

Szkoła Matematyki Poglądowej 2025

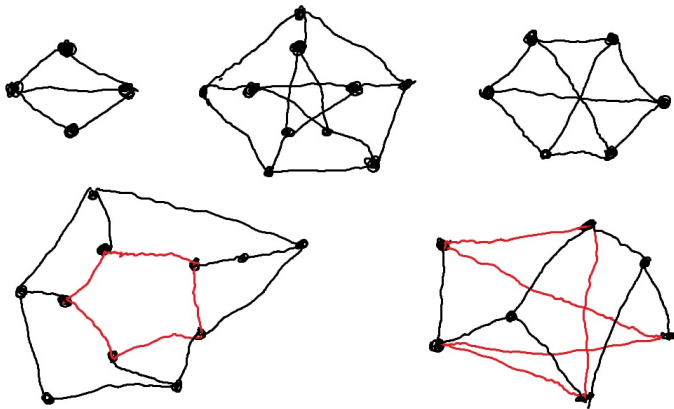
Porzucone

Paweł Naroski

Politechnika Warszawska

Gliwice, 22 VIII 2025

Brzydkie rysunki

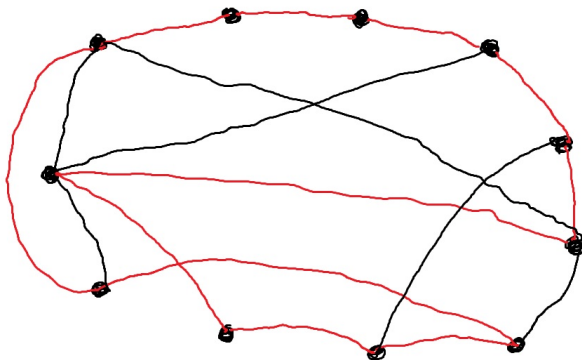


Na początku jest definicja (a nie pytanie)

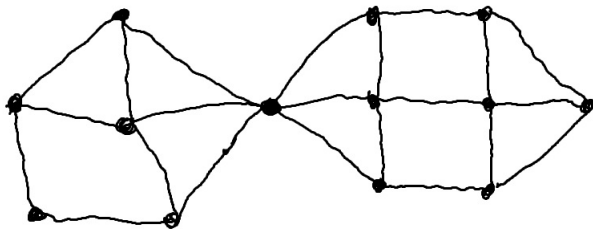
Definicja

Cyklem Hamiltona w grafie nazywamy cykl, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki tego grafu.

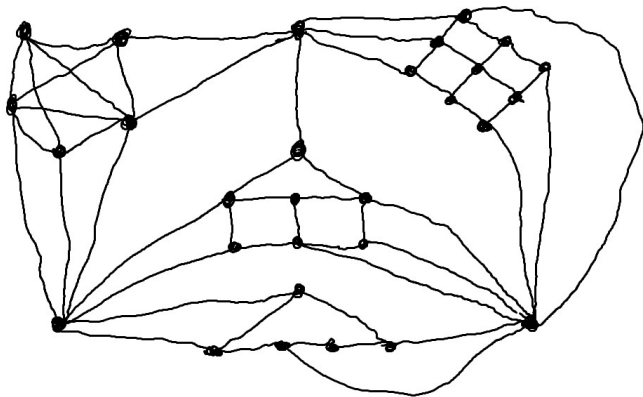
Cykl Hamiltona



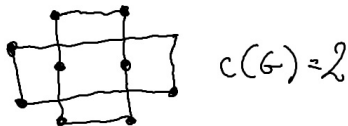
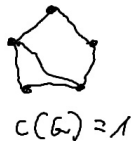
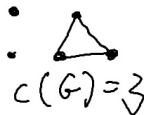
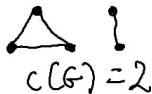
A tu nie ma cyklu Hamiltona



A tu?



$c(G)$ - liczba składowych grafu G



Twierdzenie

Jeśli graf $G = (V, E)$ ma cykl Hamiltona, to

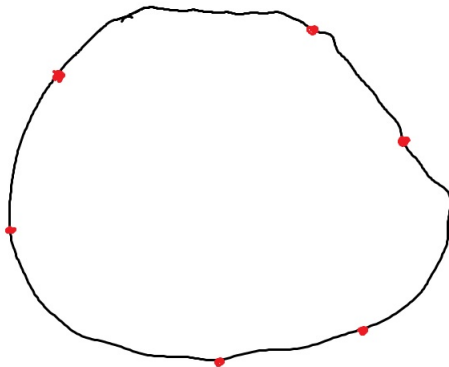
$$(\forall S \subseteq V)(S \neq \emptyset \Rightarrow c(G - S) \leq |S|).$$

Twierdzenie

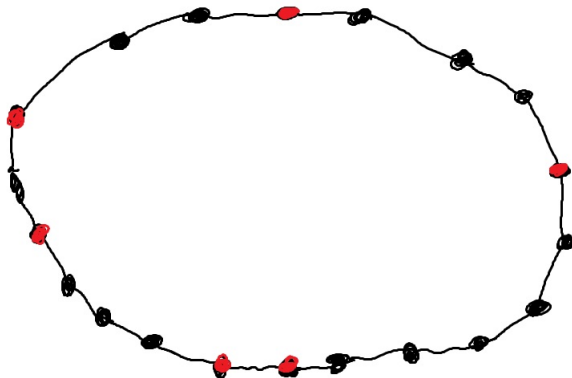
Jeśli graf $G = (V, E)$ ma cykl Hamiltona, to

$$(\forall S \subseteq V)(S \neq \emptyset \Rightarrow c(G - S) \leq |S|).$$

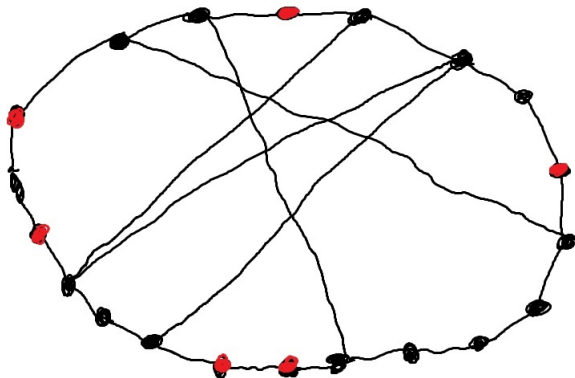
Po ludzku: jeśli z grafu usuniemy k wierzchołków, to graf nie rozpadnie nam się na więcej niż k kawałków.



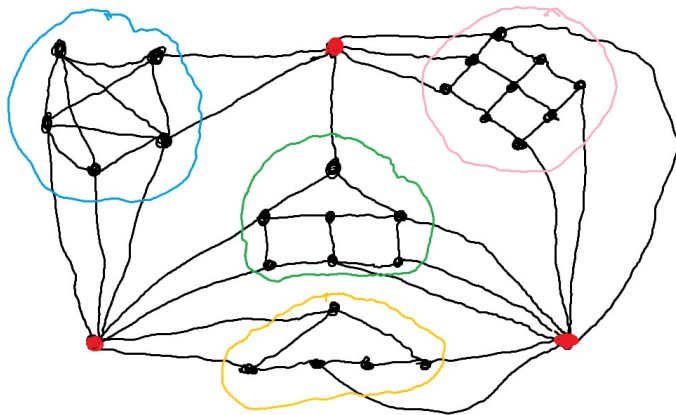
Kombinatoryczna rzeczywistość



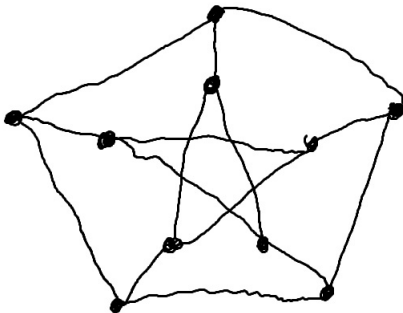
Kombinatoryczna rzeczywistość



A tu nie ma



Graf Petersena



Od prostego warunku koniecznego do ciekawego pojęcia

Definicja

Niech t będzie nieujemną liczbą rzeczywistą. Graf $G = (V, E)$ nazwiemy **t -twardym**, jeśli

$$(\forall \emptyset \subset S \subset V)(c(G - S) > 1 \Rightarrow t \cdot c(G - S) \leq |S|).$$

Od prostego warunku koniecznego do ciekawego pojęcia

Definicja

Niech t będzie nieujemną liczbą rzeczywistą. Graf $G = (V, E)$ nazwiemy **t -twardym**, jeśli

$$(\forall \emptyset \subset S \subset V)(c(G - S) > 1 \Rightarrow t \cdot c(G - S) \leq |S|).$$

Twierdzenie

Jeśli graf $G = (V, E)$ jest grafem Hamiltona, to

$$(\forall \emptyset \subset S \subset V)c(G - S) \leq |S|.$$

Od prostego warunku koniecznego do ciekawego pojęcia

Definicja

Niech t będzie nieujemną liczbą rzeczywistą. Graf $G = (V, E)$ nazwiemy **t -twardym**, jeśli

$$(\forall \emptyset \subset S \subset V)(c(G - S) > 1 \Rightarrow t \cdot c(G - S) \leq |S|).$$

Twierdzenie

Jeśli graf $G = (V, E)$ jest grafem Hamiltona, to

$$(\forall \emptyset \subset S \subset V)c(G - S) \leq |S|.$$

Twierdzenie

Każdy graf hamiltonowski jest 1-twardy.

Od prostego warunku koniecznego do ciekawego pojęcia

Definicja

Niech t będzie nieujemną liczbą rzeczywistą. Graf $G = (V, E)$ nazwiemy **t -twardym**, jeśli

$$(\forall \emptyset \subset S \subset V)(c(G - S) > 1 \Rightarrow t \cdot c(G - S) \leq |S|).$$

Twierdzenie

Jeśli graf $G = (V, E)$ jest grafem Hamiltona, to

$$(\forall \emptyset \subset S \subset V)c(G - S) \leq |S|.$$

Twierdzenie

Każdy graf hamiltonowski jest 1-twardy.

Graf Petersena jest 1-twardy, ale nie jest hamiltonowski.

Hipoteza (Chvátal, 1973)

Istnieje takie t_0 , że każdy t_0 -twardy graf jest grafem Hamiltona.

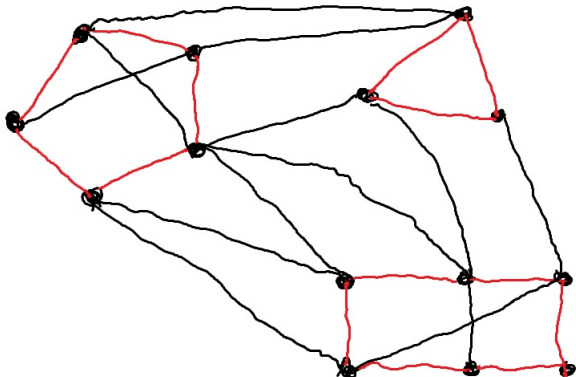


Vašek Chvátal (ur. 1946)

Twierdzenie (Enomoto, Jackson, Katerinis, Saito, 1985)

Każdy 2-twardy graf ma 2-faktor.

2-faktor



Historia hipotezy o twardości

Twierdzenie (Enomoto, Jackson, Katerinis, Saito, 1985)

Każdy 2-twardy graf ma 2-faktor.

Twierdzenie (Enomoto, Jackson, Katerinis, Saito, 1985)

Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $(2 - \varepsilon)$ -twardy graf bez 2-faktora.

Historia hipotezy o twardości

Twierdzenie (Enomoto, Jackson, Katerinis, Saito, 1985)

Każdy 2-twardy graf ma 2-faktor.

Twierdzenie (Enomoto, Jackson, Katerinis, Saito, 1985)

Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $(2 - \varepsilon)$ -twardy graf bez 2-faktora.

Wniosek

Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $(2 - \varepsilon)$ -twardy graf niehamiltonowski.

Historia hipotezy o twardości

Twierdzenie (Enomoto, Jackson, Katerinis, Saito, 1985)

Każdy 2-twardy graf ma 2-faktor.

Twierdzenie (Enomoto, Jackson, Katerinis, Saito, 1985)

Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $(2 - \varepsilon)$ -twardy graf bez 2-faktora.

Wniosek

Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $(2 - \varepsilon)$ -twardy graf niehamiltonowski.

Hipoteza (też Chvátal)

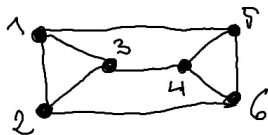
Każdy 2-twardy graf jest grafem Hamiltona!

Może by tak porzucić tę twardość?

Twierdzenie (Bauer, Broersma, Veldman, 2000)

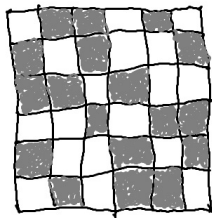
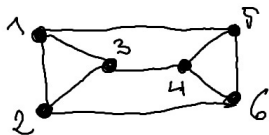
Ostatnia hipoteza jest fałszywa! Nie każdy 2-twardy graf ma cykl Hamiltona.

Macierz sąsiedztwa na brzydkim rysunku



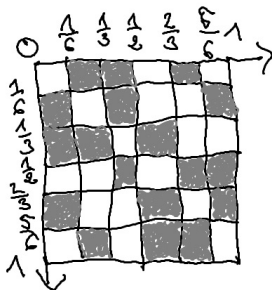
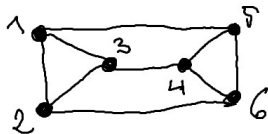
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0

Macierz sąsiedztwa na brzydkim rysunku



0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0

Macierz sąsiedztwa na brzydkim rysunku



0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0

Definicja

Grafonem nazywamy mierzalną i symetryczną funkcję
 $W : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$.

Skąd wzięły się grafony?

- projektowanie komputerów kwantowych i modele fizyki statystycznej
- modelowanie Internetu
- powiązania quasilosowości z lematem o regularności

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ!

i porzucmy już ten referat