Ta sprzeczność kończy dowód twierdzenia Liouville'a.

Szczegóły można znaleźć tu:

Maxwell Rosenlicht *Liouville's Theorem on Functions with Elementary Integrals*, Pacific Journal of Mathematics, **24**, Nr 1, 1968

Maxwell Rosenlicht *Integration in Finite Terms*, American Math. Monthly **72**, Nr 10, 1972

