

Matematyczna eskapada

68. Szkoła Matematyki Poglądowej 2025

Michał Zwierzyński

Politechnika Warszawska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

22.08.2025 r.

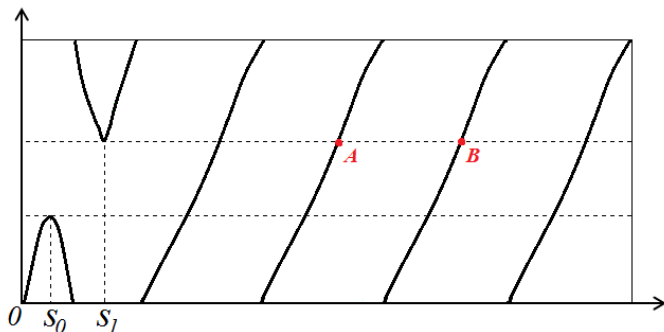


Spis treści

- 1 Równoległe trasy górskie
- 2 Skąd te góry?
- 3 Artystyczny punkt widzenia
- 4 Kilka własności
- 5 Dekompozycja

Góry i zwierzaki

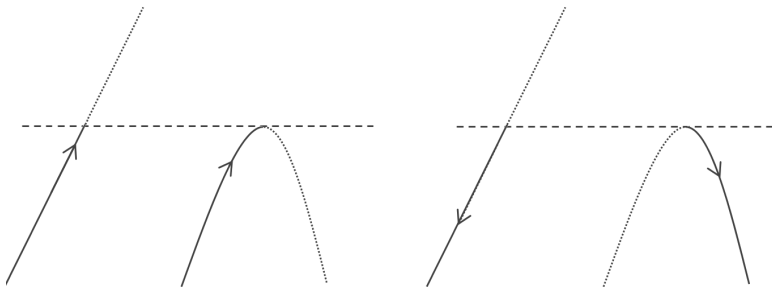
Niech $S^1 \equiv [0, 1] \pmod{1}$ (sklejamy 0 oraz 1 ze sobą). Rozważmy $f : S^1 \rightarrow S^1$, lokalnie niestałą, ze skończoną liczbą ekstremów lokalnych na różnych poziomach. Wtedy wykres takiej funkcji f nazywamy *górami*.



Dwa różne punkty na górze, które leżą na tym samym poziomie, nazywamy *zwierzakami* (punkty A i B na powyższym rysunku góry).

Równoległe spacery

Teraz, żeby nie było zbyt prosto (ale żeby było ciekawie!) wprowadzimy obostrzenia na chodzenie zwierzaków na tych górach. Mianowicie, zwierzaki zawsze muszą iść do przodu – nie mogą nagle oba zawrócić) i jeśli jeden z nich napotka dolinkę lub szczyt górski, to musi zawrócić, jak tutaj:



Pytamy się (i na te pytania mniej więcej umiemy odpowiedzieć):

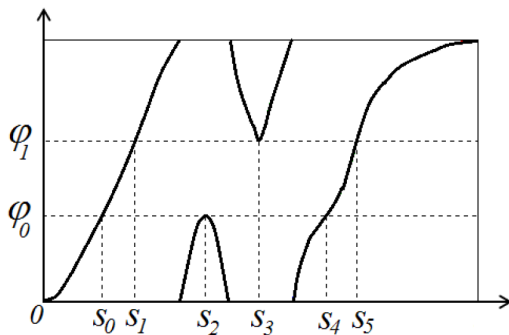
Pytamy się (i na te pytania mniej więcej umiemy odpowiedzieć):

- jak dużo różnych spacerów jest dla ustalonej góry?

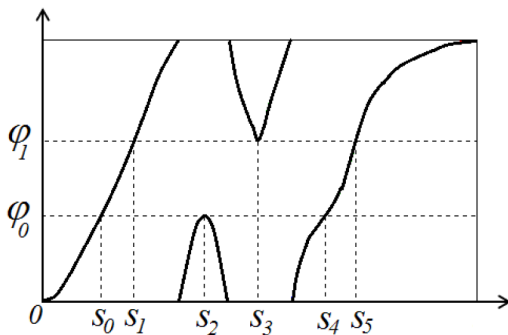
Pytamy się (i na te pytania mniej więcej umiemy odpowiedzieć):

- jak dużo różnych spacerów jest dla ustalonej góry?
- jeśli oba zwierzaki zaczną podróż w dolince lub na szczycie, to czy kiedykolwiek jeszcze się spotkają?

Algorytm wyznaczania tras wycieczkowych

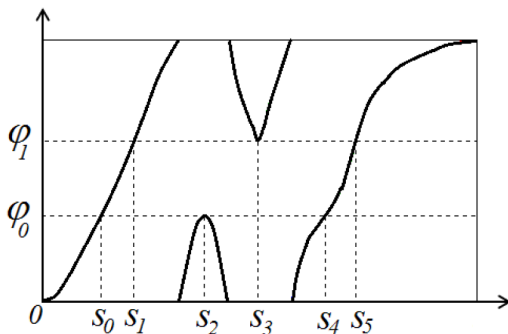


Algorytm wyznaczania tras wycieczkowych



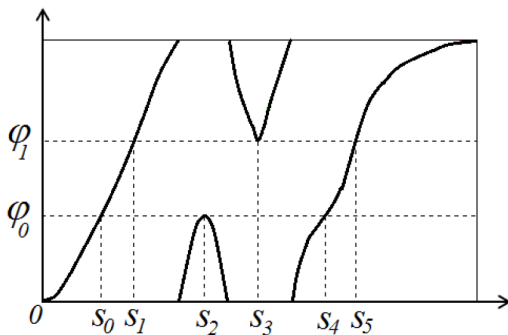
- Znajdź wszystkie punkty, które są na tym samym poziomie co szczyty i doliny – (s_k)

Algorytm wyznaczania tras wycieczkowych



- Znajdź wszystkie punkty, które są na tym samym poziomie co szczyty i doliny – (s_k)
- stwórz zbiory łuków równoległych – (Φ_k). Każdy zbiór Φ_k zawiera przedziały ($s_\ell, s_{\ell\pm 1}$) (które możemy utożsamiać z parami indeksów) dla których obrazy tych przedziałów są takie same*:

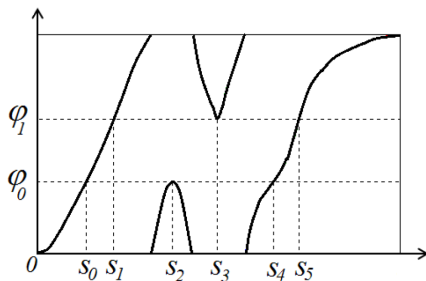
Algorytm wyznaczania tras wycieczkowych



- Znajdź wszystkie punkty, które są na tym samym poziomie co szczyty i doliny – (s_k)
- stwórz zbiory łuków równoległych – (Φ_k) . Każdy zbiór Φ_k zawiera przedziały $(s_\ell, s_{\ell \pm 1})$ (które możemy utożsamiać z parami indeksów) dla których obrazy tych przedziałów są takie same*:

$$\Phi_0 = \{(s_0, s_1), (s_4, s_5)\}, \quad \Phi_1 = \{(s_1, s_2), (s_3, s_2), (s_3, s_4), (s_5, s_0)\}.$$

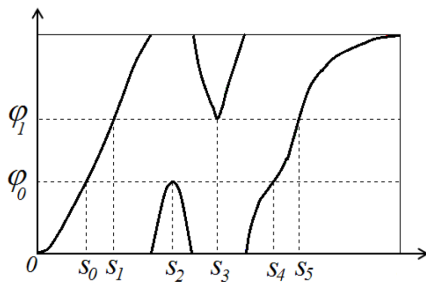
Algorytm wyznaczania tras wycieczkowych



$$\Phi_0 = \{(0, 1), (4, 5)\}, \quad \Phi_1 = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 0)\}.$$

- Trasa wycieczkowa (spacer) będzie zawierał pary elementów z Φ_k – stąd wszystkie możliwe trasy składają się w sumie z $2 \sum_k \binom{\#\Phi_k}{2}$ elementów.

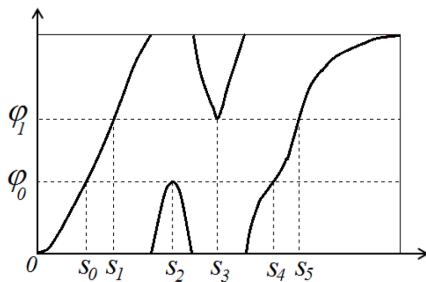
Algorytm wyznaczania tras wycieczkowych



$$\Phi_0 = \{(0, 1), (4, 5)\}, \quad \Phi_1 = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 0)\}.$$

2
—
2

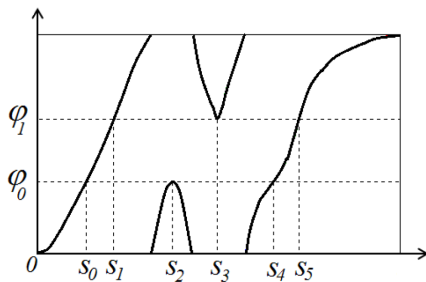
Algorytm wyznaczania tras wycieczkowych



$$\Phi_0 = \{(0, 1), (4, 5)\}, \quad \Phi_1 = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 0)\}.$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \\ \hline 2 \quad 3 \end{array}$$

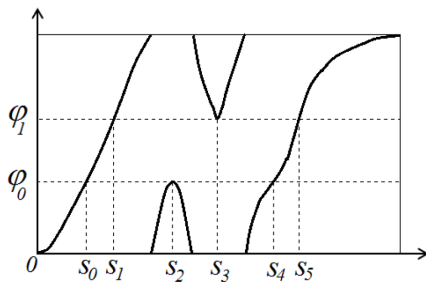
Algorytm wyznaczania tras wycieczkowych



$$\Phi_0 = \{(0, 1), (4, 5)\}, \quad \Phi_1 = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 0)\}.$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 4 \end{array}$$

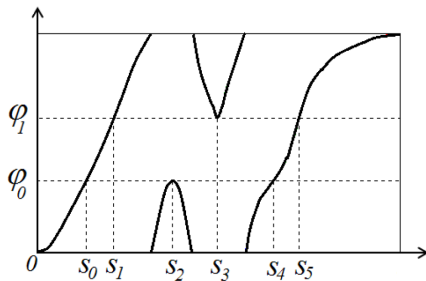
Algorytm wyznaczania tras wycieczkowych



$$\Phi_0 = \{(0, 1), (4, 5)\}, \quad \Phi_1 = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 0)\}.$$

$$\begin{array}{rcccc} 2 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 3 \end{array}$$

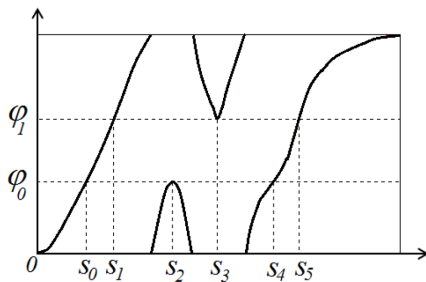
Algorytm wyznaczania tras wycieczkowych



$$\Phi_0 = \{(0, 1), (4, 5)\}, \quad \Phi_1 = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 0)\}.$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \end{array}$$

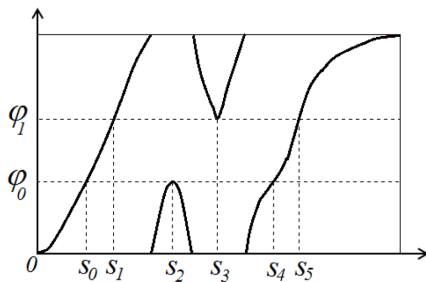
Algorytm wyznaczania tras wycieczkowych



$$\Phi_0 = \{(0, 1), (4, 5)\}, \quad \Phi_1 = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 0)\}.$$

$$\begin{array}{rcccccc} 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

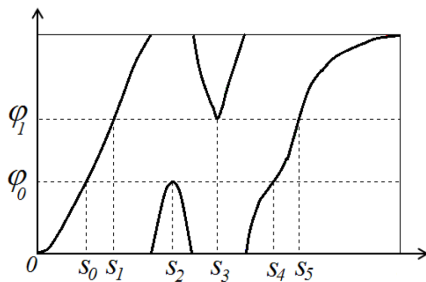
Algorytm wyznaczania tras wycieczkowych



$$\Phi_0 = \{(0, 1), (4, 5)\}, \quad \Phi_1 = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 0)\}.$$

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

Algorytm wyznaczania tras wycieczkowych

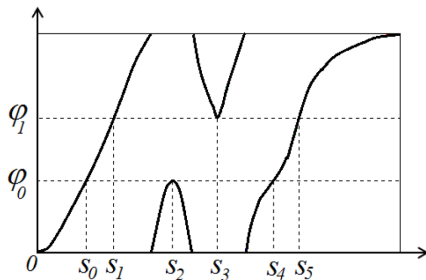


$$\Phi_0 = \{(0, 1), (4, 5)\}, \quad \Phi_1 = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 0)\}.$$

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ \hline 4 & 5 & 0 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Algorytm wyznaczania tras wycieczkowych

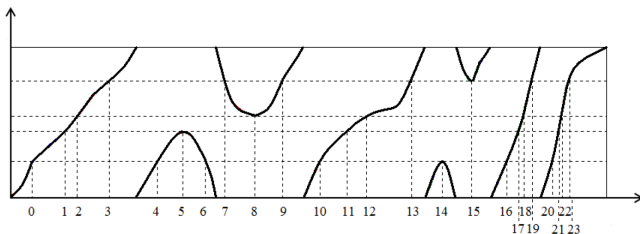


$$\Phi_0 = \{(0, 1), (4, 5)\}, \quad \Phi_1 = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 0)\}.$$

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ \hline 4 & 5 & 0 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

$$6 + 8 = 2 \left(\binom{2}{2} + \binom{4}{2} \right)$$



$$\Phi_0 = \{ \underline{p_0 \wedge p_1}, \underline{p_4 \wedge p_5}, \underline{p_6 \wedge p_5}, \underline{p_{10} \wedge p_{11}}, \underline{p_{16} \wedge p_{17}}, \underline{p_{20} \wedge p_{21}} \},$$

$$\Phi_1 = \{ \underline{p_1 \wedge p_2}, \underline{p_{11} \wedge p_{12}}, \underline{p_{17} \wedge p_{18}}, \underline{p_{21} \wedge p_{22}} \},$$

$$\Phi_2 = \{ \underline{p_2 \wedge p_3}, \underline{p_8 \wedge p_7}, \underline{p_8 \wedge p_9}, \underline{p_{12} \wedge p_{13}}, \underline{p_{18} \wedge p_{19}}, \underline{p_{22} \wedge p_{23}} \},$$

$$\Phi_3 = \{ \underline{p_3 \wedge p_4}, \underline{p_7 \wedge p_6}, \underline{p_9 \wedge p_{10}}, \underline{p_{13} \wedge p_{14}}, \underline{p_{15} \wedge p_{14}}, \underline{p_{15} \wedge p_{16}}, \underline{p_{19} \wedge p_{20}}, \underline{p_{23} \wedge p_0} \}.$$

$$\frac{p_5 \wedge p_6 \wedge p_7 \wedge p_8 \wedge p_9 \wedge p_{10} \wedge p_{11} \wedge p_{10} \wedge p_9 \wedge p_8}{p_5 \wedge p_4 \wedge p_3 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge p_5 \wedge p_6 \wedge p_7 \wedge p_8} \quad \frac{p_{14} \wedge p_{15} \wedge p_{16} \wedge p_{15}}{p_{14} \wedge p_{13} \wedge p_{14} \wedge p_{15}}$$

$$\frac{14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 20 \ 19 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 0}{0 \ 23 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14}$$

$$\frac{4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 16 \ 15 \ 14 \ 13 \ 12}{0 \ 1 \ 0 \ 23 \ 22 \ 23 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 6 \ 7 \ 8} \quad \frac{13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4}{9 \ 10 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 0}$$

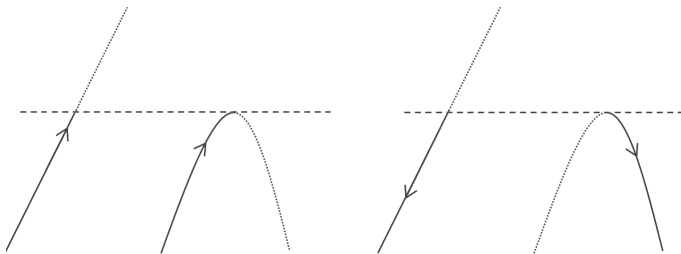
Stwierdzenie

Istnieje jednoznacznie przedłużenie każdego niedokończonego spaceru.

Co wiemy do tej pory

Stwierdzenie

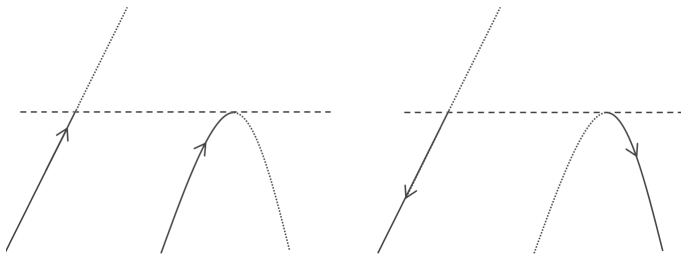
Istnieje jednoznacznie przedłużenie każdego niedokończonego spaceru.



Co wiemy do tej pory

Stwierdzenie

Istnieje jednoznacznie przedłużenie każdego niedokończonego spaceru.



Uwaga

Oczywiście mamy skończenie wiele łuków równoległym, więc również skończenie wiele spacerów i każdy spacer będzie ukończony.

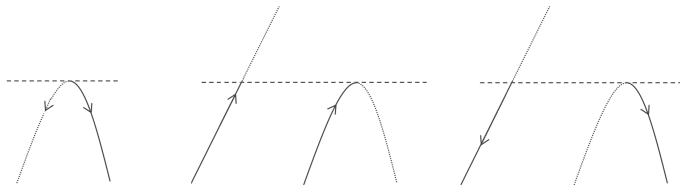
Stwierdzenie

Jeśli zwierzaki zaczną spacer na szczycie (odpowiednio: dolinie), to spotkają się później w dolinie (odpowiednio: na szczycie).

Co wiemy do tej pory

Stwierdzenie

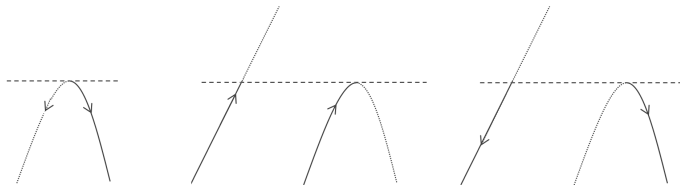
Jeśli zwierzaki zaczną spacer na szczycie (odpowiednio: dolinie), to spotkają się później w dolinie (odpowiednio: na szczycie).



Co wiemy do tej pory

Stwierdzenie

Jeśli zwierzaki zaczną spacer na szczycie (odpowiednio: dolinie), to spotkają się później w dolinie (odpowiednio: na szczycie).



Uwaga

Istnieje parzyście wiele ekstremów lokalnych (szczytów oraz dolin) pomiędzy punktami spotkań zwierzaków na spacerze.

Co chcemy wiedzieć

Co chcemy wiedzieć

- W której dokładnie dolince/szczycie nasze zwierzaki się znów spotkają? (choć jakiegoś oszacowanie...)

Co chcemy wiedzieć

- W której dokładnie dolince/szczycie nasze zwierzaki się znów spotkają? (choć jakiegoś oszacowanie...)
- Jakiego ograniczenia na liczbę różnych spacerów w zależności od wielkości góry (np. liczby ekstremów, linii wznoszących/opadających)

Co chcemy wiedzieć

- W której dokładnie dolince/szczycie nasze zwierzaki się znów spotkają? (choćby jakieś oszacowanie...)
- Jakież ograniczenia na liczbę różnych spacerów w zależności od wielkości góry (np. liczby ekstremów, linii wznoszących/opadających)
- W szczególności: jeśli dodamy jedną linię wznoszącą/opadającą do ustalonej góry, to czy zwiększy się liczba spacerów?

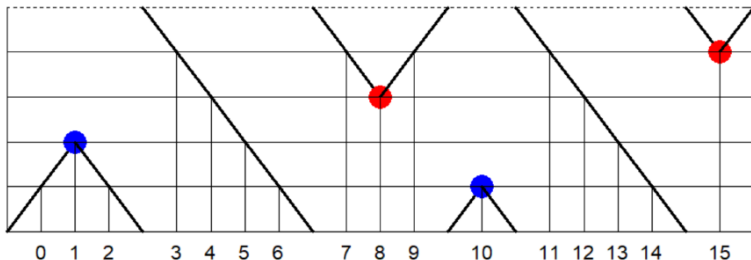
Co chcemy wiedzieć

- W której dokładnie dolince/szczycie nasze zwierzaki się znów spotkają? (choćby jakieś oszacowanie...)
- Jakież ograniczenia na liczbę różnych spacerów w zależności od wielkości góry (np. liczby ekstremów, linii wznoszących/opadających)
- W szczególności: jeśli dodamy jedną linię wznoszącą/opadającą do ustłonej góry, to czy zwiększy się liczba spacerów?
- ...

Co chcemy wiedzieć

- W której dokładnie dolince/szczycie nasze zwierzaki się znów spotkają? (choćby jakieś oszacowanie...)
- Jakież ograniczenia na liczbę różnych spacerów w zależności od wielkości góry (np. liczby ekstremów, linii wznoszących/opadających)
- W szczególności: jeśli dodamy jedną linię wznoszącą/opadającą do ustłonej góry, to czy zwiększy się liczba spacerów?
- ... każde takie twierdzenie da nam odpowiadające twierdzenie dotyczące pewnych zbiorów osobliwych w geometrii różniczkowej/teorii osobliwości (kaustyka Wignera, zbiór środka symetrii, sieczna kaustyka, zbiory afinicznie równoodległe, ...)

Potencjalne usprawnienie (Bartosz Dziwirek)



Hike 1
 1 0 15 14 13 14 15 0 1 2 3 2 1
 1 2 3 2 1 0 15 14 13 14 15 0 1

Hike 2
 10 9 8 7 6 7 8 9 10 11 12 11 10
 10 11 12 11 10 9 8 7 6 7 8 9 10

Hike 3
 0 1 2 3 4 3 2 3 4 5 6 7 6 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 0
 6 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 0 1 2 3 4 3 2 3 4 5 6 7 6

Hike 4
 10 9 10 11 10
 14 15 0 15 14

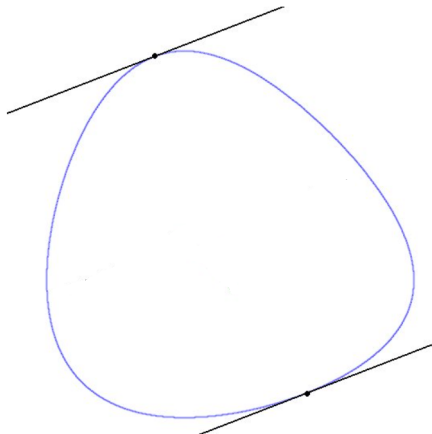
Hike 5
 14 15 0 15 14
 10 9 10 11 10

Spis treści

- 1 Równoległe trasy górskie
- 2 Skąd te góry?
- 3 Artystyczny punkt widzenia
- 4 Kilka własności
- 5 Dekompozycja

Definicja

Parę różnych punktów na krzywej M nazwiemy parą równoległą, jeśli styczne do tej krzywej w tych punktach są równoległe.

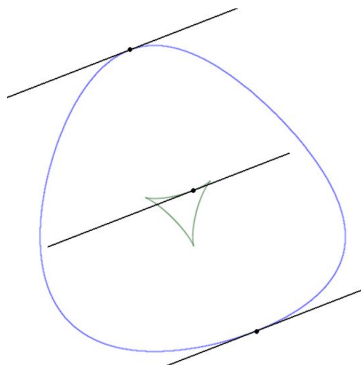


Kaustyka Wignera

Definicja

Zbiór $E_\lambda(M) := \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid a, b \text{ jest parą równoległą } M\}$ nazywamy zbiotem afinicznie λ -równoodległym krzywej M dla ustłonej wartości $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zbiór $E_{0.5}(M)$ nazywamy kaustyką Wignera.



- Zastosowania kaustyki Wignera są szerokie...

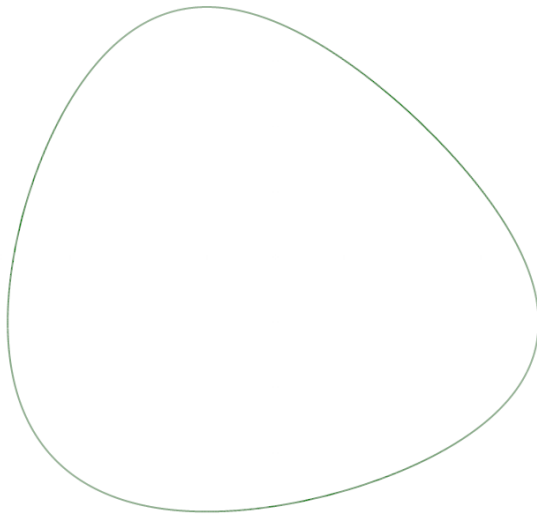
- Zastosowania kaustyki Wignera są szerokie... wzięta się z badania funkcji Wignera w fizyce semiklasycznej i szukaniu miejsc, gdzie ta funkcja ma „bardzo duże wartości”; przydaje się w fizyce w równaniu Monge'a-Ampera (przy konstrukcji tzw. niewłaściwych sfer afinicznych);

- Zastosowania kaustyki Wignera są szerokie... wzięta się z badania funkcji Wignera w fizyce semiklasycznej i szukaniu miejsc, gdzie ta funkcja ma „bardzo duże wartości”; przydaje się w fizyce w równaniu Monge'a-Ampera (przy konstrukcji tzw. niewłaściwych sfer afinicznych); w geometrii wypukłej przydaje się w badaniu relacji izoperymetrycznych;

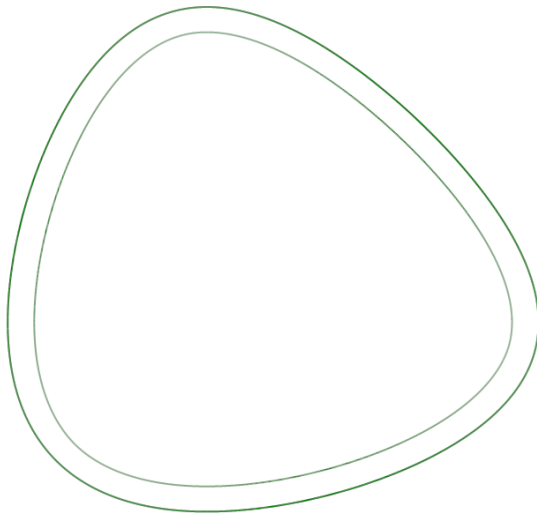
- Zastosowania kaustyki Wignera są szerokie... wzięta się z badania funkcji Wignera w fizyce semiklasycznej i szukaniu miejsc, gdzie ta funkcja ma „bardzo duże wartości”; przydaje się w fizyce w równaniu Monge'a-Ampera (przy konstrukcji tzw. niewłaściwych sfer afinicznych); w geometrii wypukłej przydaje się w badaniu relacji izoperymetrycznych; dzięki niej badamy defekty symetrii;

- Zastosowania kaustyki Wignera są szerokie... wzięta się z badania funkcji Wignera w fizyce semiklasycznej i szukaniu miejsc, gdzie ta funkcja ma „bardzo duże wartości”; przydaje się w fizyce w równaniu Monge'a-Ampera (przy konstrukcji tzw. niewłaściwych sfer afinicznych); w geometrii wypukłej przydaje się w badaniu relacji izoperymetrycznych; dzięki niej badamy defekty symetrii;
- i to są tylko niektóre z jej własności...

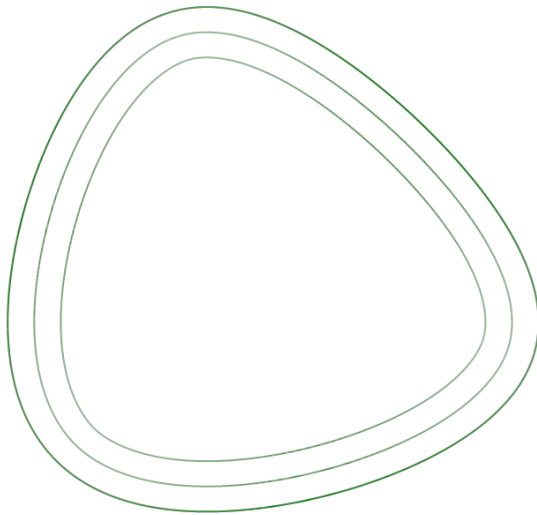
$$M, E_\lambda(M)$$



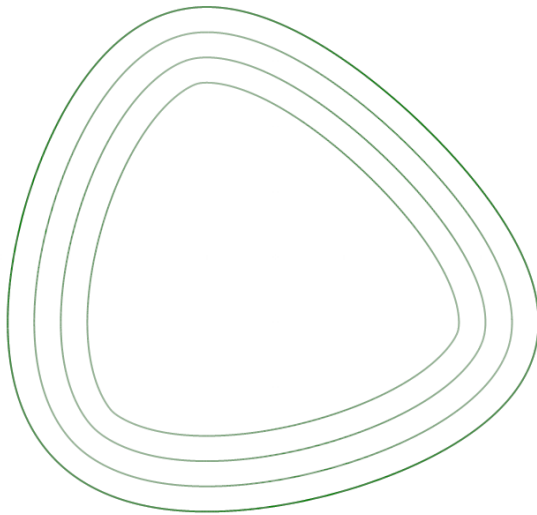
$$M, E_\lambda(M)$$



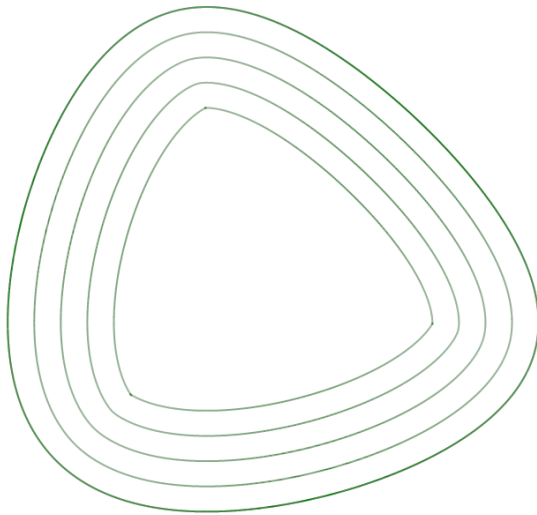
$$M, E_\lambda(M)$$



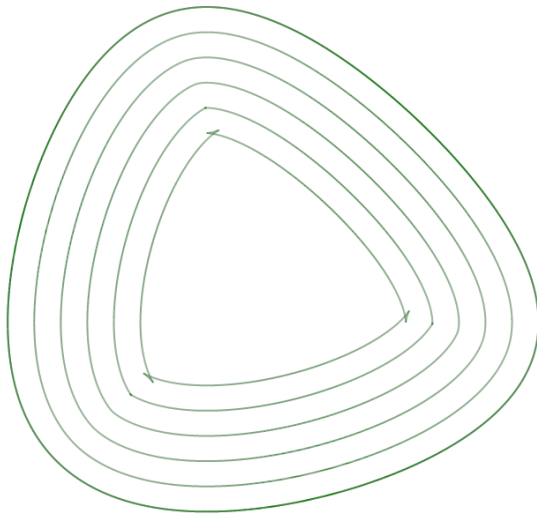
$$M, E_\lambda(M)$$



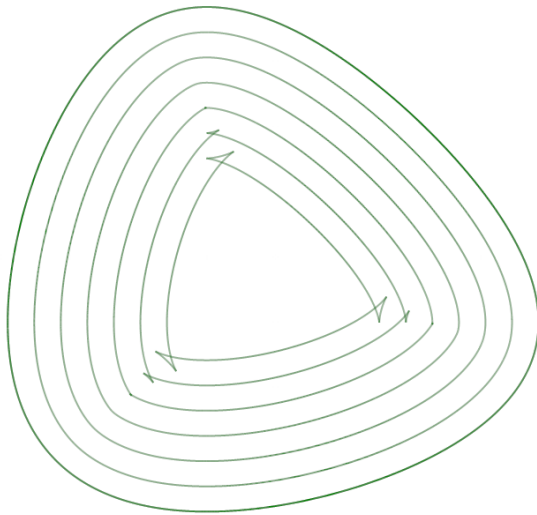
$$M, E_\lambda(M)$$



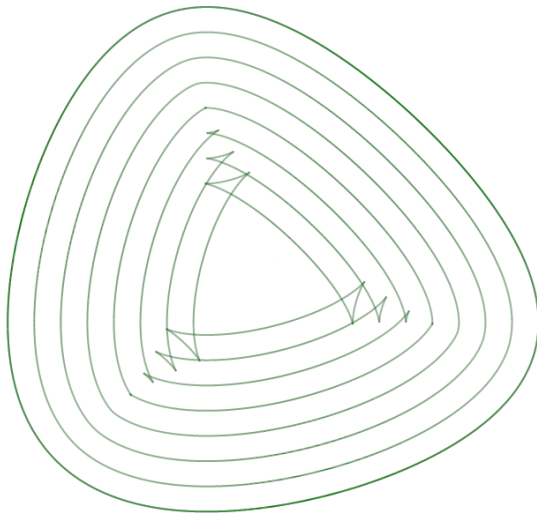
$$M, E_\lambda(M)$$



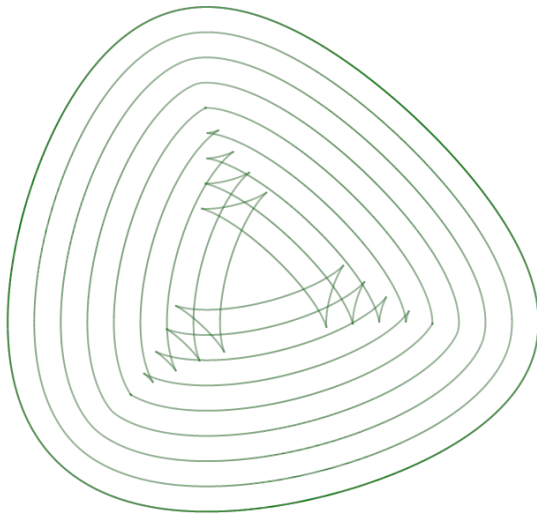
$$M, E_\lambda(M)$$



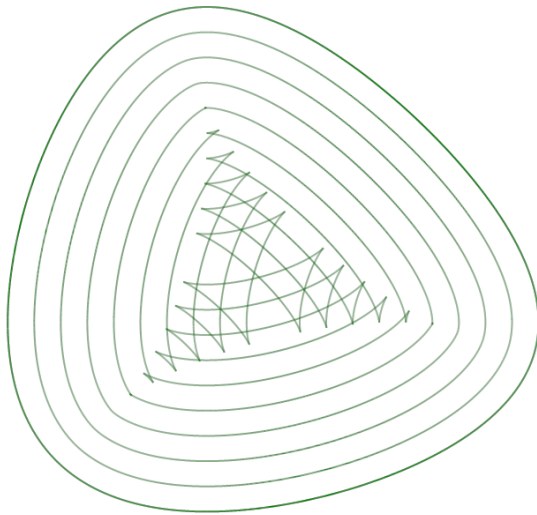
$$M, E_\lambda(M)$$



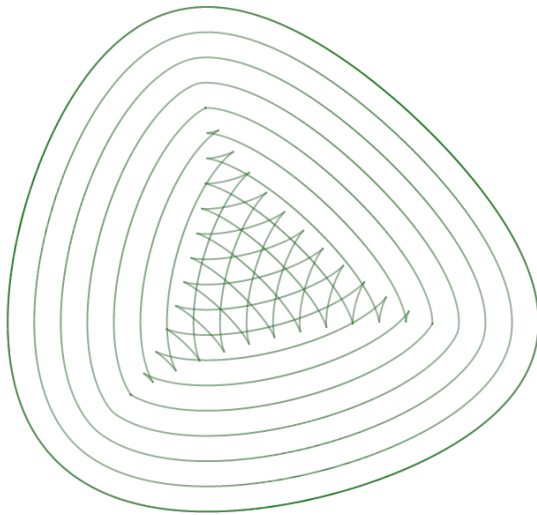
$$M, E_\lambda(M)$$



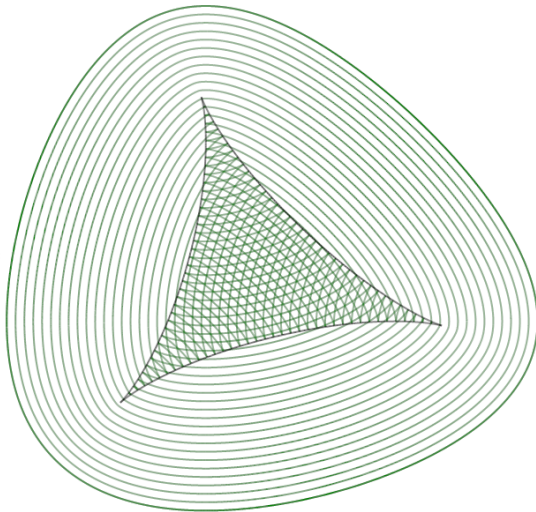
$$M, E_\lambda(M)$$



$$M, E_\lambda(M)$$



$$M, E_\lambda(M)$$



Definicja

Zbiorem środka symetrii krzywej M ($\text{CSS}(M)$) nazywamy zbiór wszystkich punktów osobliwych rodziny zbiorów afinicznie równoodległych krzywej M .

Definicja

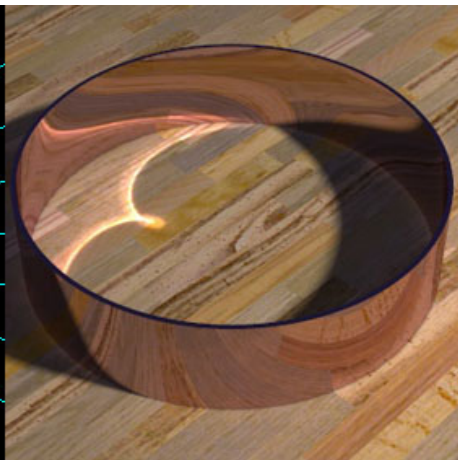
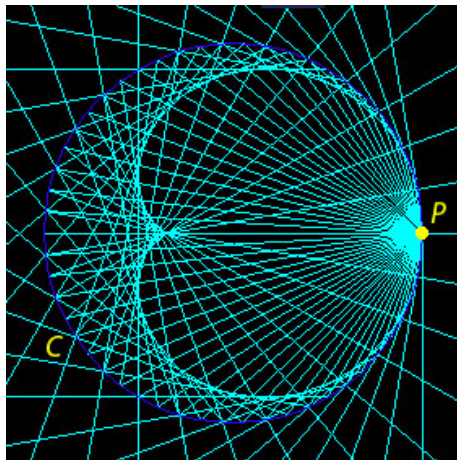
Zbiorem środka symetrii krzywej M ($\text{CSS}(M)$) nazywamy zbiór wszystkich punktów osobliwych rodziny zbiorów afinicznie równoodległych krzywej M .

Równoważnie:

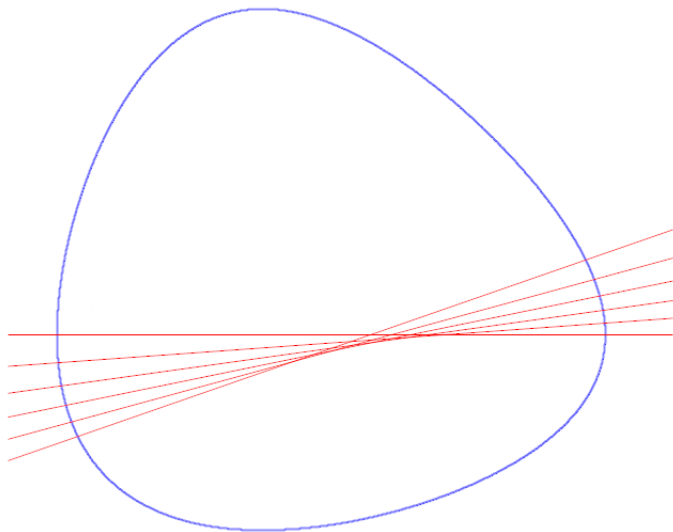
Definicja

Zbiór środka symetrii jest obwiednią cięciw afinicznych początkowej krzywej.

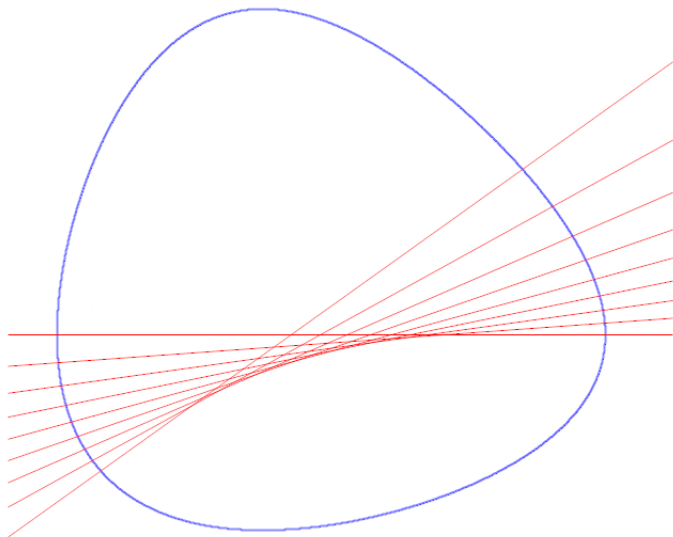




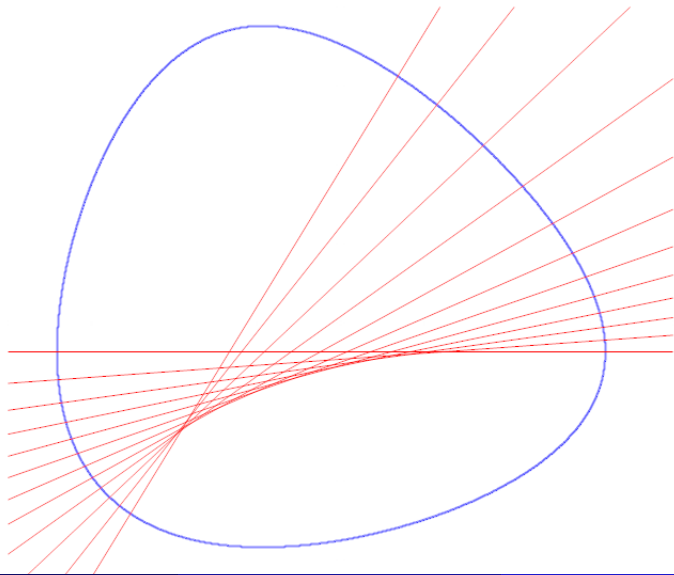
M , afiniczne cięciwy oraz $\text{CSS}(M)$



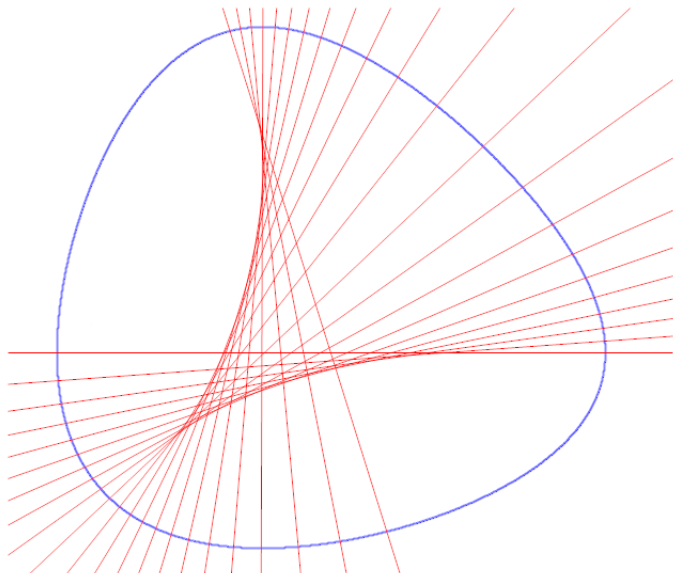
M , afiniczne cięciwy oraz $\text{CSS}(M)$



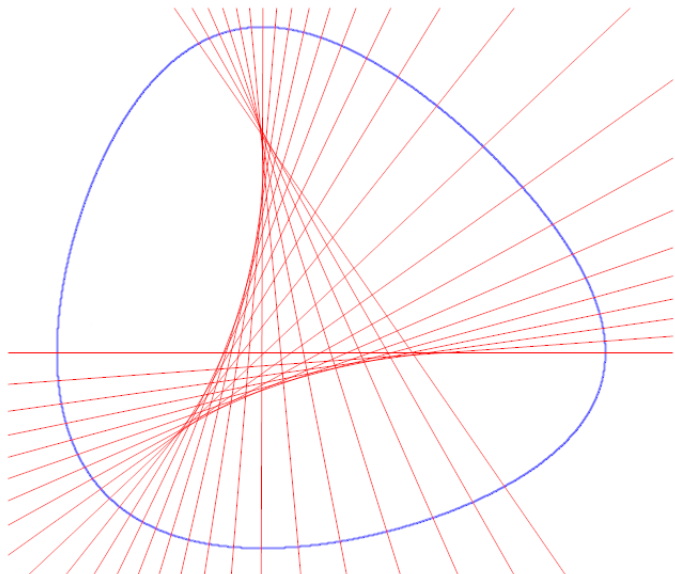
M , afiniczne cięciwy oraz $\text{CSS}(M)$



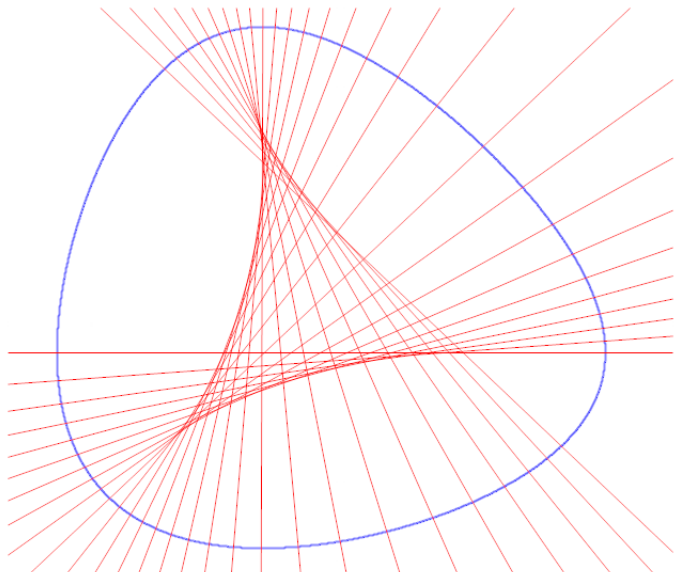
M , afiniczne cięciwy oraz $CSS(M)$



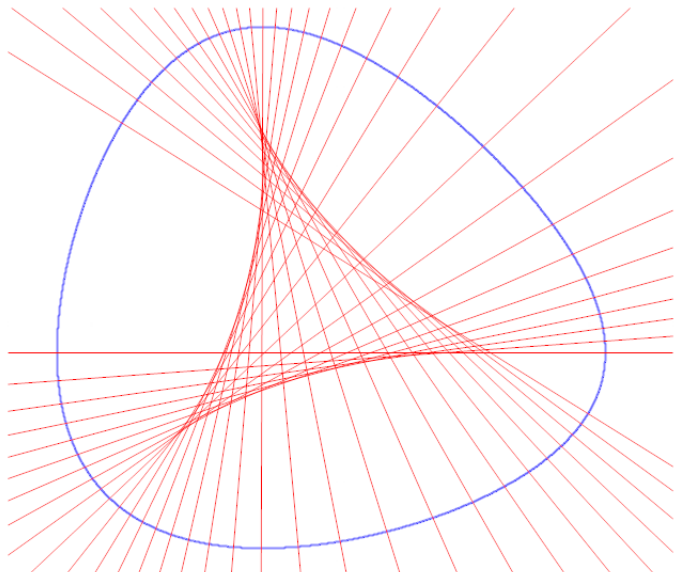
M , afiniczne cięciwy oraz $\text{CSS}(M)$



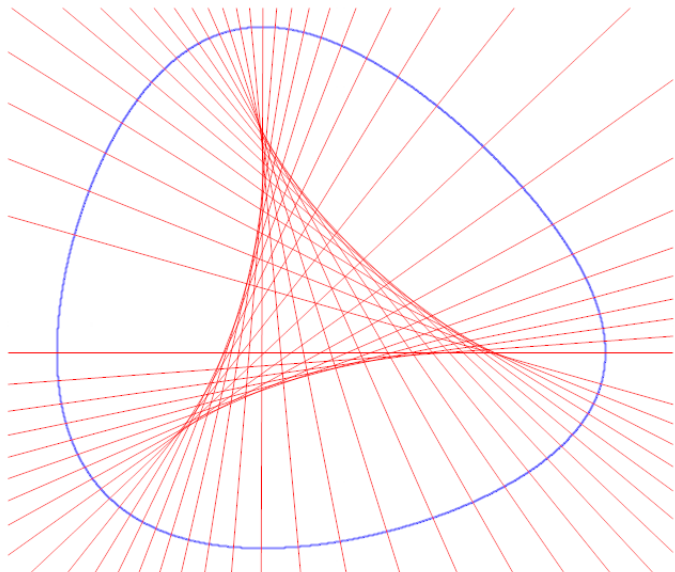
M , afiniczne cięciwy oraz $CSS(M)$



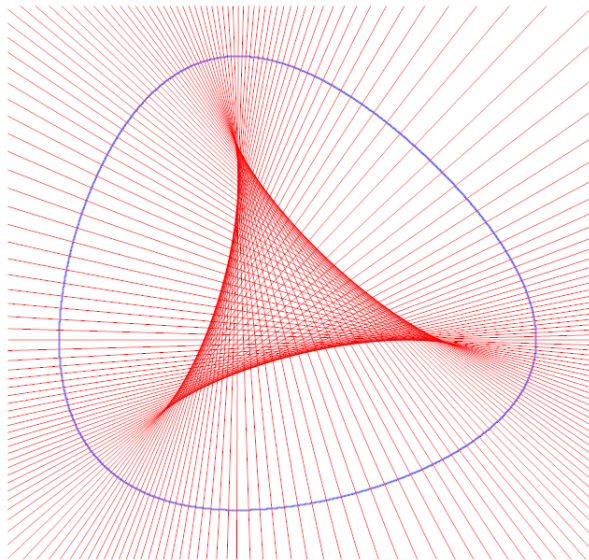
M , afiniczne cięciwy oraz $CSS(M)$



M , afiniczne cięciwy oraz $CSS(M)$



M , afiniczne cięciwy oraz $CSS(M)$



M , afiniczne cięciwy oraz $\text{CSS}(M)$

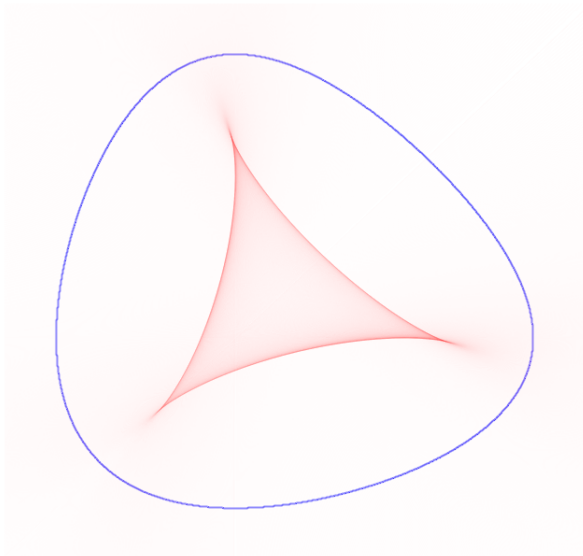
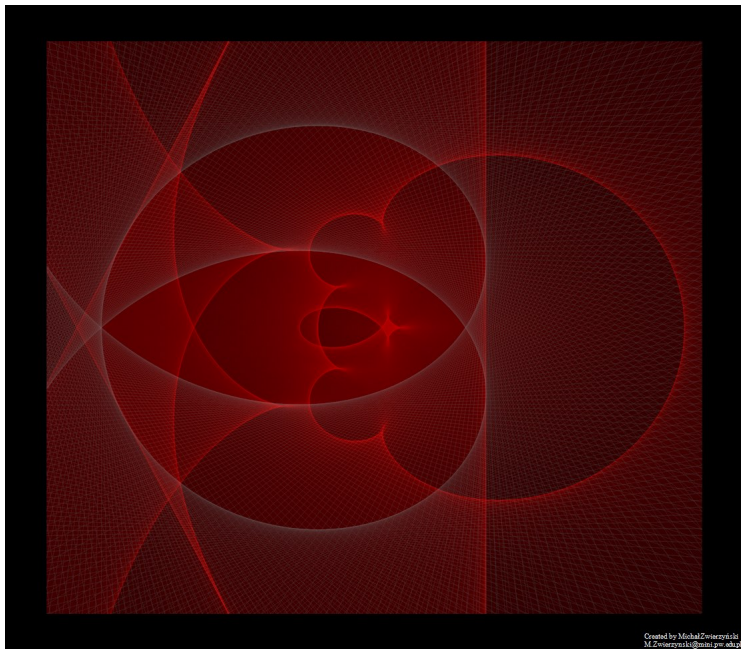
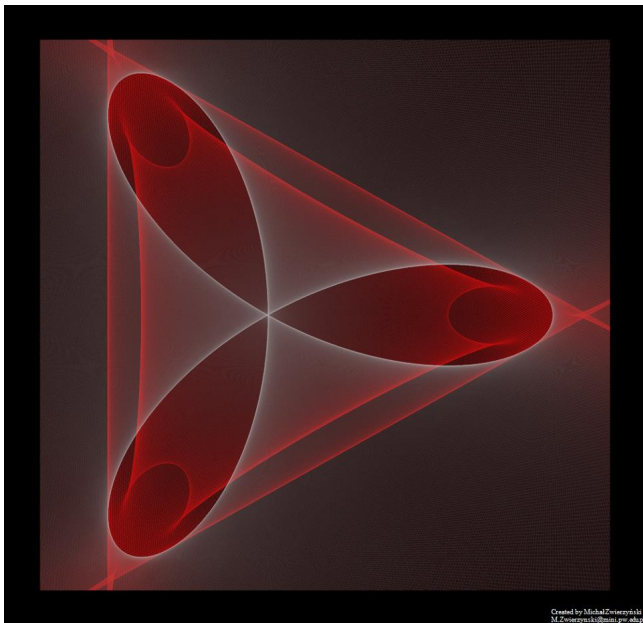


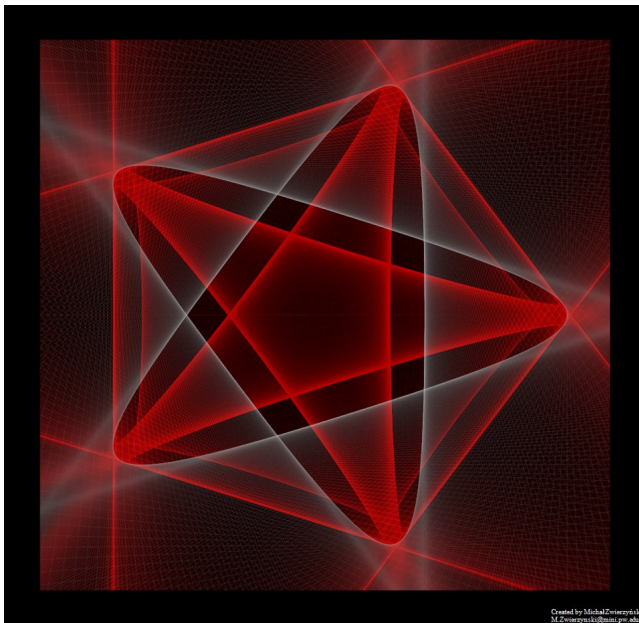
Table of Contents

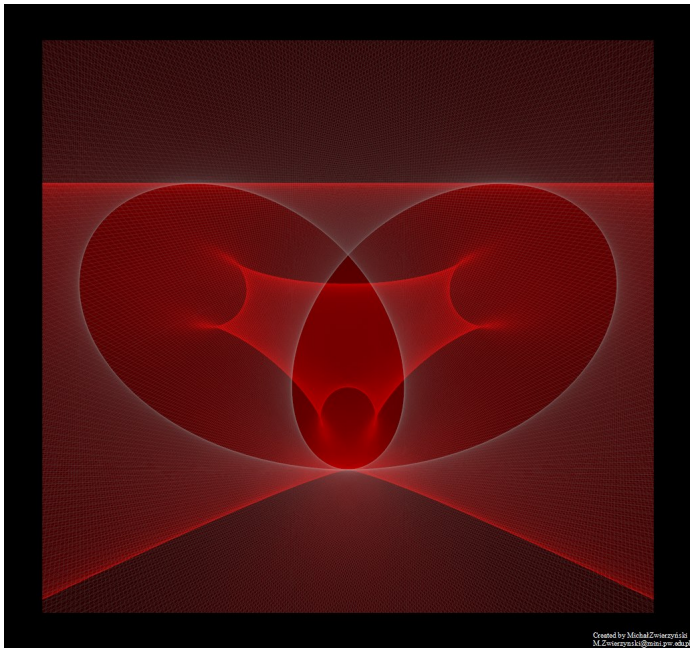
- 1 Równoległe trasy górskie
- 2 Skąd te góry?
- 3 Artystyczny punkt widzenia**
- 4 Kilka własności
- 5 Dekompozycja

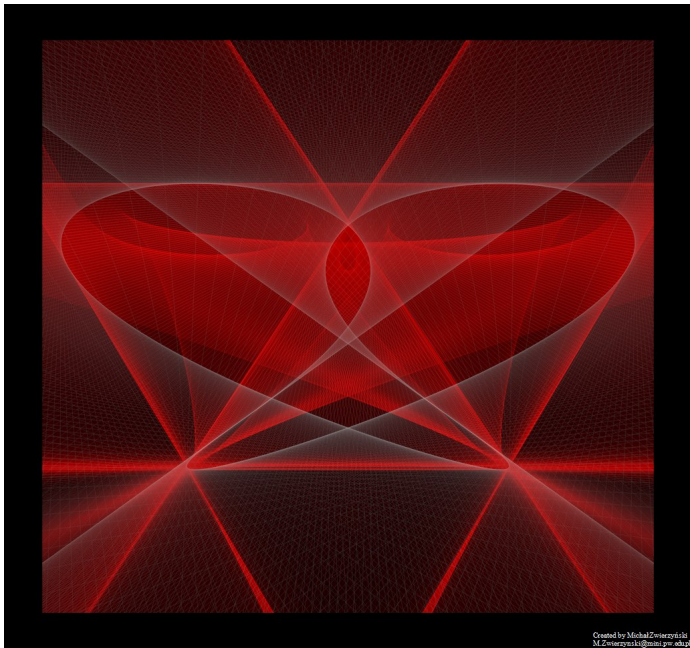


Created by Michał Zwierzyński
M.Zwierzyński@mini.pw.edu.pl

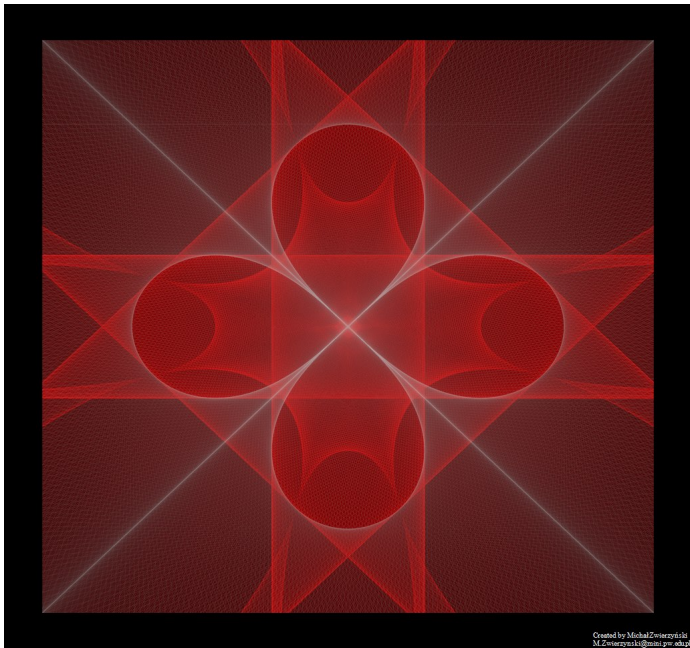




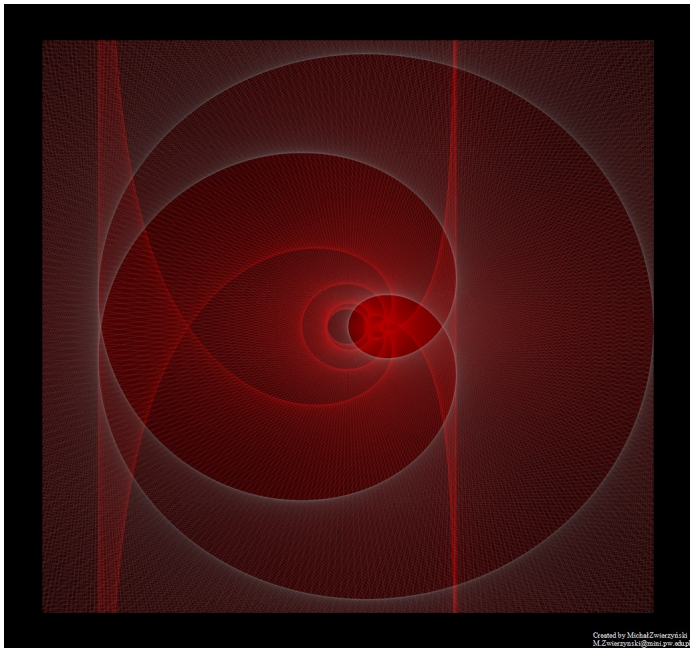




Created by Michał Zwierzyński
M.Zwierzyński@mini.pw.edu.pl



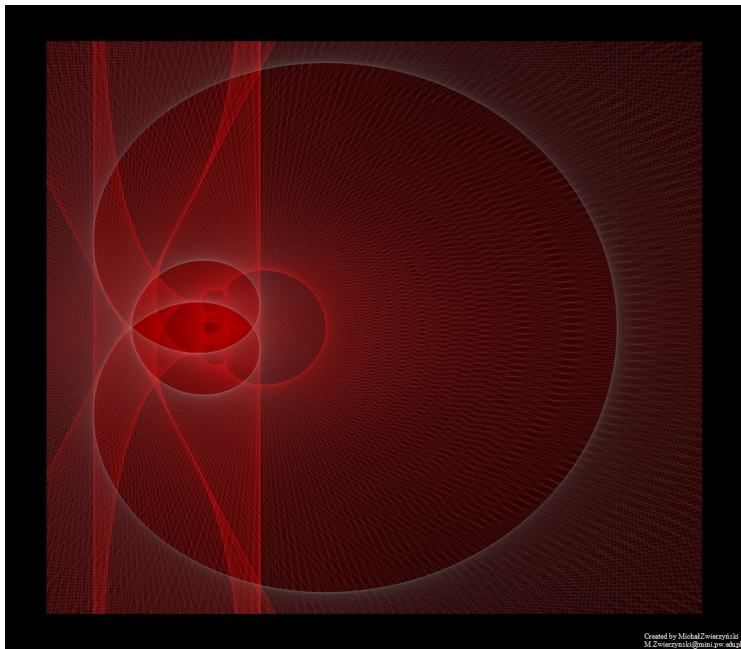
Created by Michał Zwierzyński
M.Zwierzyński@mini.pw.edu.pl



Created by Michał Zwieryński
M.Zwierynski@mini.pw.edu.pl



Created by Michał Zwieryński
M.Zwierynski@mim.pw.edu.pl



Created by Michał Zwierzyński
M.Zwierzyński@mini.pw.edu.pl

To były brzydkie rysunki

To były dopiero brzydkie rysunki...

To były brzydkie rysunki

To były dopiero brzydkie rysunki... w porównaniu do rysunków na plakacie przygotowanych wspólnie z Izą Danielewską oraz Dawidem Popławskim (rysunki jeszcze pomagała tworzyć Dominika Sterczewska).

To były brzydkie rysunki

To były dopiero brzydkie rysunki... w porównaniu do rysunków na plakacie przygotowanych wspólnie z Izą Danielewską oraz Dawidem Popławskim (rysunki jeszcze pomagała tworzyć Dominika Sterczewska). Zapraszamy na sesję plakatową!

Plan prezentacji

- 1 Równoległe trasy górskie
- 2 Skąd te góry?
- 3 Artystyczny punkt widzenia
- 4 Kilka własności**
- 5 Dekompozycja

Twierdzenie

W przestrzeni odwzorowań $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ (z topologią C^∞ Whitneya) istnieje generyczny (tj. będący przeliczalnym przecięciem zbiorów otwartych i gęstych) zbiór odwzorowań taki, że kaustyka Wignera (i analogicznie: pozostałe rozważane przez nas zbiory) tego odwzorowania jest gładkim odwzorowaniem z osobliwościami co najwyżej ostrze oraz jedynie z transversalnymi samoprzecięciami.

Twierdzenie

W przestrzeni odwzorowań $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ (z topologią C^∞ Whitneya) istnieje generyczny (tj. będący przeliczalnym przecięciem zbiorów otwartych i gęstych) zbiór odwzorowań taki, że kaustyka Wignera (i analogicznie: pozostałe rozważane przez nas zbiory) tego odwzorowania jest gładkim odwzorowaniem z osobliwościami co najwyżej ostrze oraz jedynie z transversalnymi samoprzecięciami.

Trochę przesadziłem z tym twierdzeniem :-) Ale bardziej po ludzku:

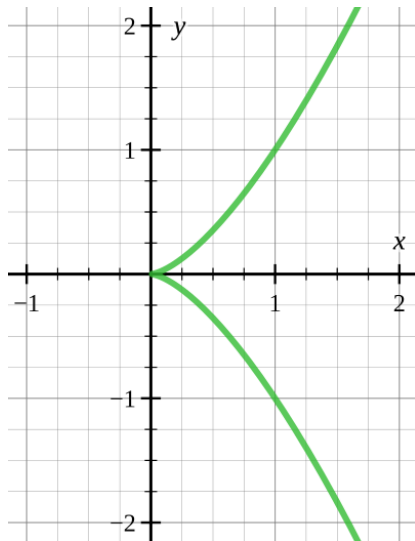
Twierdzenie

W przestrzeni odwzorowań $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ (z topologią C^∞ Whitneya) istnieje generyczny (tj. będący przeliczalnym przecięciem zbiorów otwartych i gęstych) zbiór odwzorowań taki, że kaustyka Wignera (i analogicznie: pozostałe rozważane przez nas zbiory) tego odwzorowania jest gładkim odwzorowaniem z osobliwościami co najwyżej ostrze oraz jedynie z transversalnymi samoprzecięciami.

Trochę przesadziłem z tym twierdzeniem :-). Ale bardziej po ludzku:

- Jakąkolwiek krzywą byśmy nie wybrali, to możemy tak trochę, troszeczkę, tę krzywą zaburzyć, że już dla tej nowej krzywej kaustyka jest „ładna”, tzn. ma osobliwości typu ostrze jedynie (czyli takie równoważne osobliwości przekształcenia $t \mapsto (t^2, t^3)$ w $t = 0$).

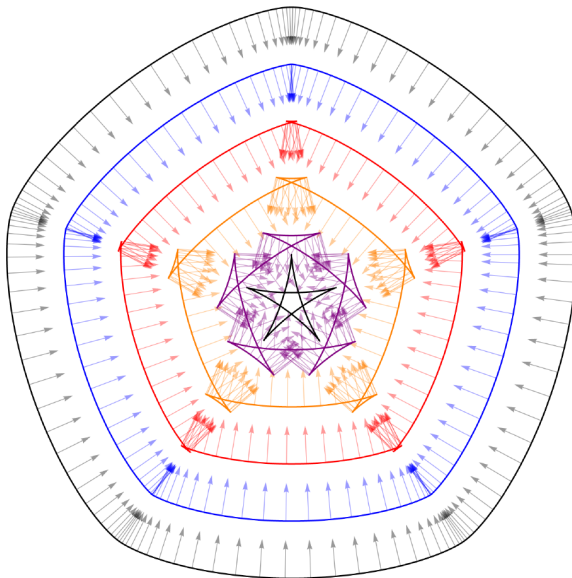
Wykres ostrza



Twierdzenie

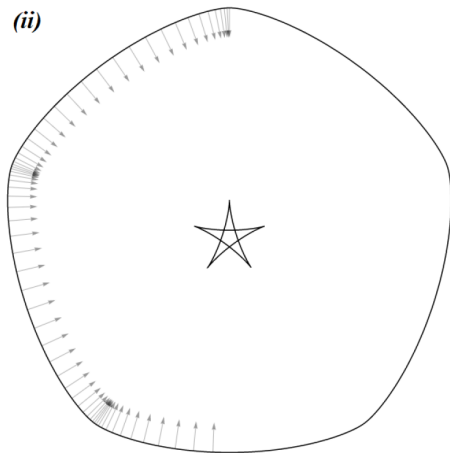
asd

Pole normalne

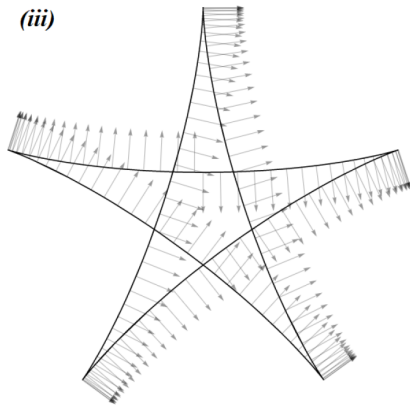


Pole normalne kaustyki Wignera

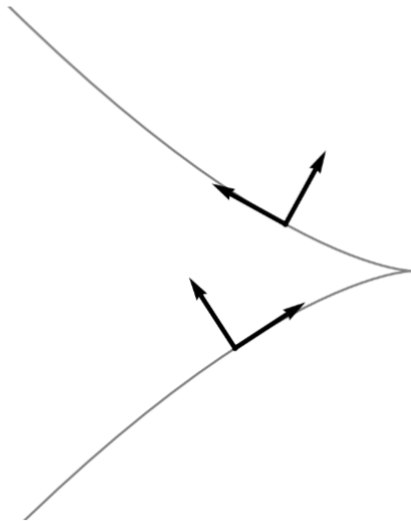
(ii)



(iii)

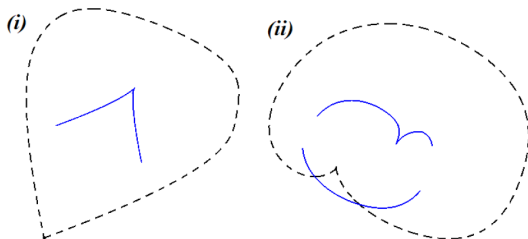


Zmiana orientacji przy przejściu



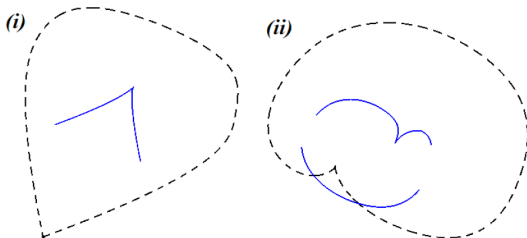
Definicja

Regularną krzywą $\gamma : (s_1, s_2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ bez samoprzebieć nazwiemy **pętlą**, jeśli ma nieznikającą krzywiznę oraz $\lim_{s \rightarrow s_1^+} \gamma(s) = \lim_{s \rightarrow s_2^-} \gamma(s)$.



Definicja

Regularną krzywą $\gamma : (s_1, s_2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ bez samoprzebieć nazwiemy **pętlą**, jeśli ma nieznikającą krzywiznę oraz $\lim_{s \rightarrow s_1^+} \gamma(s) = \lim_{s \rightarrow s_2^-} \gamma(s)$.



Twierdzenie

Kaustyka Wignera pętli jest osobliwa.

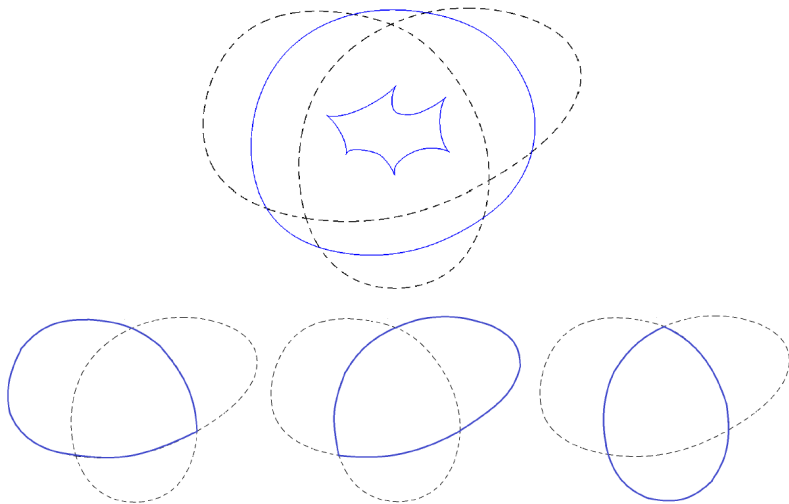
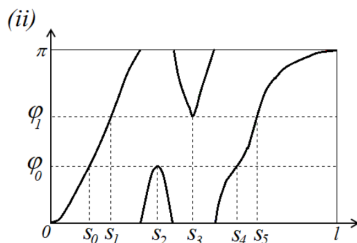
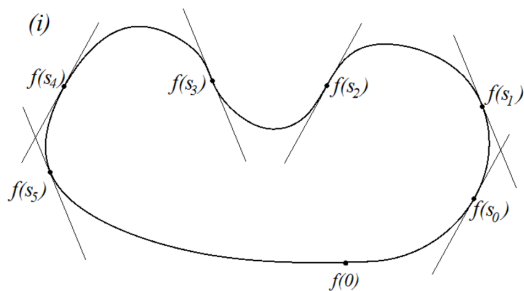


Table of Contents

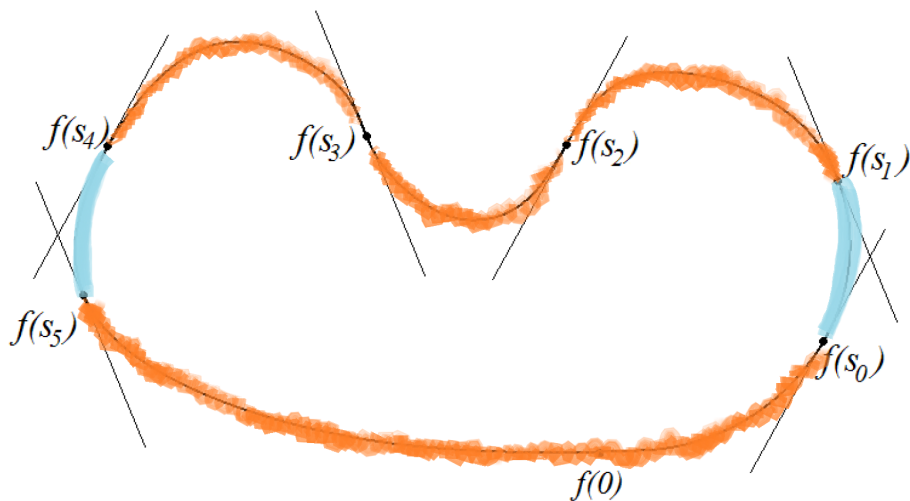
- 1 Równoległe trasy górskie
- 2 Skąd te góry?
- 3 Artystyczny punkt widzenia
- 4 Kilka własności
- 5 Dekompozycja

Dekompozycja

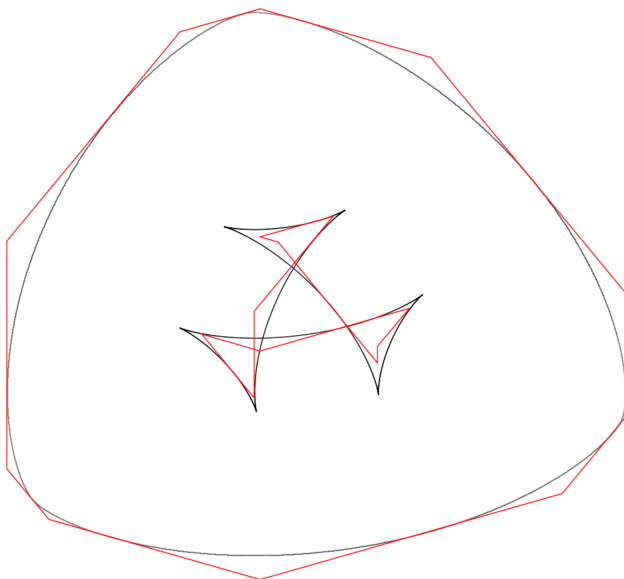


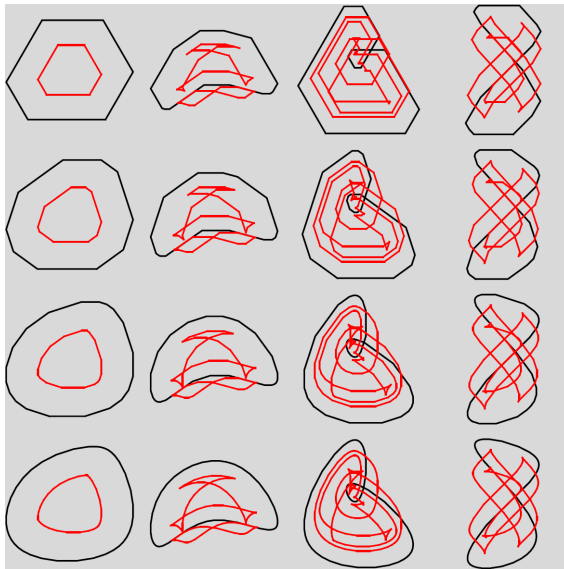
Po prawej narysowany jest wykres funkcji kąta, tzn. $\varphi(s)$ jest kątem między wektorami $f'(0)$ oraz $f'(s)$ modulo π .

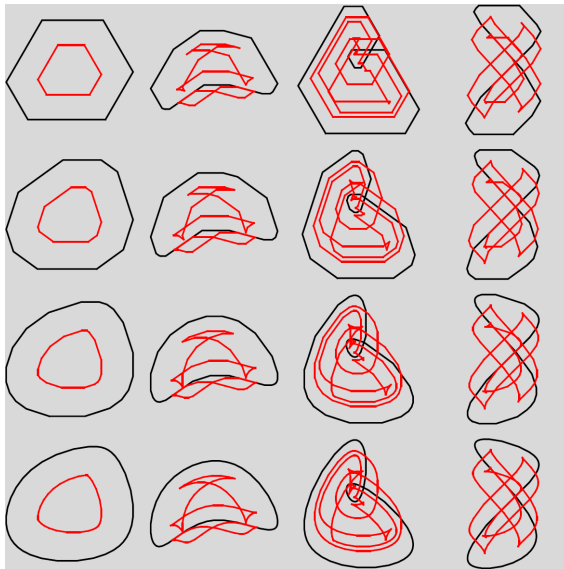
Dekompozycja



Wielokąty z przeciwległymi bokami równoległymi







I tutaj też mała reklama plakatu Wiktora Buckiego, Izabellę Konicer oraz Tomasza Wieczorka związanego z tymi zbiorami.

Matematyczna eskapada

68. Szkoła Matematyki Poglądowej 2025

Michał Zwierzyński

Politechnika Warszawska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

22.08.2025 r.