

Jak skwantować przestrzeń metryczną?

Tomasz Miller (Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych UJ)

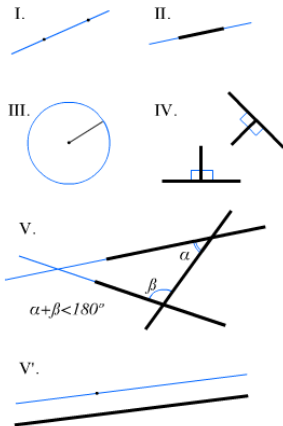
współpraca: **Rafał Bistroń** (UJ), **Michał Eckstein** (UJ),
Shmuel Friedland (U of Illinois) i **Karol Życzkowski** (UJ)



68. Szkoła Matematyki Poglądowej, 24 sierpnia 2025

geometria euklidesowa $\subsetneq$ geometria

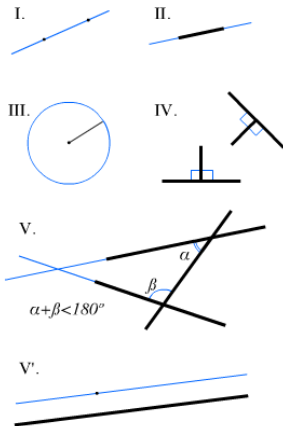
Postulaty Euklidesa (i Playfaira)



- W XIX w. odkryto geometrie nieeuklidesowe...
- ...a także liczne mankamenty w *Elementach*.
- Było jasne, że geometrię trzeba przemyśleć od nowa!

geometria euklidesowa $\subsetneq$ geometria

Postulaty Euklidesa (i Playfaira)



Nikołaj Łobaczewski



János Bolyai

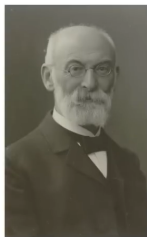
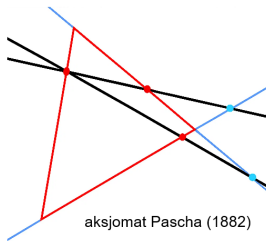
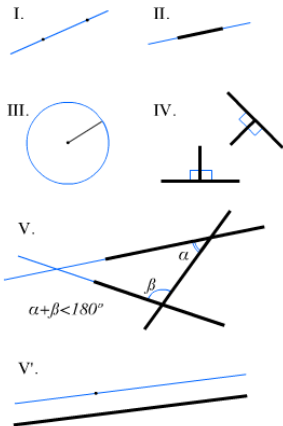


Carl Friedrich Gauss

- W XIX w. odkryto geometrie nieeuklidesowe...
- ...a także liczne mankamenty w *Elementach*.
- Było jasne, że geometrię trzeba przemyśleć od nowa!

geometria euklidesowa $\subsetneq$ geometria

Postulaty Euklidesa (i Playfaira)

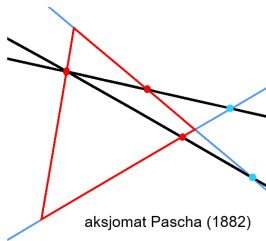
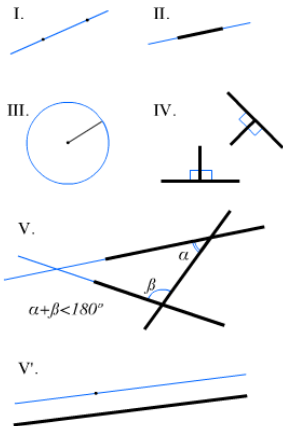


Moritz Pasch

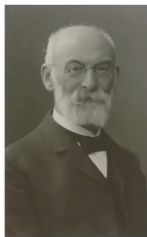
- W XIX w. odkryto geometrie nieeuklidesowe...
- ...a także liczne mankamenty w *Elementach*.
- Było jasne, że geometrię trzeba przemyśleć od nowa!

geometria euklidesowa $\subsetneq$ geometria

Postulaty Euklidesa (i Playfaira)



aksjomat Pascha (1882)



Moritz Pasch

- W XIX w. odkryto geometrie nieeuklidesowe...
- ...a także liczne mankamenty w *Elementach*.
- Było jasne, że geometrię trzeba **przemyśleć od nowa!**

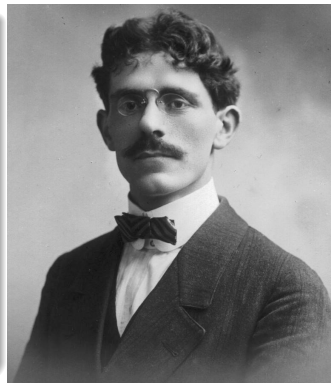
- Okazało się, że wiele działów matematyki da się “zgeometryzować”!

Definicja

Niech X – zbiór. Funkcję $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **metryką**, jeśli $\forall x, y, z \in X$

- 1 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2 $d(x, y) = d(y, x)$
- 3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$
(nierówność trójkąta)

Parę (X, d) nazywamy wówczas **przestrzenią metryczną**.



René Maurice Fréchet

Przykłady metryk

- $X := \mathbb{R}^n$,
- $X := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty\}$

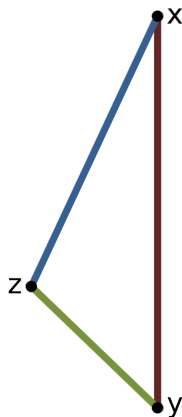
- Okazało się, że wiele działów matematyki da się “zgeometryzować”!

Definicja

Niech X – zbiór. Funkcję $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **metryką**, jeśli $\forall x, y, z \in X$

- 1 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2 $d(x, y) = d(y, x)$
- 3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$
(nierówność trójkąta)

Parę (X, d) nazywamy wówczas **przestrzenią metryczną**.



Przykłady metryk

- $X := \mathbb{R}^n$,
- $X := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty\}$

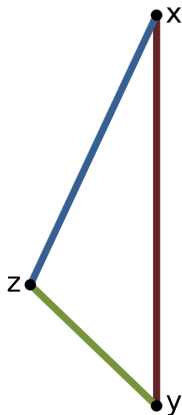
- Okazało się, że wiele działów matematyki da się “zgeometryzować”!

Definicja

Niech X – zbiór. Funkcję $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **metryką**, jeśli $\forall x, y, z \in X$

- 1 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2 $d(x, y) = d(y, x)$
- 3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$
(nierówność trójkąta)

Parę (X, d) nazywamy wówczas **przestrzenią metryczną**.



Przykłady metryk

- $X := \mathbb{R}^n$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$
- $X := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty\}$

- Okazało się, że wiele działów matematyki da się “zgeometryzować”!

Definicja

Niech X – zbiór. Funkcję $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **metryką**, jeśli $\forall x, y, z \in X$

- 1 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2 $d(x, y) = d(y, x)$
- 3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$
(nierówność trójkąta)

Parę (X, d) nazywamy wówczas **przestrzenią metryczną**.



Frigyes Riesz

Przykłady metryk

- $X := \mathbb{R}^n$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{1/p}$ dla $p \geq 1$.
- $X := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty\}$

- Okazało się, że wiele działów matematyki da się “zgeometryzować”!

Definicja

Niech X – zbiór. Funkcję $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **metryką**, jeśli $\forall x, y, z \in X$

- 1 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2 $d(x, y) = d(y, x)$
- 3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$
(nierówność trójkąta)

Parę (X, d) nazywamy wówczas **przestrzenią metryczną**.



Frigyes Riesz

Przykłady metryk

- $X := \mathbb{C}^n$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{1/p}$ dla $p \geq 1$.
- $X := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty\}$

- Okazało się, że wiele działów matematyki da się “zgeometryzować”!

Definicja

Niech X – zbiór. Funkcję $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **metryką**, jeśli $\forall x, y, z \in X$

- 1 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2 $d(x, y) = d(y, x)$
- 3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$
(nierówność trójkąta)

Parę (X, d) nazywamy wówczas **przestrzenią metryczną**.



Frigyes Riesz

Przykłady metryk

- $X := \mathbb{C}^n$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{1/p}$ dla $p \geq 1$.
- $X := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty\}$

- Okazało się, że wiele działów matematyki da się “zgeometryzować”!

Definicja

Niech X – zbiór. Funkcję $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **metryką**, jeśli $\forall x, y, z \in X$

- 1 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2 $d(x, y) = d(y, x)$
- 3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$
(nierówność trójkąta)

Parę (X, d) nazywamy wówczas **przestrzenią metryczną**.

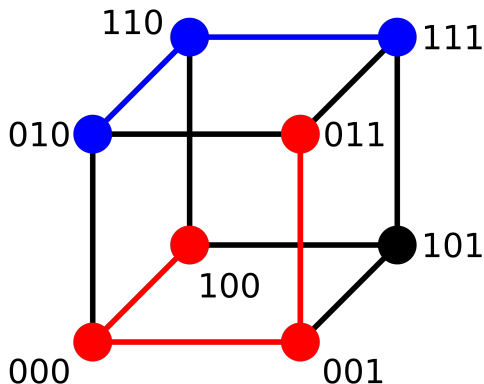


Frigyes Riesz

Przykłady metryk

- $X := \mathbb{C}^n$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{1/p}$ dla $p \geq 1$.
- $X := l^p$, $d(a, b) := (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i|^p)^{1/p}$ dla $p \geq 1$.

Przykłady metryk cd.



Metryka Hamminga: $X := \{0, 1\}^n$, $d(a, b) := \#\{i \mid a_i \neq b_i\}$

Michel Marie Deza
Elena Deza

Encyclopedia of Distances

Fourth Edition



 Springer

Michel Marie Deza
Elena Deza

Encyclopedia of Distances

Fourth Edition



 Springer

Ingemar Bengtsson and Karol Życzkowski

Geometry of Quantum States

An Introduction to
QUANTUM ENTANGLEMENT

Second Edition





0



1

$\text{bit} \in \{0, 1\}$



bit losowy $\in \text{conv}\{0, 1\}$

a

 $|0\rangle$

b

 $|1\rangle$

kubit $= a|0\rangle + b|1\rangle$, gdzie $a, b \in \mathbb{C}$,
przy czym $|a|^2 + |b|^2 = 1$ oraz $(a, b) \sim e^{i\varphi}(a, b)$

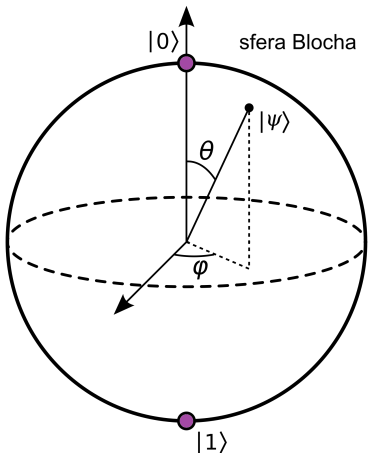
$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\text{cat}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{dead}\rangle$$

kubit = $a|\text{☺}\rangle + b|\text{☠}\rangle$, gdzie $a, b \in \mathbb{C}$,
przy czym $|a|^2 + |b|^2 = 1$ oraz $(a, b) \sim e^{i\varphi}(a, b)$

$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, gdzie $a, b \in \mathbb{C}$,
przy czym $|a|^2 + |b|^2 = 1$ oraz $(a, b) \sim e^{i\varphi}(a, b)$

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

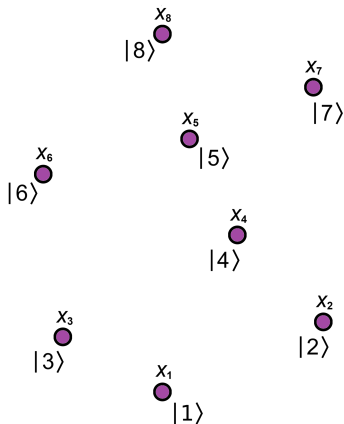
(modulo czynnik fazowy)



$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

(modulo czynnik fazowy)

...oraz kudit



kudit = $\sum_{i=1}^n x_i |i\rangle \cong \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$,
przy czym $\|\mathbf{x}\| = 1$ oraz $\mathbf{x} \sim e^{i\varphi} \mathbf{x}$

- Formalnie, chodzi tu o zespoloną przestrzeń rzutową $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$, ale kudit wygodniej traktować jako $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ o normie 1 ($\|\mathbf{x}\| = 1$), modulo czynnik fazowy ($\mathbf{x} \sim e^{i\varphi}\mathbf{x}$).
- W fizyce kudit nazywa się (częściej) stanem czystym, a także funkcją falową (w nieco innym kontekście).
- Standardowe metryki na $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$:

- metryka śladowa: $d_{tr}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i < j} |x_i y_j - x_j y_i|^2} = \sqrt{1 - |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}$

- metryka Fubiniego–Study'ego:
 $d_{FS}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \arcsin d_{tr}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

- Zaletą, ale i wadą: Wszystkie $|i\rangle$ są równoodległe od siebie nawzajem!

- Formalnie, chodzi tu o **zespoloną przestrzeń rzutową** $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$, ale kudit wygodniej traktować jako $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ o normie 1 ($\|\mathbf{x}\| = 1$), modulo czynnik fazowy ($\mathbf{x} \sim e^{i\varphi}\mathbf{x}$).
- W fizyce kudit nazywa się (częściej) **stanem czystym**, a także **funkcją falową** (w nieco innym kontekście).
- Standardowe metryki na $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$:

- metryka śladowa: $d_{tr}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i < j} |x_i y_j - x_j y_i|^2} = \sqrt{1 - |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}$

- metryka Fubiniego–Study'ego:
 $d_{FS}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \arcsin d_{tr}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

- **Zaleta**, ale i **wada**: Wszystkie $|i\rangle$ są *równoodległe* od siebie nawzajem!

Przestrzeń kuditów

- Formalnie, chodzi tu o **zespoloną przestrzeń rzutową** $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$, ale kudit wygodniej traktować jako $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ o normie 1 ($\|\mathbf{x}\| = 1$), modulo czynnik fazowy ($\mathbf{x} \sim e^{i\varphi}\mathbf{x}$).
- W fizyce kudit nazywa się (częściej) **stanem czystym**, a także **funkcją falową** (w nieco innym kontekście).
- Standardowe metryki na $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$:
 - **metryka śladowa**: $d_{\text{tr}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i < j} |x_i y_j - x_j y_i|^2} = \sqrt{1 - |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}$
 - **metryka Fubiniego–Study'ego**:
 $d_{\text{FS}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \arcsin d_{\text{tr}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
- **Zaleta**, ale i **wada**: Wszystkie $|i\rangle$ są *równoodległe* od siebie nawzajem!

- Formalnie, chodzi tu o **zespoloną przestrzeń rzutową** $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$, ale kudit wygodniej traktować jako $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ o normie 1 ($\|\mathbf{x}\| = 1$), modulo czynnik fazowy ($\mathbf{x} \sim e^{i\varphi}\mathbf{x}$).
- W fizyce kudit nazywa się (częściej) **stanem czystym**, a także **funkcją falową** (w nieco innym kontekście).
- Standardowe metryki na $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$:
 - **metryka śladowa**: $d_{\text{tr}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i < j} |x_i y_j - x_j y_i|^2} = \sqrt{1 - |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}$
 - **metryka Fubiniego–Study'ego**:
 $d_{\text{FS}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \arcsin d_{\text{tr}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
- **Zaleta**, ale i **wada**: Wszystkie $|i\rangle$ są *równoodległe* od siebie nawzajem!

- Formalnie, chodzi tu o **zespoloną przestrzeń rzutową** $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$, ale kudit wygodniej traktować jako $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ o normie 1 ($\|\mathbf{x}\| = 1$), modulo czynnik fazowy ($\mathbf{x} \sim e^{i\varphi}\mathbf{x}$).
- W fizyce kudit nazywa się (częściej) **stanem czystym**, a także **funkcją falową** (w nieco innym kontekście).
- Standardowe metryki na $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$:
 - **metryka śladowa**: $d_{\text{tr}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i < j} |x_i y_j - x_j y_i|^2} = \sqrt{1 - |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}$
 - **metryka Fubiniego–Study'ego**:
 $d_{\text{FS}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \arcsin d_{\text{tr}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
- **Zaleta**, ale i **wada**: Wszystkie $|i\rangle$ są **równoodległe** od siebie nawzajem!

Jak skwantować przestrzeń metryczną?

- (X, d) – skończona prz. metryczna. $X := \{1, 2, \dots, n\}$, $d_{ij} := d(i, j)$.
- Zanurzymy X w $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$, $i \mapsto |i\rangle$.

Definicja-twierdzenie

Dla każdego $p \geq 2$ odwzorowanie $\hat{d}_p : \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem:

$$\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left(\sum_{i < j} d_{ij}^p |x_i y_j - x_j y_i|^2 \right)^{1/p}$$

jest metryką na $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$.

- $\hat{d}_p$ jest podniesieniem d na prz. kubitów, $\hat{d}_p(|i\rangle, |j\rangle) = d_{ij}$.
- Dla metryki dyskretnej $d_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ dostajemy $\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{\text{tr}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{2/p}$.
- Jedyne wyzwanie: dowód nierówności trójkąta!

Jak skwantować przestrzeń metryczną?

- (X, d) – skończona prz. metryczna. $X := \{1, 2, \dots, n\}$, $d_{ij} := d(i, j)$.
- Zanurzymy X w $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$, $i \mapsto |i\rangle$.

Definicja-twierdzenie

Dla każdego $p \geq 2$ odwzorowanie $\hat{d}_p : \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem:

$$\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left(\sum_{i < j} d_{ij}^p |x_i y_j - x_j y_i|^2 \right)^{1/p}$$

jest metryką na $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$.

- $\hat{d}_p$ jest *podniesieniem* d na prz. kubitów, $\hat{d}_p(|i\rangle, |j\rangle) = d_{ij}$.
- Dla metryki dyskretnej $d_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ dostajemy $\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{\text{tr}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{2/p}$.
- Jedyne wyzwanie: dowód nierówności trójkąta!

Jak skwantować przestrzeń metryczną?

- (X, d) – skończona prz. metryczna. $X := \{1, 2, \dots, n\}$, $d_{ij} := d(i, j)$.
- Zanurzymy X w $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$, $i \mapsto |i\rangle$.

Definicja-twierdzenie

Dla każdego $p \geq 2$ odwzorowanie $\hat{d}_p : \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem:

$$\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left(\sum_{i < j} d_{ij}^p |x_i y_j - x_j y_i|^2 \right)^{1/p}$$

jest metryką na $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$.

- $\hat{d}_p$ jest *podniesieniem* d na prz. kubitów, $\hat{d}_p(|i\rangle, |j\rangle) = d_{ij}$.
- Dla metryki dyskretnej $d_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ dostajemy $\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{\text{tr}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{2/p}$.
- Jedyne wyzwanie: dowód nierówności trójkąta!

Jak skwantować przestrzeń metryczną?

- (X, d) – skończona prz. metryczna. $X := \{1, 2, \dots, n\}$, $d_{ij} := d(i, j)$.
- Zanurzymy X w $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$, $i \mapsto |i\rangle$.

Definicjo-twierdzenie

Dla każdego $p \geq 2$ odwzorowanie $\hat{d}_p : \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem:

$$\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left(\sum_{i < j} d_{ij}^p |x_i y_j - x_j y_i|^2 \right)^{1/p}$$

jest metryką na $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$.

- $\hat{d}_p$ jest *podniesieniem* d na prz. kubitów, $\hat{d}_p(|i\rangle, |j\rangle) = d_{ij}$.
- Dla metryki dyskretnej $d_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ dostajemy $\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{\text{tr}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{2/p}$.
- Jedyne wyzwanie: dowód nierówności trójkąta!

Jak skwantować przestrzeń metryczną?

- (X, d) – skończona prz. metryczna. $X := \{1, 2, \dots, n\}$, $d_{ij} := d(i, j)$.
- Zanurzymy X w $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$, $i \mapsto |i\rangle$.

Definicjo-twierdzenie

Dla każdego $p \geq 2$ odwzorowanie $\hat{d}_p : \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem:

$$\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left(\sum_{i < j} d_{ij}^p |x_i y_j - x_j y_i|^2 \right)^{1/p}$$

jest metryką na $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$.

- $\hat{d}_p$ jest *podniesieniem* d na prz. kubitów, $\hat{d}_p(|i\rangle, |j\rangle) = d_{ij}$.
- Dla metryki dyskretnej $d_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ dostajemy $\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{\text{tr}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{2/p}$.
- Jedyne wyzwanie: dowód nierówności trójkąta!

Jak skwantować przestrzeń metryczną?

- (X, d) – skończona prz. metryczna. $X := \{1, 2, \dots, n\}$, $d_{ij} := d(i, j)$.
- Zanurzymy X w $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$, $i \mapsto |i\rangle$.

Definicja-twierdzenie

Dla każdego $p \geq 2$ odwzorowanie $\hat{d}_p : \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem:

$$\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left(\sum_{i < j} d_{ij}^p |x_i y_j - x_j y_i|^2 \right)^{1/p}$$

jest metryką na $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$.

- $\hat{d}_p$ jest *podniesieniem* d na prz. kubitów, $\hat{d}_p(|i\rangle, |j\rangle) = d_{ij}$.
- Dla metryki dyskretnej $d_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ dostajemy $\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{\text{tr}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{2/p}$.
- Jedyne wyzwanie: dowód nierówności trójkąta!

Jak skwantować przestrzeń metryczną?

- (X, d) – skończona prz. metryczna. $X := \{1, 2, \dots, n\}$, $d_{ij} := d(i, j)$.
- Zanurzymy X w $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$, $i \mapsto |i\rangle$.

Definicjo-twierdzenie

Dla każdego $p \geq 2$ odwzorowanie $\hat{d}_p : \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem:

$$\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left(\sum_{i < j} d_{ij}^p |x_i y_j - x_j y_i|^2 \right)^{1/p}$$

jest metryką na $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$.

- $\hat{d}_p$ jest *podniesieniem* d na prz. kubitów, $\hat{d}_p(|i\rangle, |j\rangle) = d_{ij}$.
- Dla metryki dyskretnej $d_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ dostajemy $\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{\text{tr}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{2/p}$.
- Jedyne wyzwanie: dowód nierówności trójkąta!

[Szkielet dowodu] **Krok 1:** Przypadek $n = 3$.

Dla $n = 3$ mamy zapisać $\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})\|^{2/p}$,
gdzie $\mathbf{D} = \text{diag}(d_{23}, d_{31}, d_{12})$.

Lemat 1

Dla dowolnej dodatnio określonej macierzy $\mathbf{D} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ następujące warunki są równoważne:

- 1 $\|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})\|^{2/p} \leq \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \times \mathbf{z})\|^{2/p} + \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{y} \times \mathbf{z})\|^{2/p}$
dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ o normie 1.
- 2 $2\lambda_{\max}(\mathbf{D}) \leq \text{tr } \mathbf{D}$

[Szkic dowodu] **Krok 1:** Przypadek $n = 3$.

Dla $n = 3$ mamy zapisać $\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})\|^{2/p}$,
gdzie $\mathbf{D} = \text{diag}(d_{23}, d_{31}, d_{12})$.

Lemat 1

Dla dowolnej dodatnio określonej macierzy $\mathbf{D} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ następujące warunki są równoważne:

- 1 $\|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})\|^{2/p} \leq \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \times \mathbf{z})\|^{2/p} + \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{y} \times \mathbf{z})\|^{2/p}$
dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ o normie 1.
- 2 $2\lambda_{\max}(\mathbf{D}) \leq \text{tr } \mathbf{D}$

[Szkic dowodu] **Krok 1:** Przypadek $n = 3$.

Dla $n = 3$ mamy zapisać $\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})\|^{2/p}$,
gdzie $\mathbf{D} = \text{diag}(d_{23}, d_{31}, d_{12})$.

Lemat 1

Dla dowolnej dodatnio określonej macierzy $\mathbf{D} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ następujące warunki są równoważne:

- ❶ $\|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})\|^{2/p} \leq \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \times \mathbf{z})\|^{2/p} + \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{y} \times \mathbf{z})\|^{2/p}$
dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ o normie 1.
- ❷ $2\lambda_{\max}(\mathbf{D}) \leq \text{tr } \mathbf{D}$

Idea dowodu: Metoda mnożników Lagrange'a – szukamy punktów krytycznych funkcji

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}; \alpha, \beta, \gamma) := \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \times \mathbf{z})\|^{2/p} + \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{y} \times \mathbf{z})\|^{2/p} - \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})\|^{2/p} \\ - \frac{1}{p}\alpha(\|\mathbf{x}\|^2 - 1) - \frac{1}{p}\beta(\|\mathbf{y}\|^2 - 1) - \frac{1}{p}\gamma(\|\mathbf{z}\|^2 - 1).$$

[Szkic dowodu] **Krok 2:** Redukcja do przypadku stanów ON

Dla $n \geq 3$ mamy $\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})\|^{2/p}$, gdzie $\mathbf{D}$ jest operatorem na $\Lambda^2 \mathbb{C}^n$ o macierzy $\text{diag}(d_{ij})_{i < j}$ w bazie kanonicznej $\{|i\rangle \wedge |j\rangle\}_{i < j}$.

Lemat 2

Dla dowolnego dodatnio określonego operatora $\mathbf{D}$ na $\Lambda^2(\mathbb{C}^n)$ następujące warunki są równoważne:

- 1 $\|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})\|^{2/p} \leq \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{z})\|^{2/p} + \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{z} \wedge \mathbf{y})\|^{2/p}$
dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ o normie 1.
- 2 $\|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})\|^{2/p} \leq \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w})\|^{2/p} + \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{w} \wedge \mathbf{v})\|^{2/p}$
dla dowolnego ortonormalnego $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$

[Szkic dowodu] **Krok 2:** Redukcja do przypadku stanów ON

Dla $n \geq 3$ mamy $\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})\|^{2/p}$, gdzie $\mathbf{D}$ jest operatorem na $\Lambda^2 \mathbb{C}^n$ o macierzy $\text{diag}(d_{ij})_{i < j}$ w bazie kanonicznej $\{|i\rangle \wedge |j\rangle\}_{i < j}$.

Lemat 2

Dla dowolnego dodatnio określonego operatora $\mathbf{D}$ na $\Lambda^2(\mathbb{C}^n)$ następujące warunki są równoważne:

- 1 $\|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})\|^{2/p} \leq \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{z})\|^{2/p} + \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{z} \wedge \mathbf{y})\|^{2/p}$
dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ o normie 1.
- 2 $\|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})\|^{2/p} \leq \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w})\|^{2/p} + \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{w} \wedge \mathbf{v})\|^{2/p}$
dla dowolnego ortonormalnego $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$

[Szkic dowodu] **Krok 2:** Redukcja do przypadku stanów ON

Dla $n \geq 3$ mamy $\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})\|^{2/p}$, gdzie $\mathbf{D}$ jest operatorem na $\Lambda^2 \mathbb{C}^n$ o macierzy $\text{diag}(d_{ij})_{i < j}$ w bazie kanonicznej $\{|i\rangle \wedge |j\rangle\}_{i < j}$.

Lemat 2

Dla dowolnego dodatnio określonego operatora $\mathbf{D}$ na $\Lambda^2(\mathbb{C}^n)$ następujące warunki są równoważne:

- ❶ $\|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})\|^{2/p} \leq \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{z})\|^{2/p} + \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{z} \wedge \mathbf{y})\|^{2/p}$
dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ o normie 1.
- ❷ $\|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})\|^{2/p} \leq \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w})\|^{2/p} + \|\mathbf{D}^{p/2}(\mathbf{w} \wedge \mathbf{v})\|^{2/p}$
dla dowolnego ortonormalnego $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$

Dowód przez sprowadzenie do przypadku $n = 3$: Niech $V := \text{span}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$. Na $\Lambda^2(V)$ rozważmy formę hermitowską $h(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := \langle \mathbf{A}, \mathbf{D}^p \mathbf{B} \rangle$. Istnieje baza ON $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ przestrzeni V taka, że $\mathcal{B} := \{\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2\}$ jest h -ortogonalna. Wtedy jednak (2) implikuje $2\lambda_{\max}(\mathbf{H}^{2/p}) \leq \text{tr } \mathbf{H}^{2/p}$ (gdzie $\mathbf{H}$ to macierz formy h w bazie $\mathcal{B}$), a to już pociąga za sobą (1) na mocy Lematu 1.

[Szkic dowodu] **Krok 3:** Przypadek $p = 2$

Cel: Wykazać, że dla dowolnego $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ – ON

$$\sqrt{\sum d_{ij}^2 |x_i y_j - x_j y_i|^2} \leq \sqrt{\sum d_{ik}^2 |x_i z_k - x_k z_i|^2} + \sqrt{\sum d_{jk}^2 |z_k y_j - z_j y_k|^2}$$

[Szkic dowodu] **Krok 3:** Przypadek $p = 2$

Cel: Wykazać, że dla dowolnego $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ – ON

$$\sqrt{\sum_{ijk} d_{ij}^2 \omega_{ijk}} \leq \sqrt{\sum_{ijk} d_{ik}^2 \omega_{ijk}} + \sqrt{\sum_{ijk} d_{jk}^2 \omega_{ijk}},$$

gdzie $\omega_{ijk} := \overline{x_i} \overline{y_j} \overline{z_k} \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}.$

[Szkiec dowodu] **Krok 3:** Przypadek $p = 2$

Cel: Wykazać, że dla dowolnego $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ – ON

$$\sqrt{\sum_{ijk} d_{ij}^2 \omega_{ijk}} \leq \sqrt{\sum_{ijk} d_{ik}^2 \omega_{ijk}} + \sqrt{\sum_{ijk} d_{jk}^2 \omega_{ijk}},$$

$$\text{gdzie} \quad \omega_{ijk} := \bar{x}_i \bar{y}_j \bar{z}_k \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}.$$

Dowód może teraz wydawać się łatwy:

$$\sqrt{\sum d_{ij}^2 \omega_{ijk}} \leq \sqrt{\sum (d_{ik} + d_{jk})^2 \omega_{ijk}} \leq \sqrt{\sum d_{ik}^2 \omega_{ijk}} + \sqrt{\sum d_{jk}^2 \omega_{ijk}}$$

[Szkic dowodu] **Krok 3:** Przypadek $p = 2$

Cel: Wykazać, że dla dowolnego $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ – ON

$$\sqrt{\sum_{ijk} d_{ij}^2 \omega_{ijk}} \leq \sqrt{\sum_{ijk} d_{ik}^2 \omega_{ijk}} + \sqrt{\sum_{ijk} d_{jk}^2 \omega_{ijk}},$$

gdzie $\omega_{ijk} := \bar{x}_i \bar{y}_j \bar{z}_k \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}.$

Dowód może teraz **wydawać się** łatwy:

$$\sqrt{\sum d_{ij}^2 \omega_{ijk}} \leq \sqrt{\sum (d_{ik} + d_{jk})^2 \omega_{ijk}} \leq \sqrt{\sum d_{ik}^2 \omega_{ijk}} + \sqrt{\sum d_{jk}^2 \omega_{ijk}}$$

Ale ω_{ijk} jest zespolona! Obie nierówności wymagają dowodu!

[Szkic dowodu] **Krok 3:** Przypadek $p = 2$

Cel: Wykazać, że dla dowolnego $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ – ON

$$\sqrt{\sum_{ijk} d_{ij}^2 \omega_{ijk}} \leq \sqrt{\sum_{ijk} d_{ik}^2 \omega_{ijk}} + \sqrt{\sum_{ijk} d_{jk}^2 \omega_{ijk}},$$

gdzie $\omega_{ijk} := \bar{x}_i \bar{y}_j \bar{z}_k \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}.$

Dowód może teraz **wydawać się** łatwy:

$$\sqrt{\sum d_{ij}^2 \omega_{ijk}} \leq \sqrt{\sum (d_{ik} + d_{jk})^2 \omega_{ijk}} \leq \sqrt{\sum d_{ik}^2 \omega_{ijk}} + \sqrt{\sum d_{jk}^2 \omega_{ijk}}$$

Ale ω_{ijk} jest zespolona! Obie nierówności wymagają dowodu!

Lemat 3 (nierówność Cauchy'ego-Schwarzopodobna)

Dla dowolnej macierzy symetrycznej $(A_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

$$|\sum A_{ik} A_{jk} \omega_{ijk}| \leq \sqrt{\sum A_{ik}^2 \omega_{ijk}} \sqrt{\sum A_{jk}^2 \omega_{ijk}}.$$

[Szkic dowodu] **Krok 3:** Przypadek $p = 2$

Cel: Wykazać, że dla dowolnego $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ – ON

$$\sqrt{\sum_{ijk} d_{ij}^2 \omega_{ijk}} \leq \sqrt{\sum_{ijk} d_{ik}^2 \omega_{ijk}} + \sqrt{\sum_{ijk} d_{jk}^2 \omega_{ijk}},$$

gdzie $\omega_{ijk} := \bar{x}_i \bar{y}_j \bar{z}_k \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}.$

Dowód może teraz **wydawać się** łatwy:

$$\sqrt{\sum d_{ij}^2 \omega_{ijk}} \leq \sqrt{\sum (d_{ik} + d_{jk})^2 \omega_{ijk}} \leq \sqrt{\sum d_{ik}^2 \omega_{ijk}} + \sqrt{\sum d_{jk}^2 \omega_{ijk}}$$

Ale ω_{ijk} jest zespolona! Obie nierówności wymagają dowodu!

Lemat 3 (nierówność Cauchy'ego-Schwarzopodobna)

Dla dowolnej macierzy symetrycznej $(A_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

$$|\sum A_{ik} A_{jk} \omega_{ijk}| \leq \sqrt{\sum A_{ik}^2 \omega_{ijk}} \sqrt{\sum A_{jk}^2 \omega_{ijk}}.$$

To już wystarczy, ale tylko dla przypadku $p = 4$ (wyjaśnię na końcu).

[Szkic dowodu] **Krok 3'**: Nierówność Jensenopodobna

Lemat 4

(A_{ij}) – macierz symetryczna o nieujemnych elementach,

$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} \subset \mathbb{C}^n$ – układ ON,

$f : \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ – funkcja wypukła i całkowicie symetryczna.

Wówczas:

$$\begin{aligned} & f\left(\sum_{i < j} A_{ij} \left\| \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \right\|^2, \sum_{i < k} A_{ik} \left\| \begin{pmatrix} x_i & x_k \\ z_i & z_k \end{pmatrix} \right\|^2, \sum_{j < k} A_{jk} \left\| \begin{pmatrix} y_j & y_k \\ z_j & z_k \end{pmatrix} \right\|^2\right) \\ & \leq \sum_{i < j < k} f(A_{ij}, A_{ik}, A_{jk}) \left\| \begin{pmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{pmatrix} \right\|^2. \end{aligned}$$

Dowód: nierówność Jensena + trochę geometrii wypukłej i algebry wieloliniowej.

[Szkic dowodu] **Krok 3'**: Nierówność Jensenopodobna

Lemat 4

(A_{ij}) – macierz symetryczna o nieujemnych elementach,

$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} \subset \mathbb{C}^n$ – układ ON,

$f : \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ – funkcja **wklęśła** i całkowicie symetryczna.

Wówczas:

$$\begin{aligned} & f\left(\sum_{i < j} A_{ij} \left\| \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \right\|^2, \sum_{i < k} A_{ik} \left\| \begin{pmatrix} x_i & x_k \\ z_i & z_k \end{pmatrix} \right\|^2, \sum_{j < k} A_{jk} \left\| \begin{pmatrix} y_j & y_k \\ z_j & z_k \end{pmatrix} \right\|^2\right) \\ & \geq \sum_{i < j < k} f(A_{ij}, A_{ik}, A_{jk}) \left\| \begin{pmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{pmatrix} \right\|^2. \end{aligned}$$

Dowód: nierówność Jensena + trochę geometrii wypukłej i algebry wieloliniowej.

[Szkic dowodu] **Krok 3'**: Nierówność Jensenopodobna

Lemat 4

(A_{ij}) – macierz symetryczna o nieujemnych elementach,
 $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} \subset \mathbb{C}^n$ – układ ON,
 $f : \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ – funkcja wypukła i całkowicie symetryczna.

Wówczas:

$$\begin{aligned} & f\left(\sum_{i < j} A_{ij} \left\| \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \right\|^2, \sum_{i < k} A_{ik} \left\| \begin{pmatrix} x_i & x_k \\ z_i & z_k \end{pmatrix} \right\|^2, \sum_{j < k} A_{jk} \left\| \begin{pmatrix} y_j & y_k \\ z_j & z_k \end{pmatrix} \right\|^2\right) \\ & \leq \sum_{i < j < k} f(A_{ij}, A_{ik}, A_{jk}) \left\| \begin{pmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{pmatrix} \right\|^2. \end{aligned}$$

Dowód: nierówność Jensena + trochę geometrii wypukłej i algebry wieloliniowej.

[Szkiec dowodu] **Krok 4:** Dowód nierówności trójkąta

Założmy, że $\forall i, j, k \quad d_{ij} \leq d_{ik} + d_{jk}$.

[Szkiec dowodu] **Krok 4:** Dowód nierówności trójkąta

Założmy, że $\forall i, j, k \quad 2 \max\{d_{ij}, d_{ik}, d_{jk}\} \leq d_{ij} + d_{ik} + d_{jk}$.

[Szkic dowodu] **Krok 4:** Dowód nierówności trójkąta

Założmy, że $\forall i, j, k \quad 2 \max\{d_{ij}, d_{ik}, d_{jk}\} \leq d_{ij} + d_{ik} + d_{jk}$.

Chcemy pokazać, że $\forall \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} - \text{ON}$

$$2 \max\{\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \hat{d}_p(\mathbf{y}, \mathbf{z})\} \leq \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \hat{d}_p(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

[Szkic dowodu] **Krok 4:** Dowód nierówności trójkąta

Założmy, że $\forall i, j, k \quad 2 \max\{d_{ij}, d_{ik}, d_{jk}\} \leq d_{ij} + d_{ik} + d_{jk}$.

Chcemy pokazać, że $\forall \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} - \text{ON}$

$$2 \max\{\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \hat{d}_p(\mathbf{y}, \mathbf{z})\} \leq \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \hat{d}_p(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

$$2^p \max\{\hat{d}_p^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \hat{d}_p^p(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \hat{d}_p^p(\mathbf{y}, \mathbf{z})\}$$

[Szkic dowodu] **Krok 4:** Dowód nierówności trójkąta

Założmy, że $\forall i, j, k \quad 2 \max\{d_{ij}, d_{ik}, d_{jk}\} \leq d_{ij} + d_{ik} + d_{jk}$.

Chcemy pokazać, że $\forall \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} - \text{ON}$

$$2 \max\{\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \hat{d}_p(\mathbf{y}, \mathbf{z})\} \leq \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \hat{d}_p(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

$$\begin{aligned} & 2^p \max\{\hat{d}_p^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \hat{d}_p^p(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \hat{d}_p^p(\mathbf{y}, \mathbf{z})\} \\ &= 2^p \max\left\{\sum d_{ij}^p \left\|\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right\|^2, \sum d_{ik}^p \left\|\begin{pmatrix} x_i & x_k \\ z_i & z_k \end{pmatrix}\right\|^2, \sum d_{jk}^p \left\|\begin{pmatrix} y_j & y_k \\ z_j & z_k \end{pmatrix}\right\|^2\right\} \end{aligned}$$

[Szkic dowodu] **Krok 4:** Dowód nierówności trójkąta

Założmy, że $\forall i, j, k \quad 2 \max\{d_{ij}, d_{ik}, d_{jk}\} \leq d_{ij} + d_{ik} + d_{jk}$.

Chcemy pokazać, że $\forall \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} - \text{ON}$

$$2 \max\{\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \hat{d}_p(\mathbf{y}, \mathbf{z})\} \leq \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \hat{d}_p(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

$$\begin{aligned} & 2^p \max\{\hat{d}_p^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \hat{d}_p^p(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \hat{d}_p^p(\mathbf{y}, \mathbf{z})\} \\ &= 2^p \max\left\{\sum d_{ij}^p \left\|\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right\|^2, \sum d_{ik}^p \left\|\begin{pmatrix} x_i & x_k \\ z_i & z_k \end{pmatrix}\right\|^2, \sum d_{jk}^p \left\|\begin{pmatrix} y_j & y_k \\ z_j & z_k \end{pmatrix}\right\|^2\right\} \\ &\leq 2^p \sum \max(d_{ij}^p, d_{ik}^p, d_{jk}^p) \left\|\begin{pmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{pmatrix}\right\|^2 \end{aligned}$$

[Szkic dowodu] **Krok 4:** Dowód nierówności trójkąta

Założmy, że $\forall i, j, k \quad 2 \max\{d_{ij}, d_{ik}, d_{jk}\} \leq d_{ij} + d_{ik} + d_{jk}$.

Chcemy pokazać, że $\forall \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} - \text{ON}$

$$2 \max\{\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \hat{d}_p(\mathbf{y}, \mathbf{z})\} \leq \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \hat{d}_p(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

$$\begin{aligned} & 2^p \max\{\hat{d}_p^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \hat{d}_p^p(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \hat{d}_p^p(\mathbf{y}, \mathbf{z})\} \\ &= 2^p \max\left\{\sum d_{ij}^p \left\|\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right\|^2, \sum d_{ik}^p \left\|\begin{pmatrix} x_i & x_k \\ z_i & z_k \end{pmatrix}\right\|^2, \sum d_{jk}^p \left\|\begin{pmatrix} y_j & y_k \\ z_j & z_k \end{pmatrix}\right\|^2\right\} \\ &\leq 2^p \sum \max(d_{ij}^p, d_{ik}^p, d_{jk}^p) \left\|\begin{pmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{pmatrix}\right\|^2 \leq \sum (d_{ij} + d_{ik} + d_{jk})^p \left\|\begin{pmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{pmatrix}\right\|^2 \end{aligned}$$

[Szkic dowodu] **Krok 4:** Dowód nierówności trójkąta

Założmy, że $\forall i, j, k \quad 2 \max\{d_{ij}, d_{ik}, d_{jk}\} \leq d_{ij} + d_{ik} + d_{jk}$.

Chcemy pokazać, że $\forall \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} - \text{ON}$

$$2 \max\{\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \hat{d}_p(\mathbf{y}, \mathbf{z})\} \leq \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \hat{d}_p(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

$$\begin{aligned} & 2^p \max\{\hat{d}_p^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \hat{d}_p^p(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \hat{d}_p^p(\mathbf{y}, \mathbf{z})\} \\ &= 2^p \max\left\{\sum d_{ij}^p \left\|\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right\|^2, \sum d_{ik}^p \left\|\begin{pmatrix} x_i & x_k \\ z_i & z_k \end{pmatrix}\right\|^2, \sum d_{jk}^p \left\|\begin{pmatrix} y_j & y_k \\ z_j & z_k \end{pmatrix}\right\|^2\right\} \\ &\leq 2^p \sum \max(d_{ij}^p, d_{ik}^p, d_{jk}^p) \left\|\begin{pmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{pmatrix}\right\|^2 \leq \sum (d_{ij} + d_{ik} + d_{jk})^p \left\|\begin{pmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{pmatrix}\right\|^2 \\ &\leq \left((\sum d_{ij}^p \left\|\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right\|^2)^{1/p} + (\sum d_{ik}^p \left\|\begin{pmatrix} x_i & x_k \\ z_i & z_k \end{pmatrix}\right\|^2)^{1/p} + (\sum d_{jk}^p \left\|\begin{pmatrix} y_j & y_k \\ z_j & z_k \end{pmatrix}\right\|^2)^{1/p}\right)^p \end{aligned}$$

[Szkic dowodu] **Krok 4:** Dowód nierówności trójkąta

Założmy, że $\forall i, j, k \quad 2 \max\{d_{ij}, d_{ik}, d_{jk}\} \leq d_{ij} + d_{ik} + d_{jk}$.

Chcemy pokazać, że $\forall \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} - \text{ON}$

$$2 \max\{\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \hat{d}_p(\mathbf{y}, \mathbf{z})\} \leq \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \hat{d}_p(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

$$\begin{aligned} & 2^p \max\{\hat{d}_p^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \hat{d}_p^p(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \hat{d}_p^p(\mathbf{y}, \mathbf{z})\} \\ &= 2^p \max\left\{\sum d_{ij}^p \left\|\begin{matrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{matrix}\right\|^2, \sum d_{ik}^p \left\|\begin{matrix} x_i & x_k \\ z_i & z_k \end{matrix}\right\|^2, \sum d_{jk}^p \left\|\begin{matrix} y_j & y_k \\ z_j & z_k \end{matrix}\right\|^2\right\} \\ &\leq 2^p \sum \max(d_{ij}^p, d_{ik}^p, d_{jk}^p) \left\|\begin{matrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{matrix}\right\|^2 \leq \sum (d_{ij} + d_{ik} + d_{jk})^p \left\|\begin{matrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{matrix}\right\|^2 \\ &\leq \left((\sum d_{ij}^p \left\|\begin{matrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{matrix}\right\|^2)^{1/p} + (\sum d_{ik}^p \left\|\begin{matrix} x_i & x_k \\ z_i & z_k \end{matrix}\right\|^2)^{1/p} + (\sum d_{jk}^p \left\|\begin{matrix} y_j & y_k \\ z_j & z_k \end{matrix}\right\|^2)^{1/p}\right)^p \\ &= \left(\hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \hat{d}_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \hat{d}_p(\mathbf{y}, \mathbf{z})\right)^p \quad \square \end{aligned}$$

Granica $n \rightarrow +\infty$

Twierdzenie

(X, D) – prz. polska, $\mathcal{P}_p(X)$ – prz. miar prob. o skończonym p -tym momencie ($p \geq 2$). Zdefiniujmy $\hat{D}_p : \mathcal{P}_p(X) \times \mathcal{P}_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\hat{D}_p(\mu, \nu) := \left[\frac{1}{2} \iint D^p(x, y) \left| \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(x) \frac{d\nu}{d\lambda}(y)} - \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(y) \frac{d\nu}{d\lambda}(x)} \right|^2 d\lambda d\lambda \right]^{1/p}$$

dla dowolnej $\lambda \gg \mu, \nu$. Wówczas $\hat{D}_p$ jest metryką.

- $\hat{D}_p(\delta_x, \delta_y) = D(x, y)$
- $W_p(\mu, \nu) = \inf_{\omega \in \Gamma(\mu, \nu)} \left(\int_{X^2} D^p(x, y) d\omega \right)^{1/p}$.
- $\hat{D}_p \neq W_p$. Przykładowo, $\hat{D}_2$ między dwoma Gaussami 1D:

$$\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2 \left(1 - \left(\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 \exp \left(-\frac{(m_1 - m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right) \right)}$$

- W odróżnieniu od W_p , $\hat{D}_p$ ma naturalną wersję zespoloną.

Granica $n \rightarrow +\infty$ (przypadek rzeczywisty)

Twierdzenie

(X, D) – prz. polska, $\mathcal{P}_p(X)$ – prz. miar prob. o skończonym p -tym momencie ($p \geq 2$). Zdefiniujmy $\hat{D}_p : \mathcal{P}_p(X) \times \mathcal{P}_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\hat{D}_p(\mu, \nu) := \left[\frac{1}{2} \iint D^p(x, y) \left| \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(x) \frac{d\nu}{d\lambda}(y)} - \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(y) \frac{d\nu}{d\lambda}(x)} \right|^2 d\lambda d\lambda \right]^{1/p}$$

dla dowolnej $\lambda \gg \mu, \nu$. Wówczas $\hat{D}_p$ jest metryką.

- $\hat{D}_p(\delta_x, \delta_y) = D(x, y)$
- $W_p(\mu, \nu) = \inf_{\omega \in \Gamma(\mu, \nu)} \left(\int_{X^2} D^p(x, y) d\omega \right)^{1/p}$.
- $\hat{D}_p \neq W_p$. Przykładowo, $\hat{D}_2$ między dwoma Gaussami 1D:

$$\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2 \left(1 - \left(\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 \exp \left(-\frac{(m_1 - m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right) \right)}$$

- W odróżnieniu od W_p , $\hat{D}_p$ ma naturalną wersję zespoloną.

Granica $n \rightarrow +\infty$ (przypadek rzeczywisty)

Twierdzenie

(X, D) – prz. polska, $\mathcal{P}_p(X)$ – prz. miar prob. o skończonym p -tym momencie ($p \geq 2$). Zdefiniujmy $\hat{D}_p : \mathcal{P}_p(X) \times \mathcal{P}_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\hat{D}_p(\mu, \nu) := \left[\frac{1}{2} \iint D^p(x, y) \left| \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(x) \frac{d\nu}{d\lambda}(y)} - \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(y) \frac{d\nu}{d\lambda}(x)} \right|^2 d\lambda d\lambda \right]^{1/p}$$

dla dowolnej $\lambda \gg \mu, \nu$. Wówczas $\hat{D}_p$ jest metryką.

- $\hat{D}_p(\delta_x, \delta_y) = D(x, y)$
- $W_p(\mu, \nu) = \inf_{\omega \in \Gamma(\mu, \nu)} \left(\int_{X^2} D^p(x, y) d\omega \right)^{1/p}$.
- $\hat{D}_p \neq W_p$. Przykładowo, $\hat{D}_2$ między dwoma Gaussami 1D:

$$\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2 \left(1 - \left(\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 \exp \left(-\frac{(m_1 - m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right) \right)}$$

- W odróżnieniu od W_p , $\hat{D}_p$ ma naturalną wersję zespoloną.

Granica $n \rightarrow +\infty$ (przypadek rzeczywisty)

Twierdzenie

(X, D) – prz. polska, $\mathcal{P}_p(X)$ – prz. miar prob. o skończonym p -tym momencie ($p \geq 2$). Zdefiniujmy $\hat{D}_p : \mathcal{P}_p(X) \times \mathcal{P}_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\hat{D}_p(\mu, \nu) := \left[\frac{1}{2} \iint D^p(x, y) \left| \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(x) \frac{d\nu}{d\lambda}(y)} - \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(y) \frac{d\nu}{d\lambda}(x)} \right|^2 d\lambda d\lambda \right]^{1/p}$$

dla dowolnej $\lambda \gg \mu, \nu$. Wówczas $\hat{D}_p$ jest metryką.

- $\hat{D}_p(\mu, \delta_y) = [\int D^p(\cdot, y) d\mu]^{1/p}$
- $W_p(\mu, \nu) = \inf_{\omega \in \Gamma(\mu, \nu)} (\int_{X^2} D^p(x, y) d\omega)^{1/p}$.
- $\hat{D}_p \neq W_p$. Przykładowo, $\hat{D}_2$ między dwoma Gaussami 1D:

$$\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2 \left(1 - \left(\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 \exp \left(-\frac{(m_1 - m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right) \right)}$$

- W odróżnieniu od W_p , $\hat{D}_p$ ma naturalną wersję zespoloną.

Granica $n \rightarrow +\infty$ (przypadek rzeczywisty)

Twierdzenie

(X, D) – prz. polska, $\mathcal{P}_p(X)$ – prz. miar prob. o skończonym p -tym momencie ($p \geq 2$). Zdefiniujmy $\hat{D}_p : \mathcal{P}_p(X) \times \mathcal{P}_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\hat{D}_p(\mu, \nu) := \left[\frac{1}{2} \iint D^p(x, y) \left| \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(x) \frac{d\nu}{d\lambda}(y)} - \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(y) \frac{d\nu}{d\lambda}(x)} \right|^2 d\lambda d\lambda \right]^{1/p}$$

dla dowolnej $\lambda \gg \mu, \nu$. Wówczas $\hat{D}_p$ jest metryką.

- $\hat{D}_p(\mu, \delta_y) = [\int D^p(\cdot, y) d\mu]^{1/p}$, tak jak $W_p(\mu, \delta_y)$!
- $W_p(\mu, \nu) = \inf_{\omega \in \Gamma(\mu, \nu)} (\int_{X^2} D^p(x, y) d\omega)^{1/p}$.
- $\hat{D}_p \neq W_p$. Przykładowo, $\hat{D}_2$ między dwoma Gaussami 1D:

$$\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2 \left(1 - \left(\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 \exp \left(-\frac{(m_1 - m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right) \right)}$$

- W odróżnieniu od W_p , $\hat{D}_p$ ma naturalną wersję zespoloną.

Granica $n \rightarrow +\infty$ (przypadek rzeczywisty)

Twierdzenie

(X, D) – prz. polska, $\mathcal{P}_p(X)$ – prz. miar prob. o skończonym p -tym momencie ($p \geq 2$). Zdefiniujmy $\hat{D}_p : \mathcal{P}_p(X) \times \mathcal{P}_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\hat{D}_p(\mu, \nu) := \left[\frac{1}{2} \iint D^p(x, y) \left| \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(x) \frac{d\nu}{d\lambda}(y)} - \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(y) \frac{d\nu}{d\lambda}(x)} \right|^2 d\lambda d\lambda \right]^{1/p}$$

dla dowolnej $\lambda \gg \mu, \nu$. Wówczas $\hat{D}_p$ jest metryką.

- $\hat{D}_p(\mu, \delta_y) = [\int D^p(\cdot, y) d\mu]^{1/p}$, tak jak $W_p(\mu, \delta_y)$!
- $W_p(\mu, \nu) = \inf_{\omega \in \Gamma(\mu, \nu)} (\int_{X^2} D^p(x, y) d\omega)^{1/p}$.
- $\hat{D}_p \neq W_p$. Przykładowo, $\hat{D}_2$ między dwoma Gaussami 1D:

$$\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2 \left(1 - \left(\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 \exp \left(-\frac{(m_1 - m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right) \right)}$$

- W odróżnieniu od W_p , $\hat{D}_p$ ma naturalną wersję zespoloną.

Granica $n \rightarrow +\infty$ (przypadek rzeczywisty)

Twierdzenie

(X, D) – prz. polska, $\mathcal{P}_p(X)$ – prz. miar prob. o skończonym p -tym momencie ($p \geq 2$). Zdefiniujmy $\hat{D}_p : \mathcal{P}_p(X) \times \mathcal{P}_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\hat{D}_p(\mu, \nu) := \left[\frac{1}{2} \iint D^p(x, y) \left| \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(x) \frac{d\nu}{d\lambda}(y)} - \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(y) \frac{d\nu}{d\lambda}(x)} \right|^2 d\lambda d\lambda \right]^{1/p}$$

dla dowolnej $\lambda \gg \mu, \nu$. Wówczas $\hat{D}_p$ jest metryką.

- $\hat{D}_p(\mu, \delta_y) = [\int D^p(\cdot, y) d\mu]^{1/p}$, tak jak $W_p(\mu, \delta_y)$!
- $W_p(\mu, \nu) = \inf_{\omega \in \Gamma(\mu, \nu)} (\int_{X^2} D^p(x, y) d\omega)^{1/p}$.
- $\hat{D}_p \neq W_p$. Przykładowo, $\hat{D}_2$ między dwoma Gaussami 1D:

$$\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2 \left(1 - \left(\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 \exp \left(-\frac{(m_1 - m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right) \right)}$$

- W odróżnieniu od W_p , $\hat{D}_p$ ma naturalną wersję zespoloną.

Granica $n \rightarrow +\infty$ (przypadek rzeczywisty)

Twierdzenie

(X, D) – prz. polska, $\mathcal{P}_p(X)$ – prz. miar prob. o skończonym p -tym momencie ($p \geq 2$). Zdefiniujmy $\hat{D}_p : \mathcal{P}_p(X) \times \mathcal{P}_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\hat{D}_p(\mu, \nu) := \left[\frac{1}{2} \iint D^p(x, y) \left| \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(x) \frac{d\nu}{d\lambda}(y)} - \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}(y) \frac{d\nu}{d\lambda}(x)} \right|^2 d\lambda d\lambda \right]^{1/p}$$

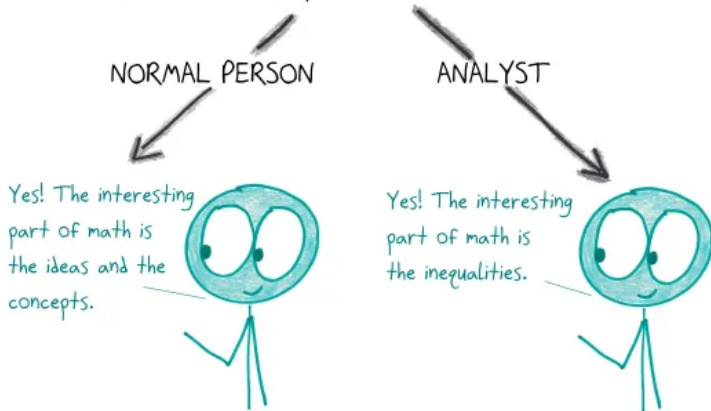
dla dowolnej $\lambda \gg \mu, \nu$. Wówczas $\hat{D}_p$ jest metryką.

- $\hat{D}_p(\mu, \delta_y) = [\int D^p(\cdot, y) d\mu]^{1/p}$, tak jak $W_p(\mu, \delta_y)$!
- $W_p(\mu, \nu) = \inf_{\omega \in \Gamma(\mu, \nu)} (\int_{X^2} D^p(x, y) d\omega)^{1/p}$.
- $\hat{D}_p \neq W_p$. Przykładowo, $\hat{D}_2$ między dwoma Gaussami 1D:

$$\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2 \left(1 - \left(\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 \exp \left(-\frac{(m_1 - m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right) \right)}$$

- W odróżnieniu od W_p , $\hat{D}_p$ ma naturalną wersję zespoloną...

Stephen Hawking: "People have the mistaken impression that mathematics is just equations. In fact, equations are just the boring part of mathematics."



Źródło: Math with Bad Drawings



Dziękuję!

Zapraszam na kanał yt
Copernicus!



Literatura:



TM, R. Bistroń, *Quantizing a finite metric space*, w przygotowaniu (2025).



R. Bistroń, M. Eckstein, S. Friedland, TM, K. Życzkowski, *A new class of distances on complex projective spaces*, *Linear Algebra Appl.* **721**, 577–611 (2024).



M.M. Deza, E. Deza, *Encyclopedia of Distances (Fourth Ed.)*. Springer, 2016.



I. Bengtsson, K. Życzkowski, *Geometry of Quantum Spaces. An Introduction to Quantum Entanglement (Second Ed.)*. Cambridge Univ. Press, 2020.

Bonus: Inna postać nierówności trójkąta

Stwierdzenie

Niech $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie symetryczną, nieujemną funkcją. Dla dowolnych $x, y, z \in X$ następujące warunki są równoważne:

- ❶ $2 \max\{d(x, y), d(x, z), d(y, z)\} \leq d(x, y) + d(x, z) + d(y, z)$
- ❷ $d(x, y)^4 + d(x, z)^4 + d(y, z)^4 \leq 2d(x, y)^2 d(x, z)^2 + 2d(x, y)^2 d(y, z)^2 + 2d(x, z)^2 d(y, z)^2$

Definicja

Na prz. polskiej X rozważmy zbiór par (μ, ψ) , gdzie $\mu \in \mathcal{M}_\sigma^+(X)$ oraz $\psi \in L^2(X, \mu)$ i wprowadźmy relację równoważności

$$(\mu, \psi) \sim (\nu, \varphi) \iff \forall \lambda \gg \mu, \nu \quad \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}} \psi = \sqrt{\frac{d\nu}{d\lambda}} \varphi \quad \lambda\text{-p.w.}$$

Wówczas zbiór ilorazowy $L^2(X) := \{[\mu, \psi]\}$ ma strukturę prz. Hilberta z działaniami

$$\bullet \quad a[\mu, \psi] + b[\nu, \varphi] := \left[\lambda, a\sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}}\psi + b\sqrt{\frac{d\nu}{d\lambda}}\varphi \right]$$

$$\bullet \quad \langle [\mu, \psi], [\nu, \varphi] \rangle := \int \bar{\psi} \varphi \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda} \frac{d\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

gdzie $\lambda \gg \mu, \nu$ jest dowolna.

(X, D) – prz. polska. Zdefiniujmy $\hat{D}_2 : \mathbb{P}L^2(X) \times \mathbb{P}L^2(X) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\hat{D}_2([\mu, \psi], [\nu, \varphi]) := \sqrt{\frac{1}{2} \iint D^2 \left| \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}} \psi \wedge \sqrt{\frac{d\nu}{d\lambda}} \varphi \right|^2 d\lambda d\lambda}$$

dla dowolnej $\lambda \gg \mu, \nu$. Wówczas $\hat{D}_2$ jest metryką na $\mathbb{P}L^2(X)$.

Definicja

Na prz. polskiej X rozważmy zbiór par (μ, ψ) , gdzie $\mu \in \mathcal{M}_\sigma^+(X)$ oraz $\psi \in L^2(X, \mu)$ i wprowadźmy relację równoważności

$$(\mu, \psi) \sim (\nu, \varphi) \iff \forall \lambda \gg \mu, \nu \quad \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}} \psi = \sqrt{\frac{d\nu}{d\lambda}} \varphi \quad \lambda\text{-p.w.}$$

Wówczas zbiór ilorazowy $L^2(X) := \{[\mu, \psi]\}$ ma strukturę prz. Hilberta z działaniami

$$\bullet \quad a[\mu, \psi] + b[\nu, \varphi] := \left[\lambda, a\sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}}\psi + b\sqrt{\frac{d\nu}{d\lambda}}\varphi \right]$$

$$\bullet \quad \langle [\mu, \psi], [\nu, \varphi] \rangle := \int \bar{\psi} \varphi \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}} \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda$$

gdzie $\lambda \gg \mu, \nu$ jest dowolna.

(X, D) – prz. polska. Zdefiniujmy $\hat{D}_2 : \mathbb{P}L^2(X) \times \mathbb{P}L^2(X) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\hat{D}_2([\mu, \psi], [\nu, \varphi]) := \sqrt{\frac{1}{2} \iint D^2 \left| \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}} \psi \wedge \sqrt{\frac{d\nu}{d\lambda}} \varphi \right|^2 d\lambda d\lambda}$$

dla dowolnej $\lambda \gg \mu, \nu$. Wówczas $\hat{D}_2$ jest metryką na $\mathbb{P}L^2(X)$.

Definicja

Na prz. polskiej X rozważmy zbiór par (μ, ψ) , gdzie $\mu \in \mathcal{M}_\sigma^+(X)$ oraz $\psi \in L^2(X, \mu)$ i wprowadźmy relację równoważności

$$(\mu, \psi) \sim (\nu, \varphi) \iff \forall \lambda \gg \mu, \nu \quad \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}} \psi = \sqrt{\frac{d\nu}{d\lambda}} \varphi \quad \lambda\text{-p.w.}$$

Wówczas zbiór ilorazowy $L^2(X) := \{[\mu, \psi]\}$ ma strukturę prz. Hilberta z działaniami

- $a[\mu, \psi] + b[\nu, \varphi] := \left[\lambda, a\sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}}\psi + b\sqrt{\frac{d\nu}{d\lambda}}\varphi \right]$

- $\langle [\mu, \psi], [\nu, \varphi] \rangle := \int \bar{\psi} \varphi \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}} \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda$

gdzie $\lambda \gg \mu, \nu$ jest dowolna.

(X, D) – prz. polska. Zdefiniujmy $\hat{D}_2 : \mathbb{P}L^2(X) \times \mathbb{P}L^2(X) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\hat{D}_2([\mu, \psi], [\nu, \varphi]) := \sqrt{\frac{1}{2} \iint D^2 \left| \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}} \psi \wedge \sqrt{\frac{d\nu}{d\lambda}} \varphi \right|^2 d\lambda d\lambda}$$

dla dowolnej $\lambda \gg \mu, \nu$. Wówczas $\hat{D}_2$ jest metryką na $\mathbb{P}L^2(X)$.

Definicja

Na prz. polskiej X rozważmy zbiór par (μ, ψ) , gdzie $\mu \in \mathcal{M}_\sigma^+(X)$ oraz $\psi \in L^2(X, \mu)$ i wprowadźmy relację równoważności

$$(\mu, \psi) \sim (\nu, \varphi) \iff \forall \lambda \gg \mu, \nu \quad \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}} \psi = \sqrt{\frac{d\nu}{d\lambda}} \varphi \quad \lambda\text{-p.w.}$$

Wówczas zbiór ilorazowy $L^2(X) := \{[\mu, \psi]\}$ ma strukturę prz. Hilberta z działaniami

- $a[\mu, \psi] + b[\nu, \varphi] := \left[\lambda, a\sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}}\psi + b\sqrt{\frac{d\nu}{d\lambda}}\varphi \right]$

- $\langle [\mu, \psi], [\nu, \varphi] \rangle := \int \bar{\psi} \varphi \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda} \frac{d\nu}{d\lambda}} d\lambda$

gdzie $\lambda \gg \mu, \nu$ jest dowolna.

(X, D) – prz. polska. Zdefiniujmy $\hat{D}_2 : \mathbb{P}L^2(X) \times \mathbb{P}L^2(X) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\hat{D}_2([\mu, \psi], [\nu, \varphi]) := \sqrt{\frac{1}{2} \iint D^2 \left| \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}} \psi \wedge \sqrt{\frac{d\nu}{d\lambda}} \varphi \right|^2 d\lambda d\lambda}$$

dla dowolnej $\lambda \gg \mu, \nu$. Wówczas $\hat{D}_2$ jest metryką na $\mathbb{P}L^2(X)$.