

Ciągi kappa – odkrycie, czy $\text{klap}(p)$ a?

Łukasz Dawidowski

68. Szkoła Matematyki Poglądowej

Zadanie 25, obóz OM Zwardoń 1998

25. Definiujemy rekurencyjnie ciąg liczb całkowitych nieujemnych $a_0, a_1, a_2, \dots$ w następujący sposób: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz

$$a_{2n} = 3a_n, \quad a_{2n+1} = 3a_n + 1 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

(a) Scharakteryzować wszystkie nieujemne liczby całkowite n , dla których istnieje dokładnie jedna para (k, l) liczb całkowitych nieujemnych spełniająca warunki

$$k \geq l \quad \text{oraz} \quad a_k + a_l = n. \quad (\clubsuit\clubsuit)$$

(b) Dla każdego n , niech $f(n)$ będzie liczbą par (k, l) spełniających $(\clubsuit\clubsuit)$. Znaleźć

$$\max_{n < 3^{1998}} f(n).$$

Zadanie 25, obóz OM Zwardoń 1998

25. Można wykazać indukcyjnie, że ciąg (a_n) może być opisany następująco: Zapisujemy liczbę n w układzie dwójkowym, a następnie interpretujemy ten zapis w układzie trójkowym, na przykład $13 = 1101_{(2)}$, więc $a_{13} = 1101_{(3)} = 37$. Tak więc w ciągu (a_n) wystąpią te, i tylko te liczby całkowite nieujemne, które zapisują się w układzie trójkowym przy pomocy samych zer i jedynek. Dodawanie dwóch takich liczb w układzie trójkowym odbywa się bez "przenoszenia", jeśli więc m -ta cyfra od końca rozwinięcia trójkowego liczby $a_k + a_l$ jest równa 0, to m -te cyfry od końca liczb a_k i a_l są równe 0. Podobnie, jeśli cyfra sumy jest równa 2, to odpowiadające jej cyfry składników są równe 1. Wreszcie, tam gdzie w sumie występuje cyfra 1, składniki muszą mieć cyfry 0 i 1.

Zadanie 25, obóz OM Zwardoń 1998

Widzimy więc, że rozkładanie liczby n zapisanej w układzie trójkowym na sumę $a_k + a_l$ polega na rozłożeniu każdej z cyfr liczby n na sumę dwóch liczb równych 0 lub 1. Taki rozkład jest jednoznaczny w przypadku cyfr 0 i 2, ale wszędzie tam, gdzie w rozwinięciu trójkowym liczby n napotkamy jedynekę mamy dwie możliwości: $0 + 1$ i $1 + 0$.

Tak więc możliwych rozkładów liczby n na sumę $a_k + a_l$ jest $2^{j(n)}$, gdzie $j(n)$ jest liczbą jedynek występującym w trójkowym zapisie liczby n . Po dołożeniu warunku $k \geq l$ liczba rozkładów zmniejsza się o połowę, za wyjątkiem przypadku $j(n) = 0$, gdyż wtedy $k = l$.

Zadanie 25, obóz OM Zwardoń 1998

Tak więc możliwych rozkładów liczby n na sumę $a_k + a_l$ jest $2^{j(n)}$, gdzie $j(n)$ jest liczbą jedynek występującym w trójkowym zapisie liczby n . Po dołożeniu warunku $k \geq l$ liczba rozkładów zmniejsza się o połowę, za wyjątkiem przypadku $j(n) = 0$, gdyż wtedy $k = l$.

Ostatecznie

$$f(n) = \begin{cases} 2^{j(n)-1} & \text{gdy } j(n) \geq 1 \\ 1 & \text{gdy } j(n) = 0 \end{cases}.$$

Tak więc odpowiedź brzmi:

- (a) dla takich n , które w zapisie trójkowym mają co najwyżej jedną cyfrę 1,
- (b) 2^{1997} — dla $n = \frac{3^{1998}-1}{2}$.

Ciągi $\varkappa$ - odkrycie czy klapa?

1.1 Idea ciągów $\varkappa$, czyli „pisz w jednym, czytaj w drugim”

$$\begin{aligned} X_1 X_2 \dots X_{n(a)} &\longmapsto X_1 X_2 \dots X_{n(b)} \\ \varkappa_{X_1 X_2 \dots X_{n(a)}}^{a,b} &= X_1 X_2 \dots X_{n(b)} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Gdzie $X_1, X_2, \dots, X_n$ to kolejne cyfry zapisu liczby w danym systemie liczbowym, a $X_1 X_2 \dots X_{n(a)}$ oznacza, że liczba ta zapisana jest w systemie pozycyjnym o podstawie $a > 1$.

Intuicyjne rozumienie ciągów $\varkappa$ stanowiące jednocześnie ich istotę i pierwowzór wyrazimy podając przepis na obliczenie kolejnych wyrazów ciągu $\varkappa^{a,b}$.

1. Wypisujemy kolejne liczby naturalne w systemie pozycyjnym o podstawie a .
2. Odczytujemy zapis wypisanych liczb tak, jakby były zapisane w systemie pozycyjnym o podstawie b . Są to kolejne wyrazy ciągu.

Aby uniknąć nieścisłości, od początku ustalmy, że ciąg kappa będę oznaczał jako

$$\varkappa^{a,b}$$

1.2 Uogólnienie

Gdy zdefiniujemy ciąg kappa przy pomocy zapisu formalnego, możemy pozbyć się założenia $a \leq b$. Jest to podejście ogólniejsze.

$$\kappa_n^{a,b} = \sum_{i=0}^k g(i) \cdot b^i \quad (1.2)$$

gdzie

$$\sum_{i=0}^k g(i) \cdot a^i = n \quad \wedge \quad \bigwedge_{i \in \mathbb{N}} g(i) \in \{0, 1, 2, \dots, a-1\}$$

Ciąg $\kappa^{13,2}$

Gdy $a > b$ musimy odwołać się do wzoru (1.2). Przykładowo:

$$13 = 1 \cdot 11^1 + 2 \cdot 11^0 \text{ oraz } 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^0 = 4$$

$$\text{Zatem } \kappa_{13}^{11,2} = 4$$

1.3 Wzór rekurencyjny

Równoważnie ciągu $\varkappa$ można zdefiniować za pomocą rekurencyjnego wzoru.

$$\begin{cases} \varkappa_0^{a,b} &= 0 \\ \varkappa_n^{a,b} &= b \cdot \varkappa_{\frac{n}{a}}^{a,b} \quad \text{gdy } n \equiv 0(\text{mod } a) \\ \varkappa_n^{a,b} &= \varkappa_{n-1}^{a,b} + 1 \quad \text{gdy } n \not\equiv 0(\text{mod } a) \end{cases}$$

The OEIS is supported by [the many generous donors to the OEIS Foundation](#).

0 1 3 6 2 7
: :
23 10 22 11 21
OEIS THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA
OF INTEGER SEQUENCES[®]

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

XXIX Ogólnopolski Sejmik Matematyków 2012

Search: **a203580**

Displaying 1-1 of 1 result found.

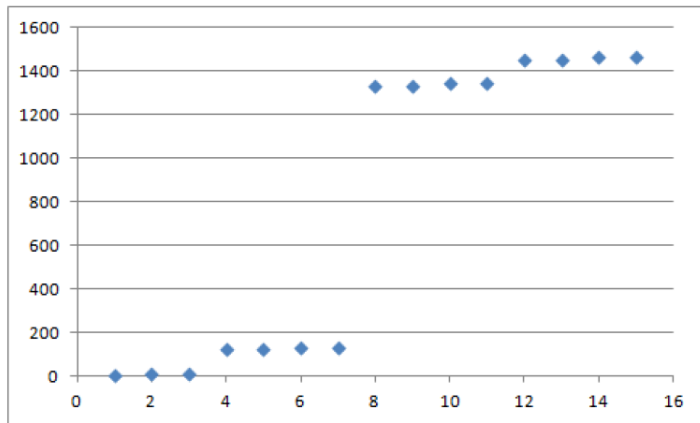
page 1

Sort: [relevance](#) | [references](#) | [number](#) | [modified](#) | [created](#) Format: [long](#) | [short](#) | [data](#)

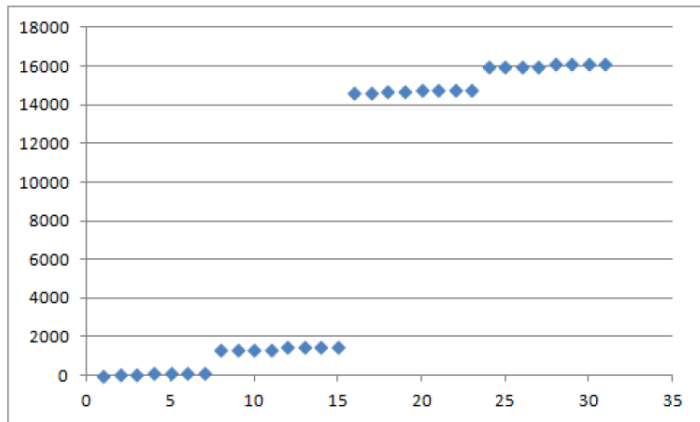
A203580	$a(n) = \text{Sum}\{d(i) \cdot 2^i : i=0,1,\dots,m\}, \text{ where } \text{Sum}\{d(i) \cdot 7^i : i=0,1,\dots,m\} = n, d(i) \in \{0,1,\dots,6\}.$ +40 1 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 10, 11, 12, 13, 14 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)
OFFSET	0,3
COMMENTS	Change-of-base sequence 7->2.
LINKS	Clark Kimberling, Table of n, a(n) for n = 0..1000
FORMULA	$a(0)=0$, $a(n)=2 \cdot a(n/7)$ if $n \equiv 0 \pmod{7}$, $a(n)=a(n-1)+1$ otherwise.
MATHEMATICA	<code>t = Table[FromDigits[RealDigits[n, 7], 2], {n, 0, 100}] (* Clark Kimberling, Aug 03 2012 *)</code>
CROSSREFS	Cf. A033044 .
KEYWORD	nonn,base
AUTHOR	Karol Bacik , Jan 03 2012
STATUS	approved

page 1

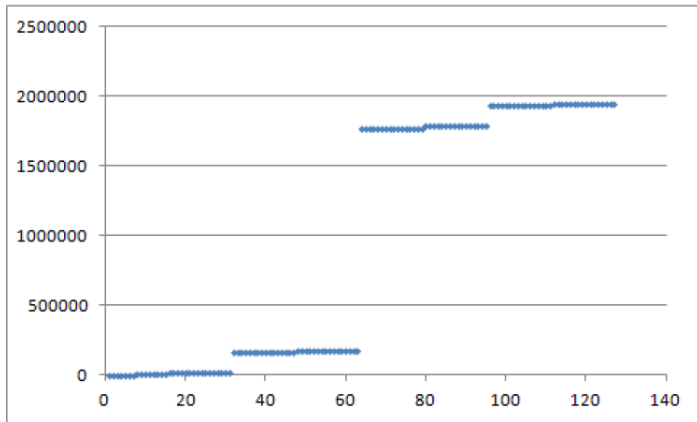
Twierdzenie 3. Ciąg $x^{a,b}$ jest funkcją różnowartościową wtedy i tylko wtedy, gdy $a \leq b$.



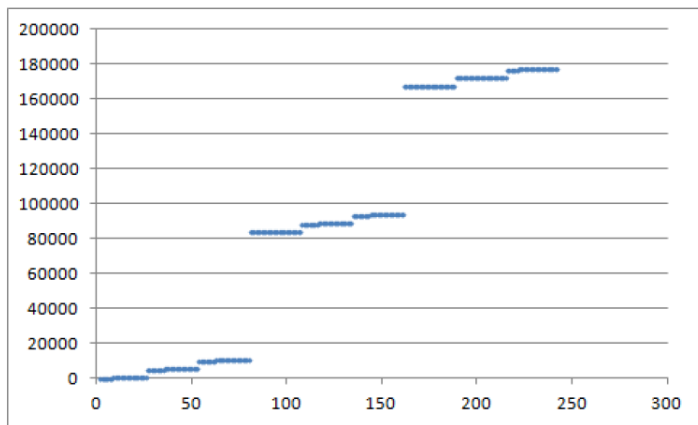
Rysunek 3.1: Wykres ciągu $a_n^{2,11}$



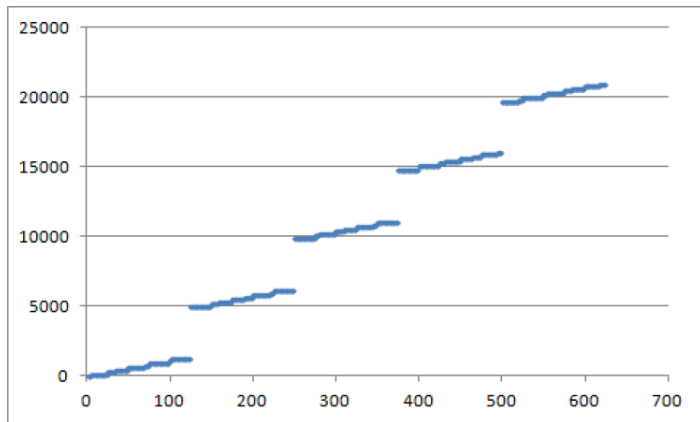
Rysunek 3.2: Wykres ciągu $x^{2,11}$



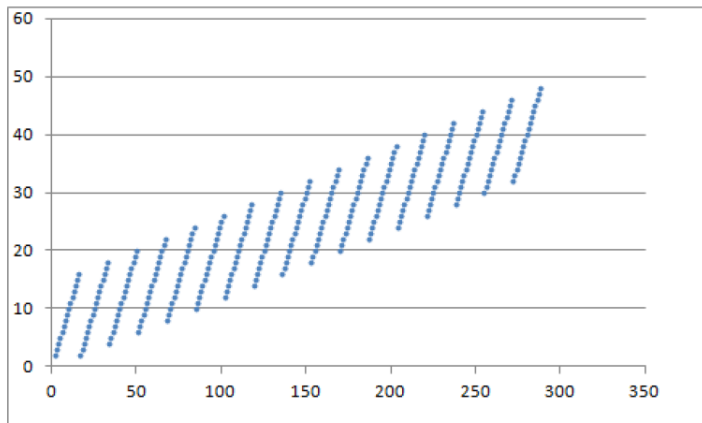
Rysunek 3.3: Wykres ciągu $a_n^{2,11}$



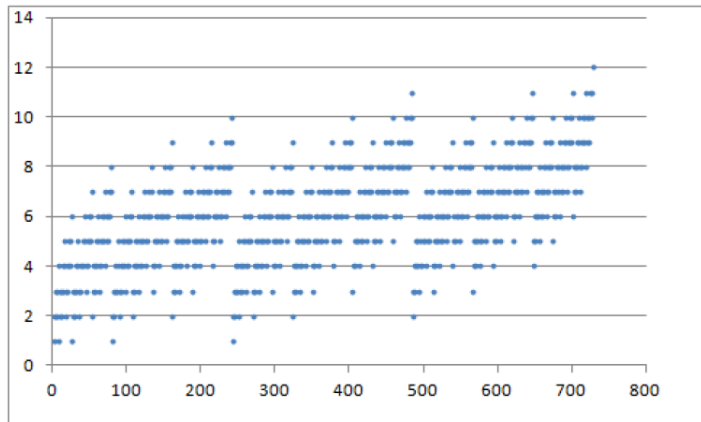
Rysunek 3.5: Wykres ciągu $z^{3,17}$



Rysunek 3.6: Wykres ciągu $x^{5,17}$



Rysunek 3.12: Wykres ciągu $\varkappa^{17,2}$

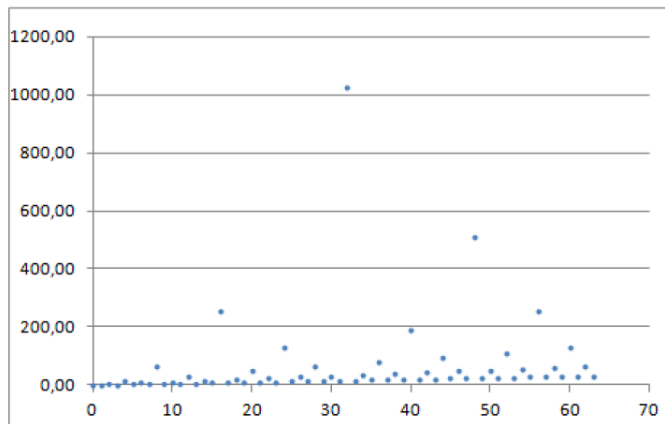


Rysunek 3.14: Wykres ciągu $x^{3,1}$

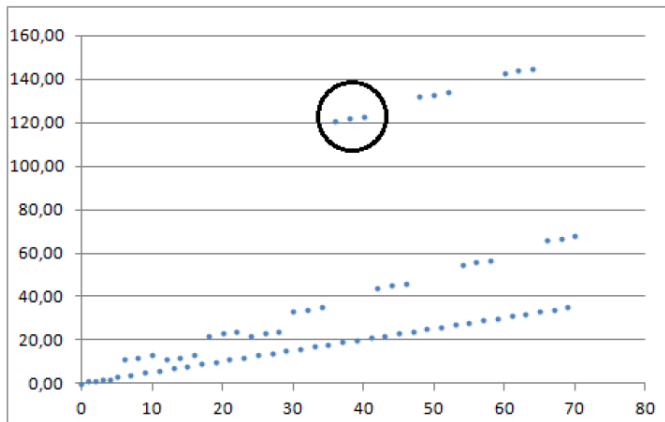
$$a, c \in \mathbb{Z}_+$$

$$b, d \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \varkappa_0^{a,b,c,d} = 0 \\ \varkappa_n^{a,b,c,d} = b \cdot \varkappa_{\frac{n}{a}}^{a,b} & \text{gdy } n \equiv 0(\text{mod } a) \\ \varkappa_n^{a,b,c,d} = \varkappa_{n-c}^{a,b} + d & \text{gdy } n \not\equiv 0(\text{mod } a) \quad i \quad n \geq c \\ \varkappa_n^{a,b,c,d} = 1 & \text{gdy } n \not\equiv 0(\text{mod } a) \quad i \quad n < c \end{cases}$$



Rysunek 4.5: Wykres ciągu $2, 4, 2, 1$ - funkcja „Trójkąt Sierpińskiego”?



Rysunek 4.7: Wykres ciągu $x^{6,11,2,1}$ - wynik dzielenia $6/2$ zaznaczony w kółku

Funkcja $\varkappa$

Dowolny ciąg $\varkappa$, jak każdy ciąg jest funkcją, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych. Funkcja $\varkappa$ jest rozszerzeniem ciągu $\varkappa$ na cały zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych. Funkcję $\varkappa$ zdefiniujemy poprzez analogię do ciągów, w których $c = d = 1$. Wykorzystać możemy tutaj definicję 1.2.

Dla liczb $x \geq 0$

$$\varkappa^{a,b}(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} g(i) \cdot b^i \quad (5.1)$$

gdzie

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} g(i) \cdot a^i = n \quad \wedge \quad \bigwedge_{i \in \mathbb{Z}} g(i) \in \{0, 1, 2, \dots, a-1\} \quad \wedge \quad \bigwedge_{i_0} \bigvee_{i < i_0} g(i) \neq a-1$$

Karol Bacik



C.L.E. Moore Instructor of Mathematics

✉ bacik@mit.edu

Office: 2-350B

Research

Fluid Dynamics, Complex Systems

Physical Applied Mathematics