

# Rzeczy, które naprawdę chciałbym wiedzieć



**Jarosław Grytczuk**

Politechnika Warszawska

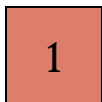
# Rzeczy, które chciałbym wiedzieć

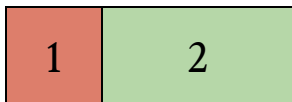


**Jarosław Grytczuk**

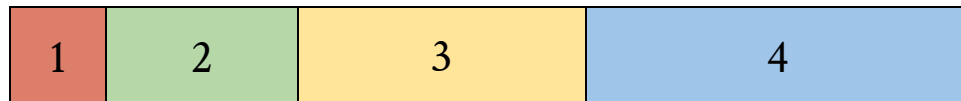
Politechnika Warszawska

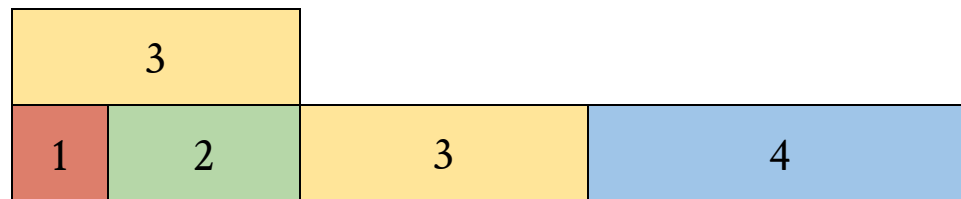
**Barykady**

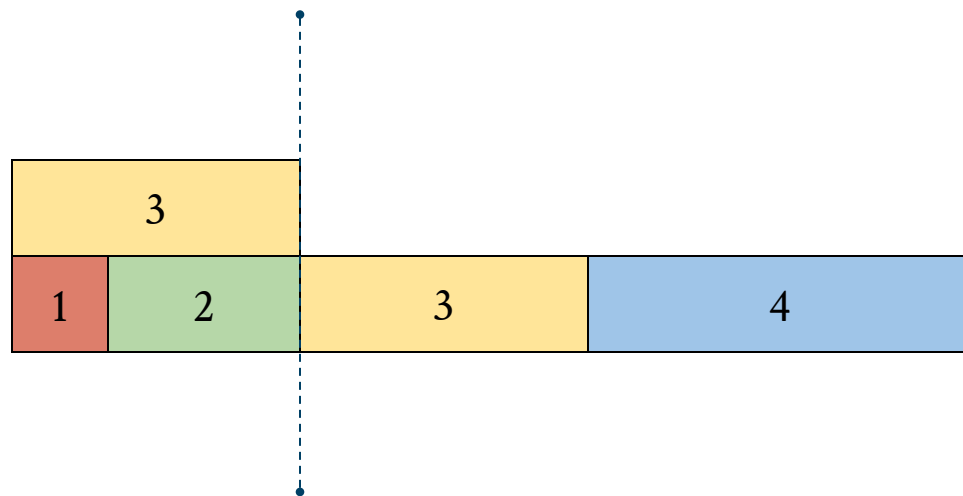


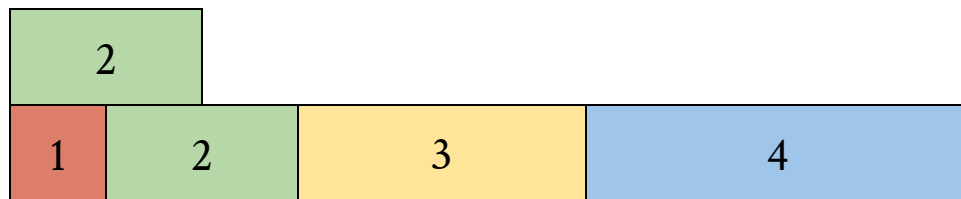


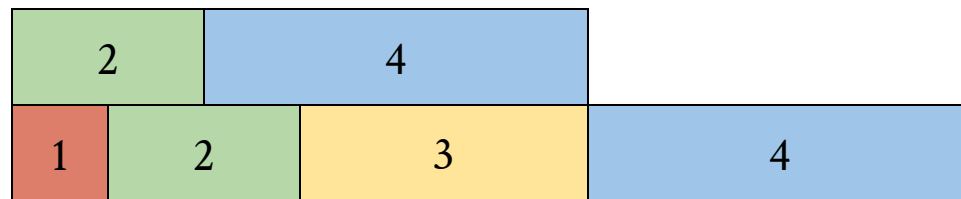


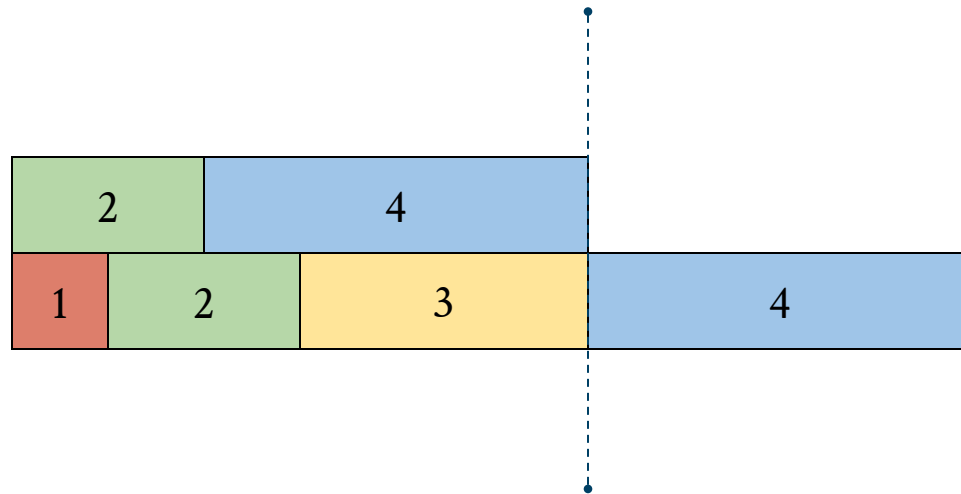


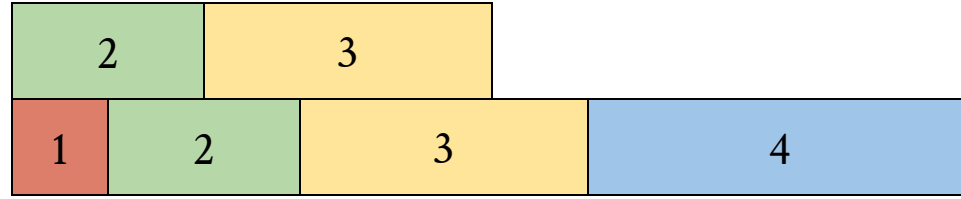


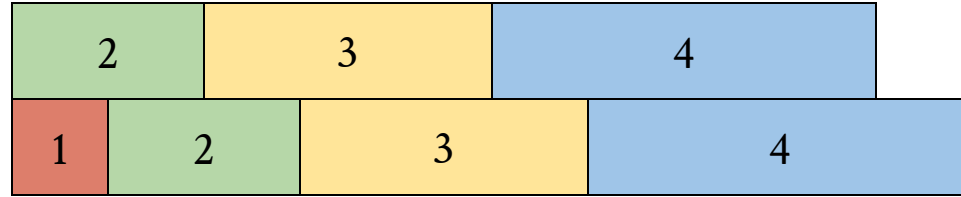




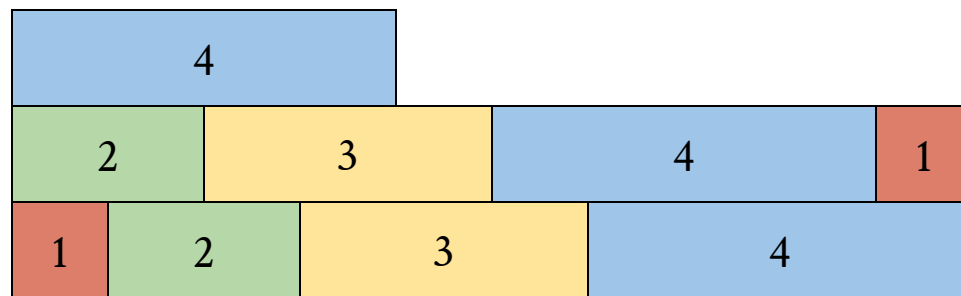


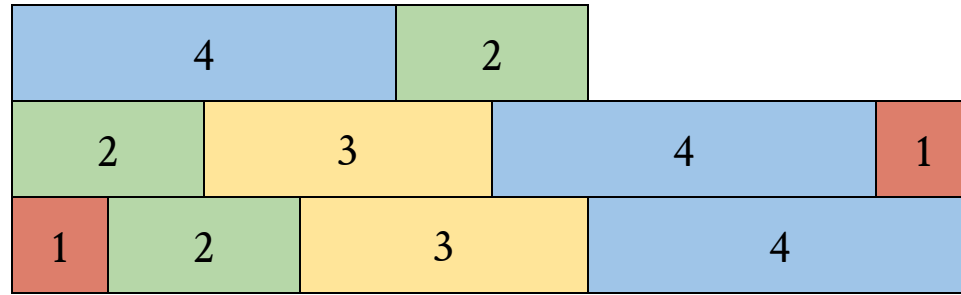


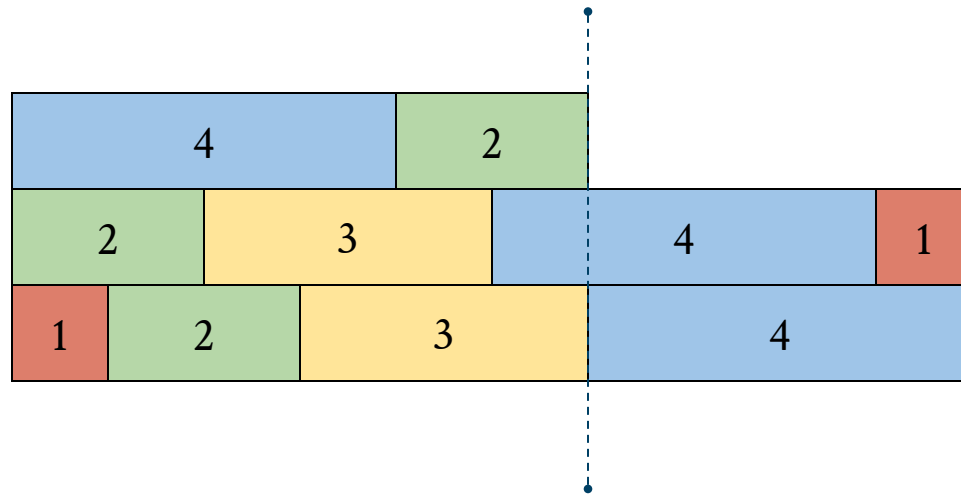


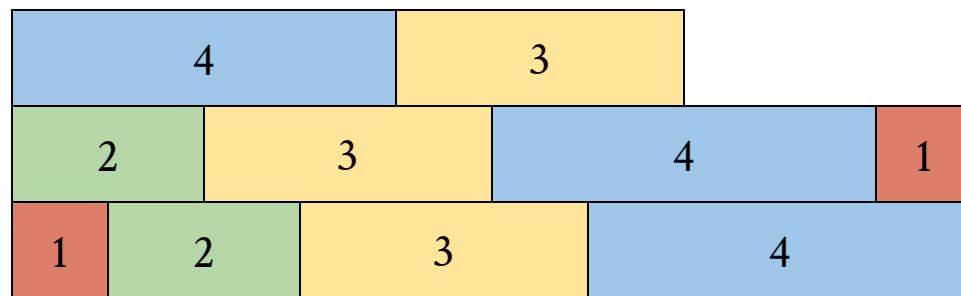


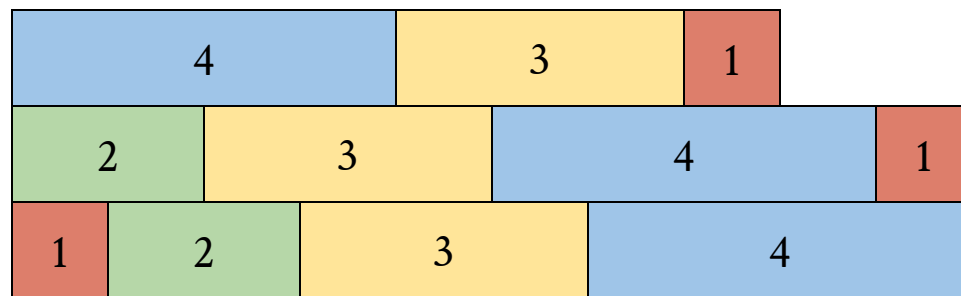
|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |





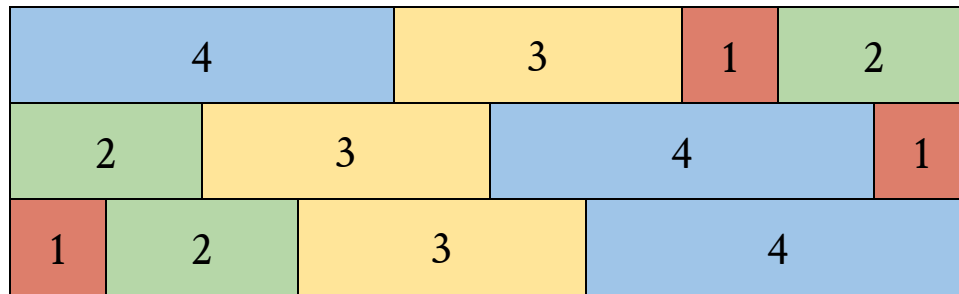




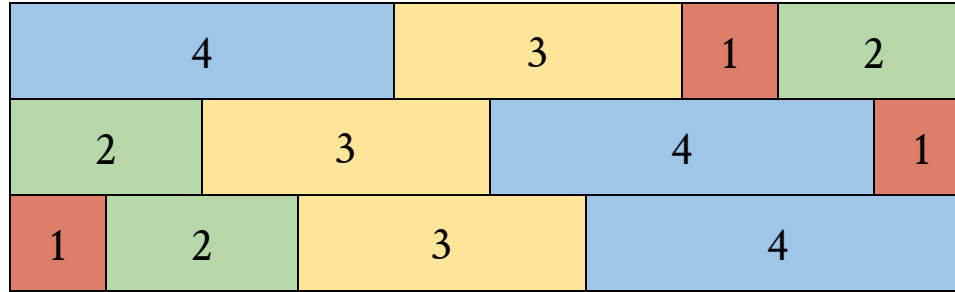


|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

$$B(4) = 3$$

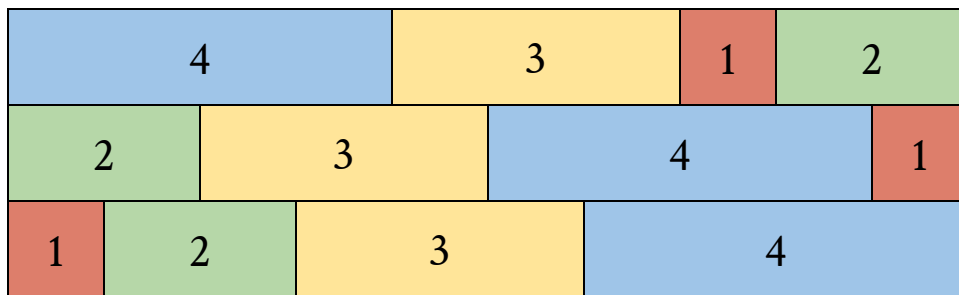


$$B(4) = 3$$



$B(n)$  = maksymalna wysokość barykady rzędu  $n$

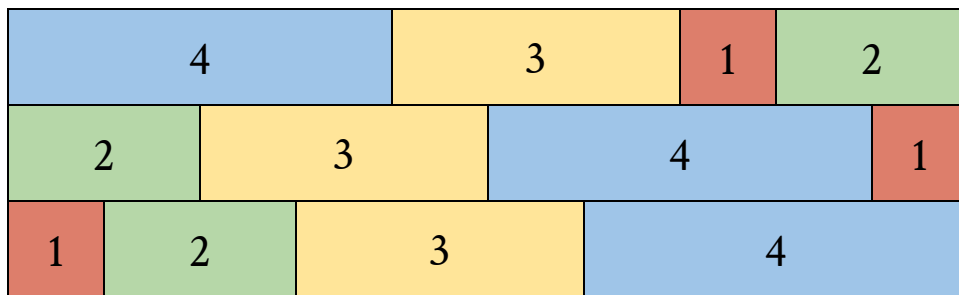
$$B(4) = 3$$



$B(n)$  = maksymalna wysokość barykady *rzędu*  $n$

$$B(n) \times (n - 1) \leq 2 + 3 + \dots + n$$

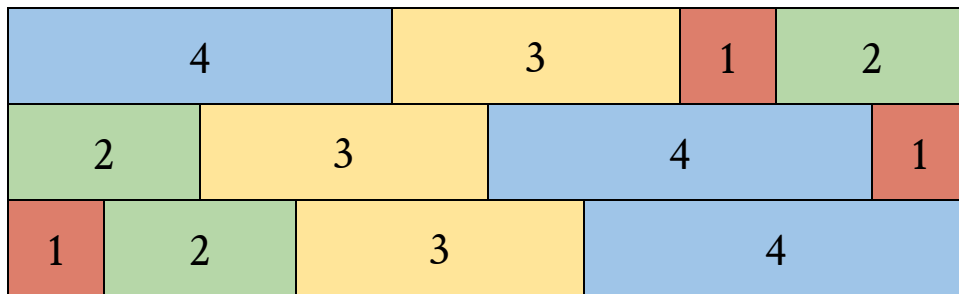
$$B(4) = 3$$



$B(n)$  = maksymalna wysokość barykady *rzędu*  $n$

$$B(n) \times (n - 1) \leq 2 + 3 + \dots + n \quad \Rightarrow \quad B(n) \leq n/2 + 1$$

$$B(4) = 3$$

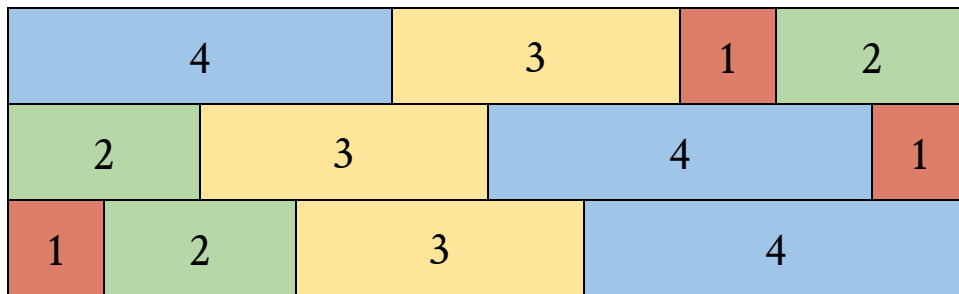


$B(n)$  = maksymalna wysokość barykady rzędu  $n$

$$B(n) \times (n - 1) \leq 2 + 3 + \dots + n \quad \Rightarrow \quad B(n) \leq n/2 + 1$$

**Hipoteza:** Dla każdego  $n = 2k$  (lub  $2k + 1$ ) zachodzi równość  $B(n) = k + 1$ .

$$B(4) = 3$$



$B(n)$  = maksymalna wysokość barykady rzędu  $n$

$$B(n) \times (n - 1) \leq 2 + 3 + \dots + n \quad \Rightarrow \quad B(n) \leq n/2 + 1$$

**Hipoteza:** Dla każdego  $n = 2k$  (lub  $2k + 1$ ) zachodzi równość  $B(n) = k + 1$ .

**Twierdzenie** (Dębski, Grytczuk, Pawlik, Przybyło, Śleszyńska-Nowak, 2024):

Dla każdego  $n$  zachodzi nierówność  $B(n) \geq n/50$ .

## Things I'd Like to Know

Richard K. Guy

Department of Mathematics & Statistics, The University of Calgary

Alberta Number Theory Days, 2016 April 17

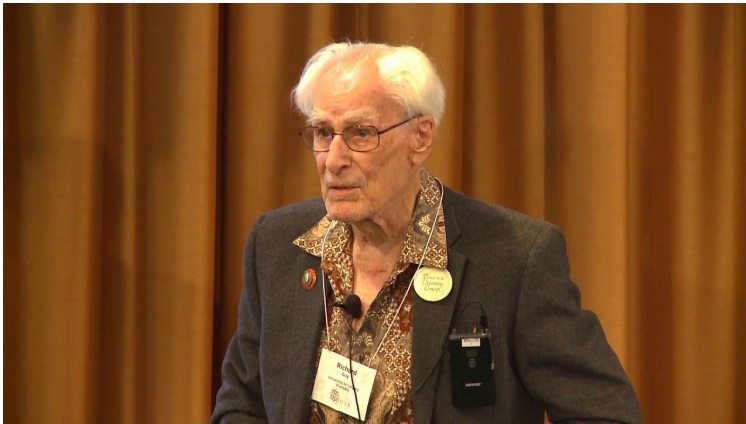


## Things I'd Like to Know

Richard K. Guy

Department of Mathematics & Statistics, The University of Calgary

Alberta Number Theory Days, 2016 April 17



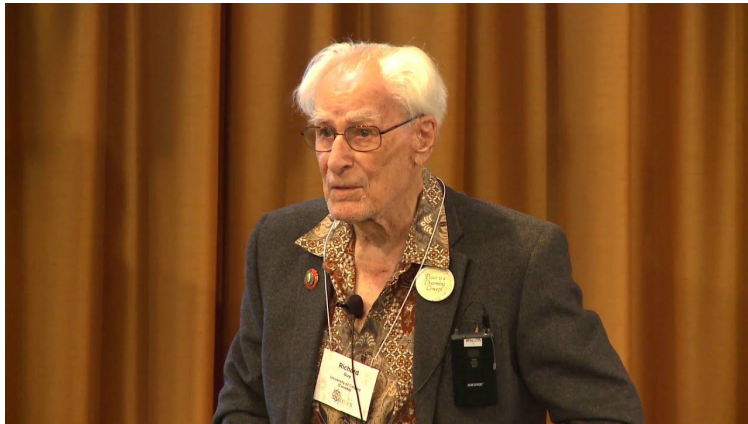
**Richard K. Guy (1916 - 2020)**

## Things I'd Like to Know

Richard K. Guy

Department of Mathematics & Statistics, The University of Calgary

Alberta Number Theory Days, 2016 April 17

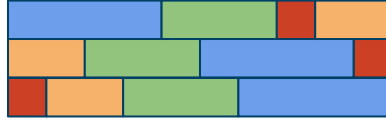


**Richard K. Guy (1916 - 2020)**

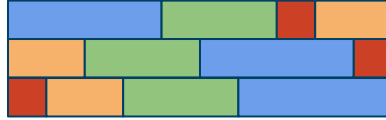


**Barry Cipra**

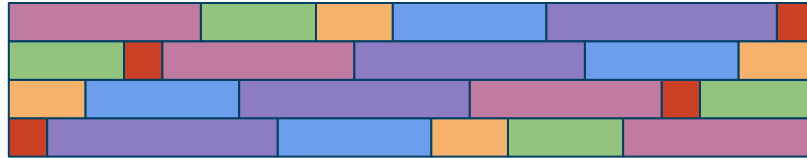
4



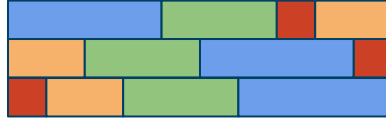
4



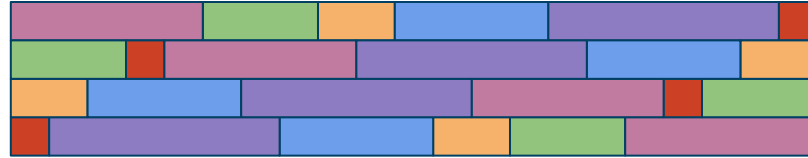
1120



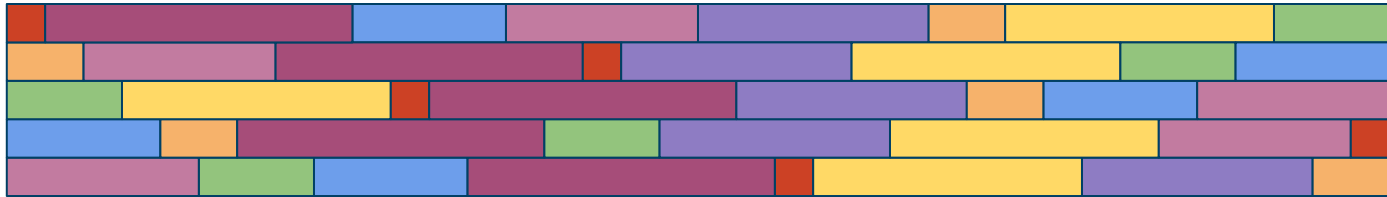
4



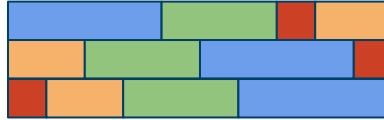
1120



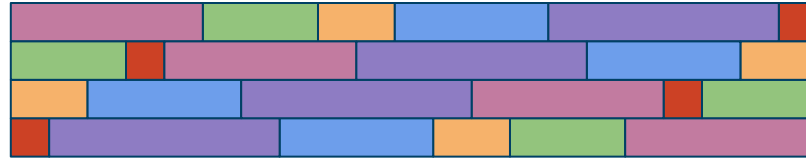
28 432 700



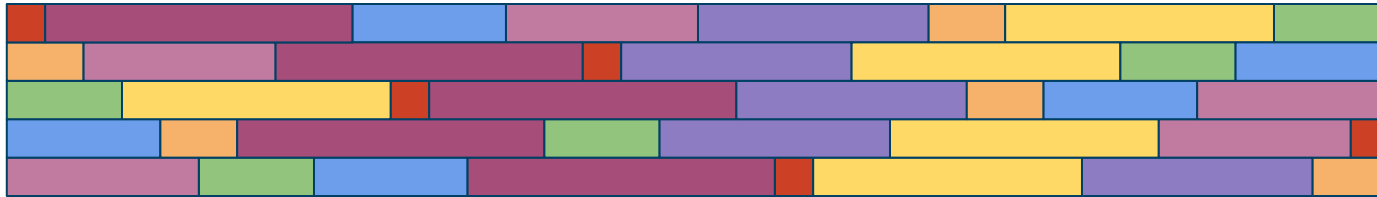
4



1120

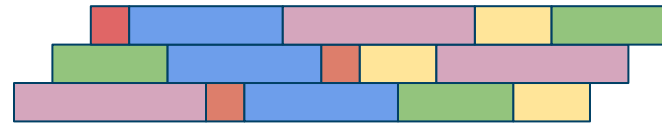


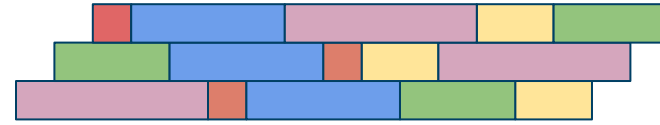
28 432 700



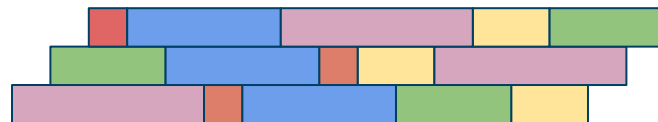
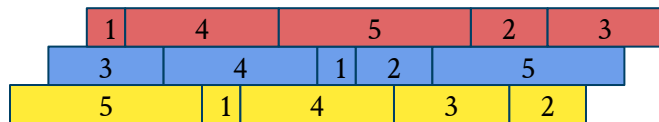
Czy dla każdego  $n = 2k$  istnieje choćby *jedna* barykada rzędu  $n$  o wysokości  $k + 1$  ?

**Korale**

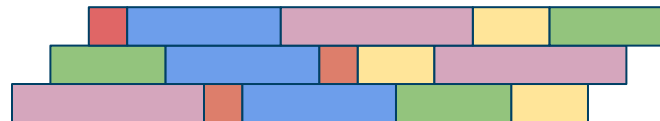
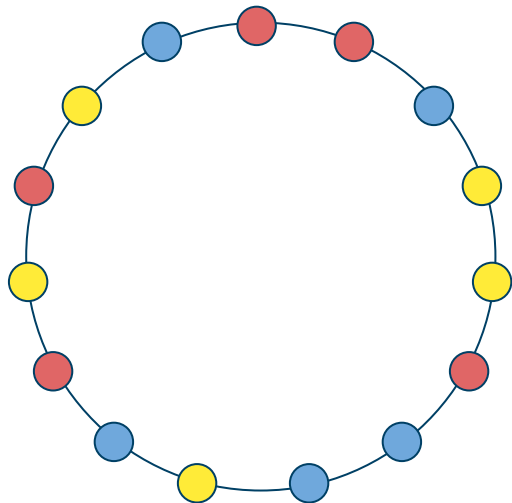
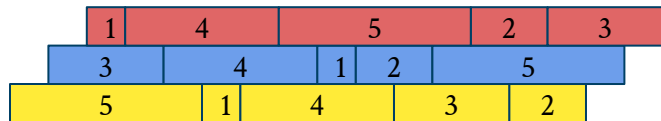




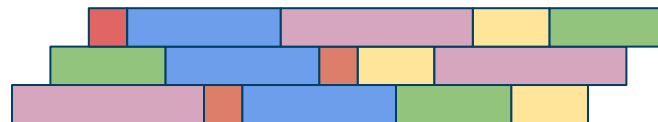
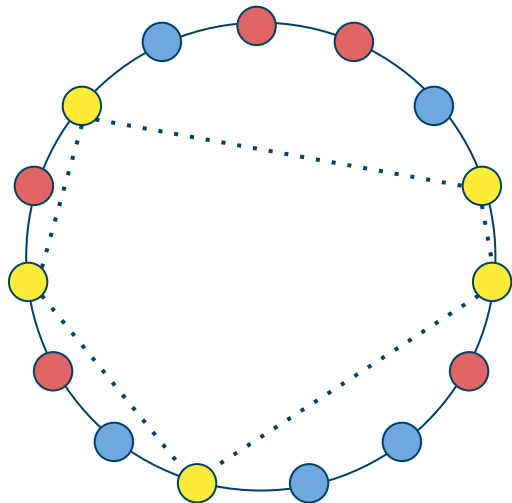
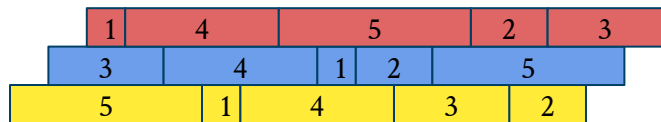
Barykada *cykliczna* rzędu 5



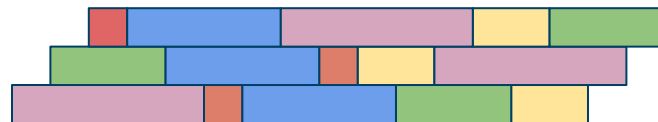
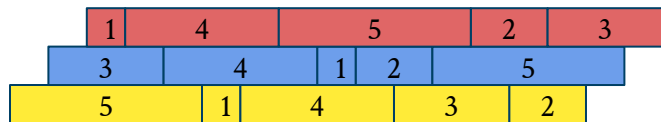
Barykada *cykliczna* rzędu 5



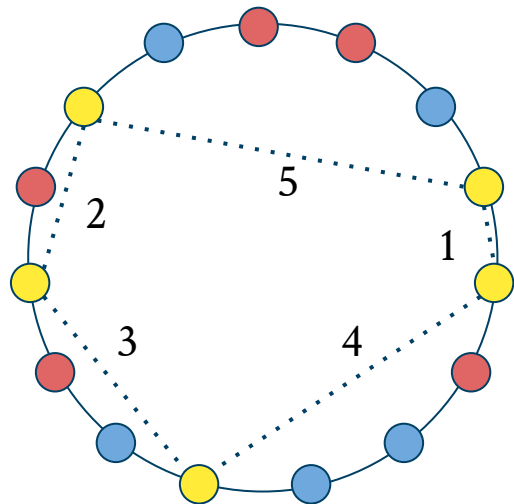
Barykada *cykliczna* rzędu 5

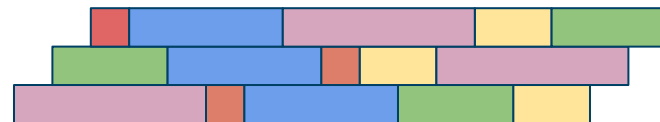
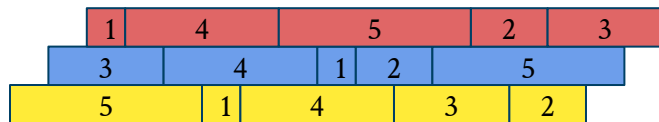


Barykada *cykliczna* rzędu 5

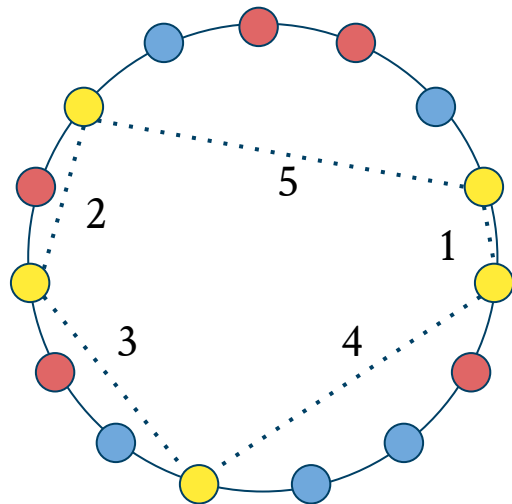


Barykada *cykliczna* rzędu 5

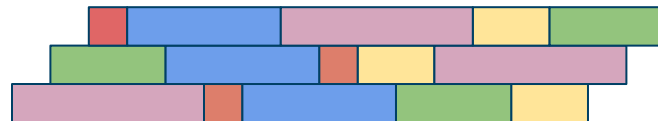
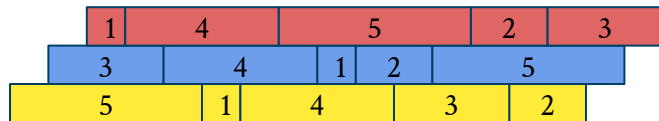




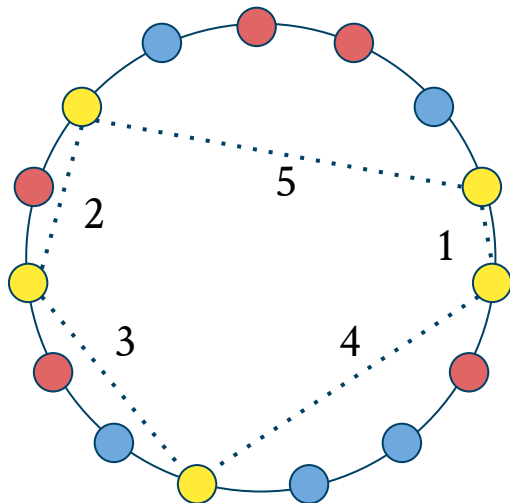
Barykada *cykliczna* rzędu 5



Trójkolorowe korale powstałe  
z barykady *cyklicznej* rzędu 5

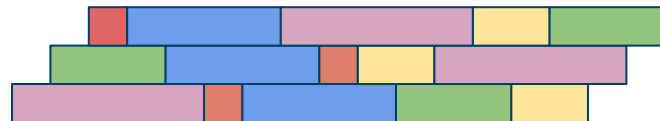
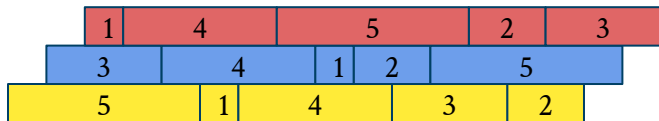


Barykada *cykliczna* rzędu 5

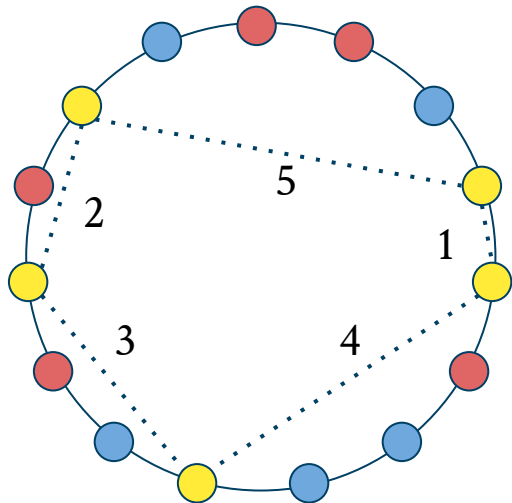


Trójkolorowe korale powstałe  
z barykady cyklicznej rzędu 5

Czy dla każdego  $n = 2k + 1$  istnieją choćby *jedne*  $(k + 1)$ -kolorowe korale rzędu  $n$  ?



Barykada *cykliczna* rzędu 5

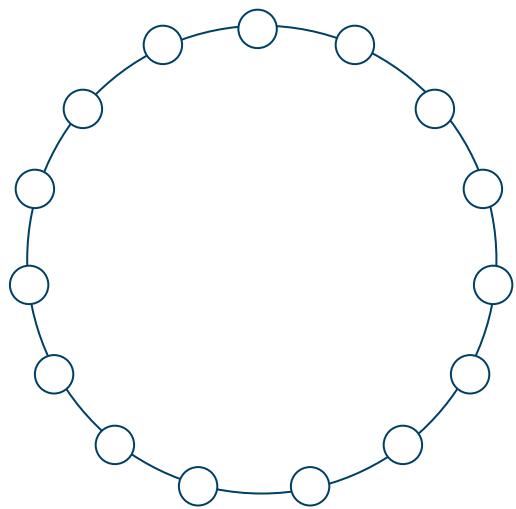


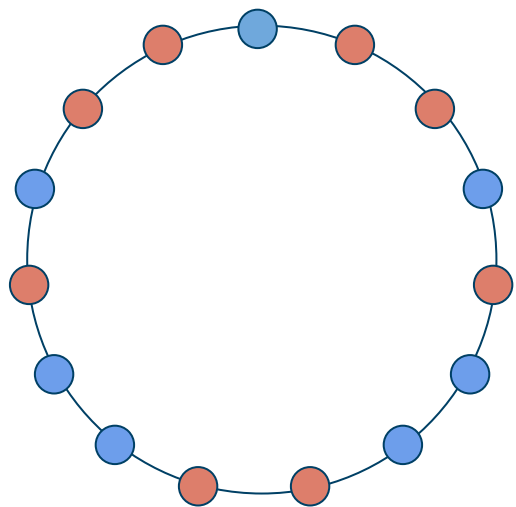
Trójkolorowe korale powstałe  
z barykady *cyklicznej* rzędu 5

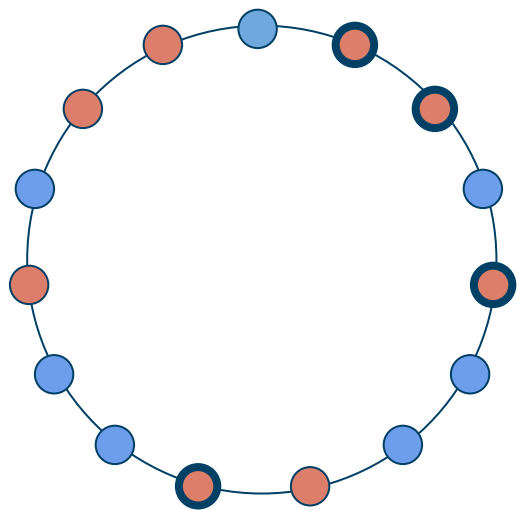


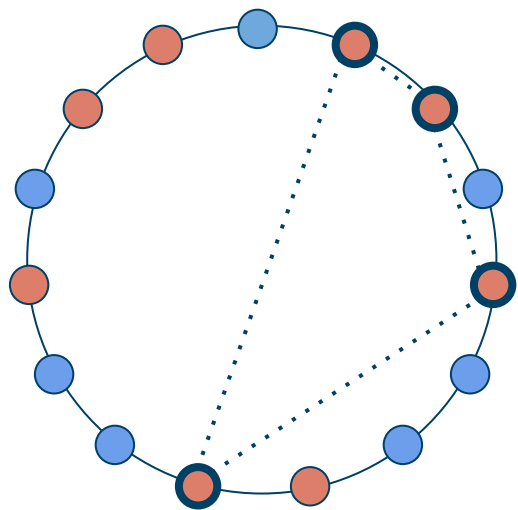
**Barry Cipra**

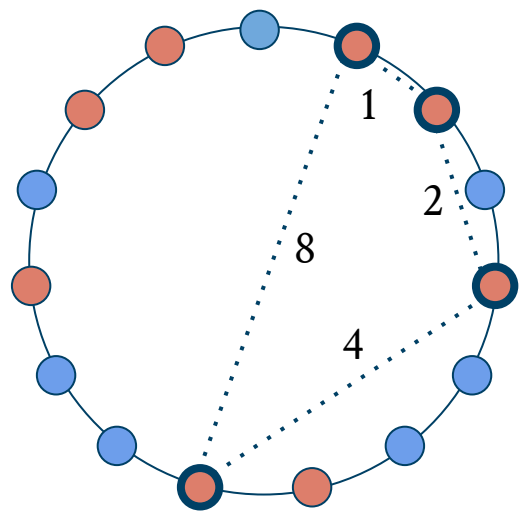
Czy dla każdego  $n = 2k + 1$  istnieją choćby *jedne*  $(k + 1)$ -kolorowe korale rzędu  $n$  ?

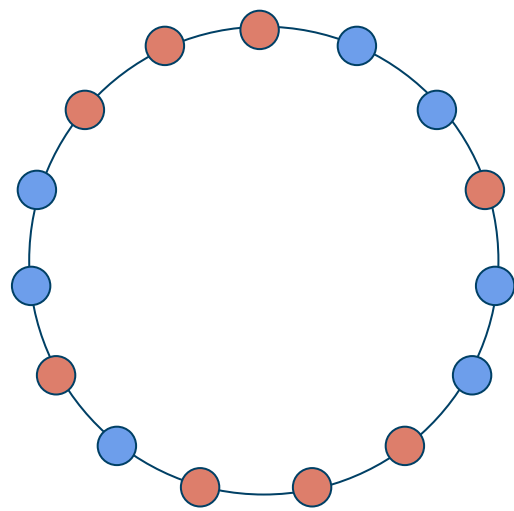
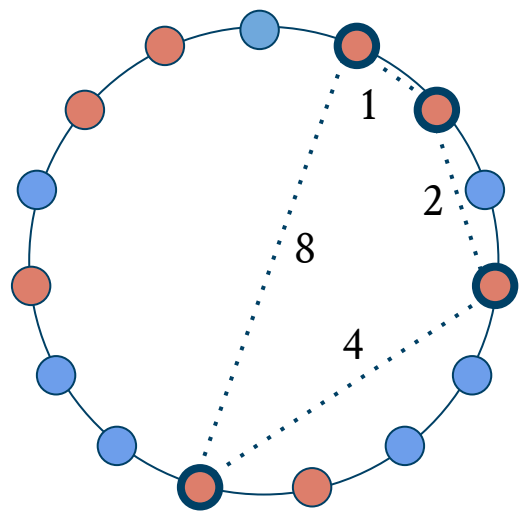


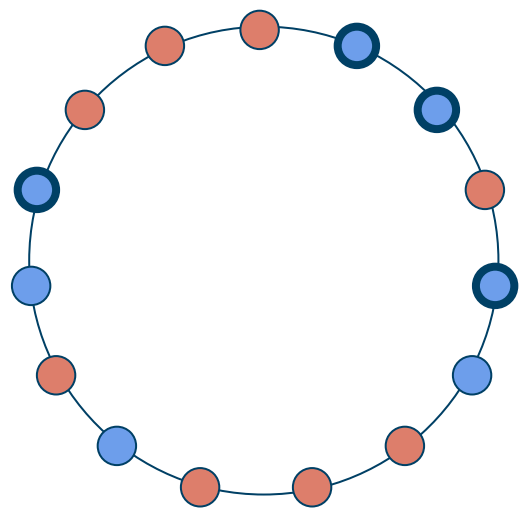
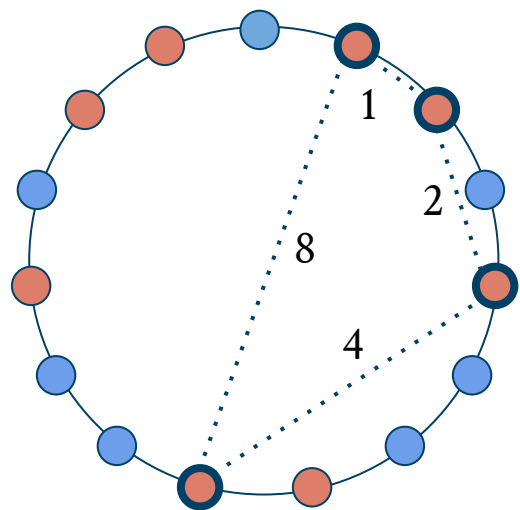


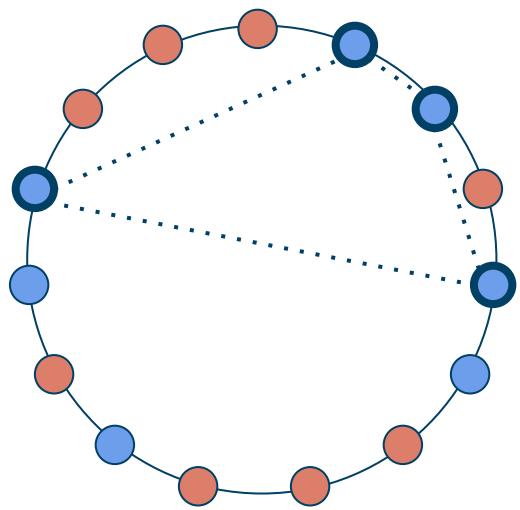
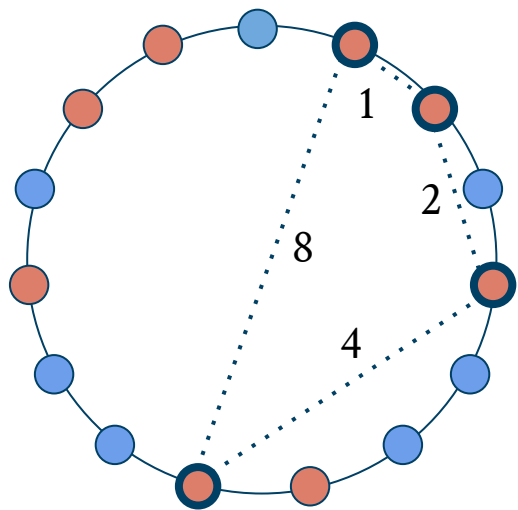


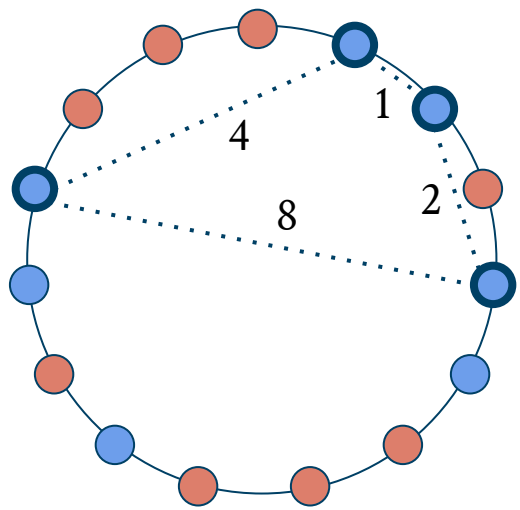
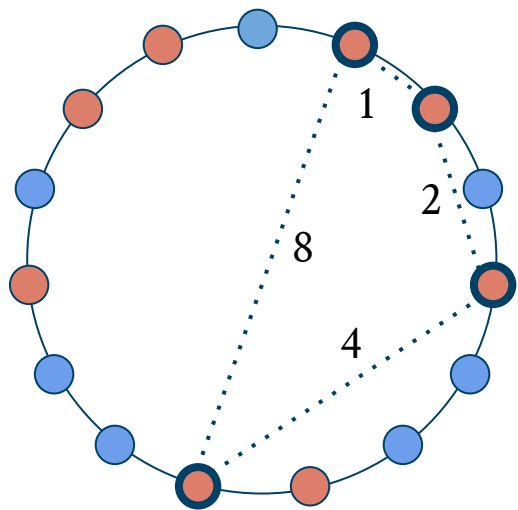


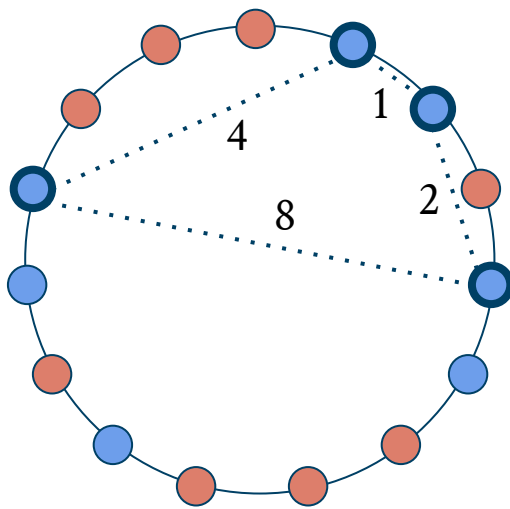
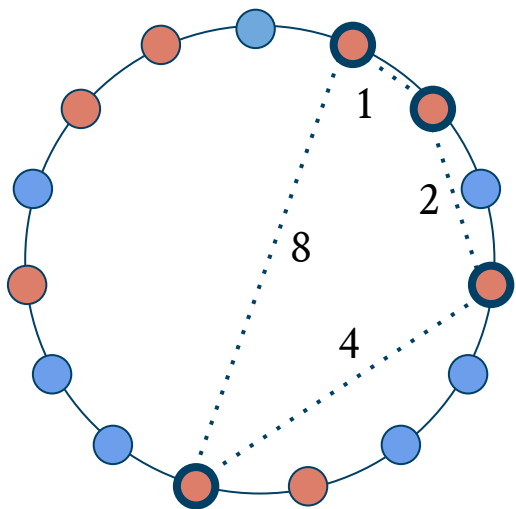




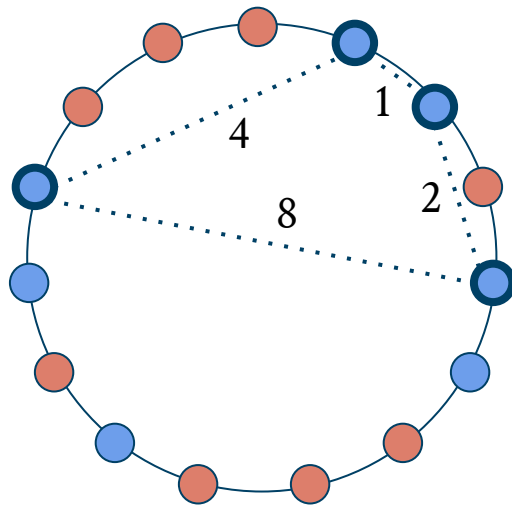
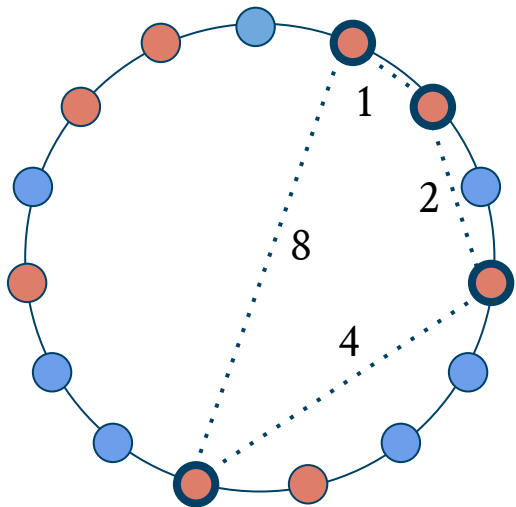








**Hipoteza:** Niech  $k \geq 3$ . Dla dowolnego dwukolorowania  $2^k - 1$  punktów na okręgu (rozmieszczonych równomiernie) istnieje  $k - 1$  punktów tego samego koloru wyznaczających łuki o długościach  $1, 2, 4, \dots, 2^{k-1}$  (niekoniecznie w tym porządku).

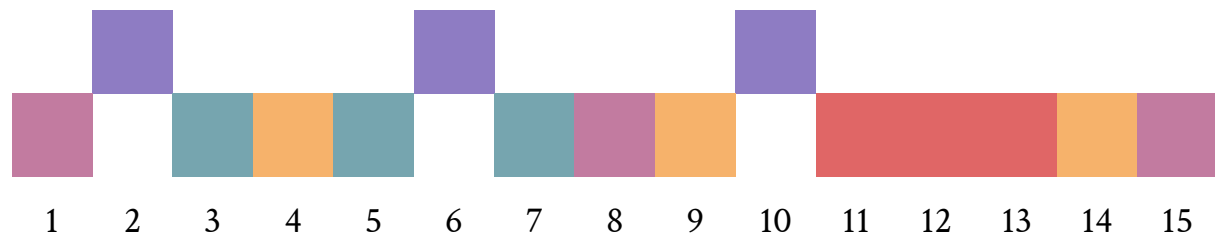


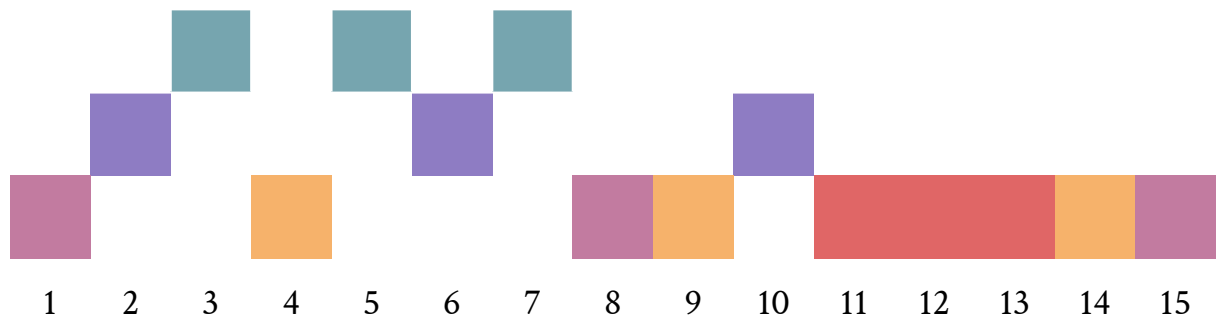
**Walter Stromquist**

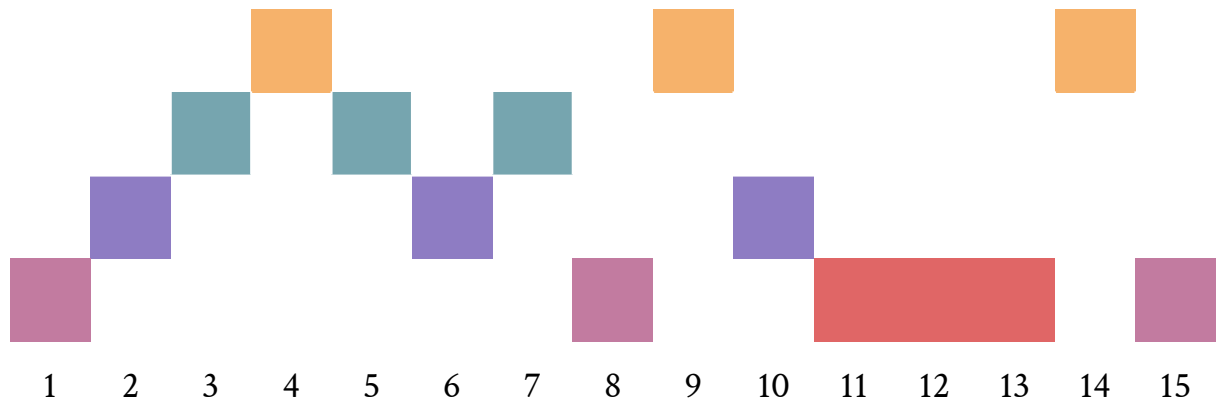
**Hipoteza:** Niech  $k \geq 3$ . Dla dowolnego dwukolorowania  $2^k - 1$  punktów na okręgu (rozmyśzczonych równomiernie) istnieje  $k - 1$  punktów tego samego koloru wyznaczających łuki o długościach  $1, 2, 4, \dots, 2^{k-1}$  (niekoniecznie w tym porządku).

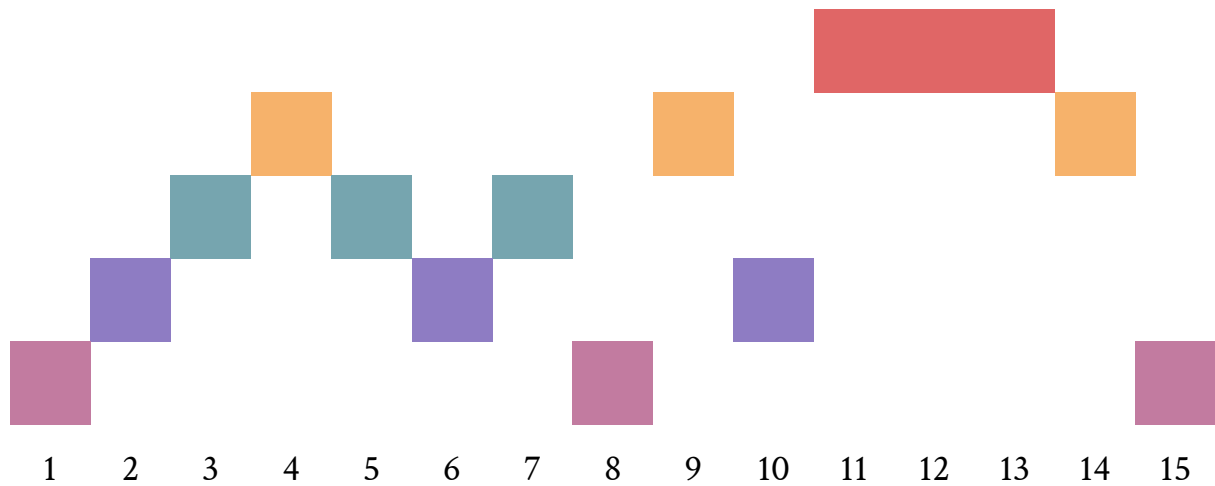
**Rytmy**

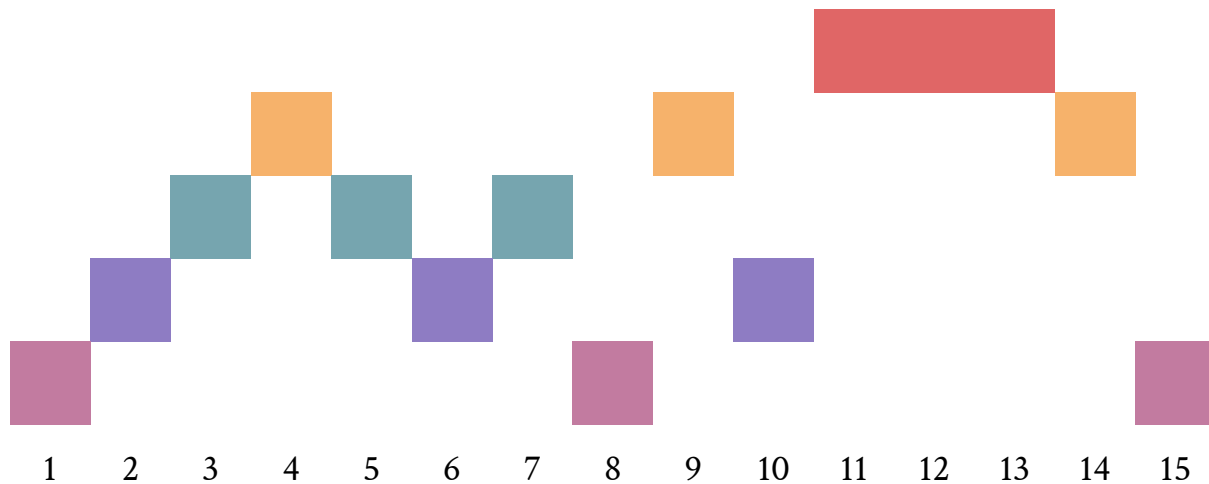




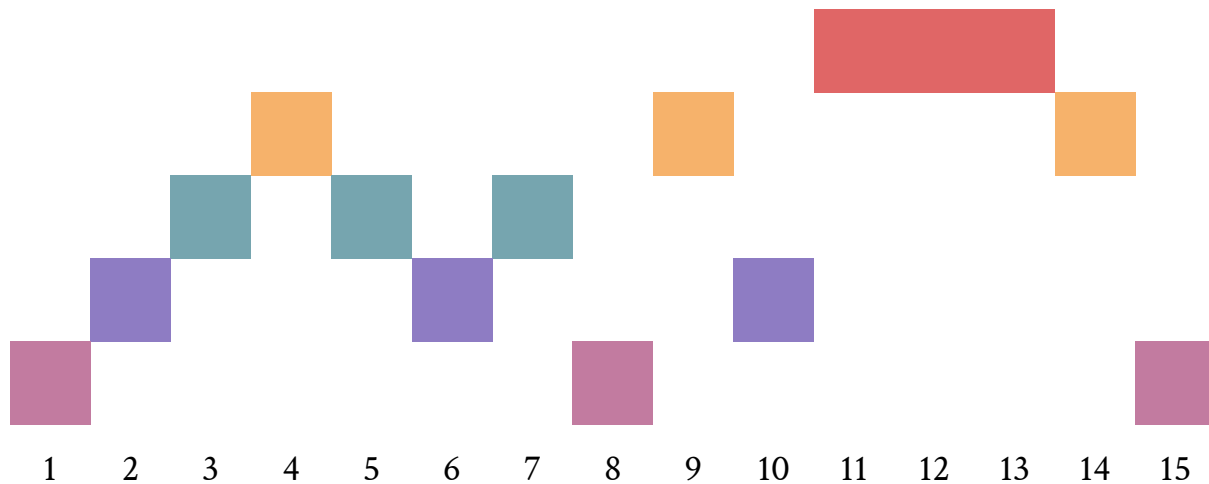






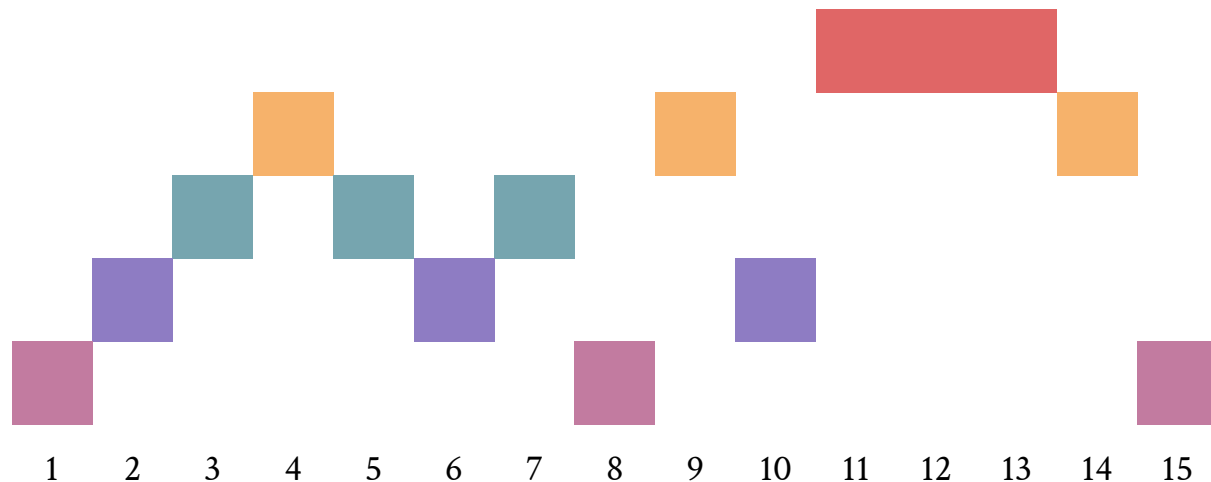


**Kanon rytmiczny doskonały  $K(5, 3)$**



### Kanon rytmiczny doskonały $K(5, 3)$

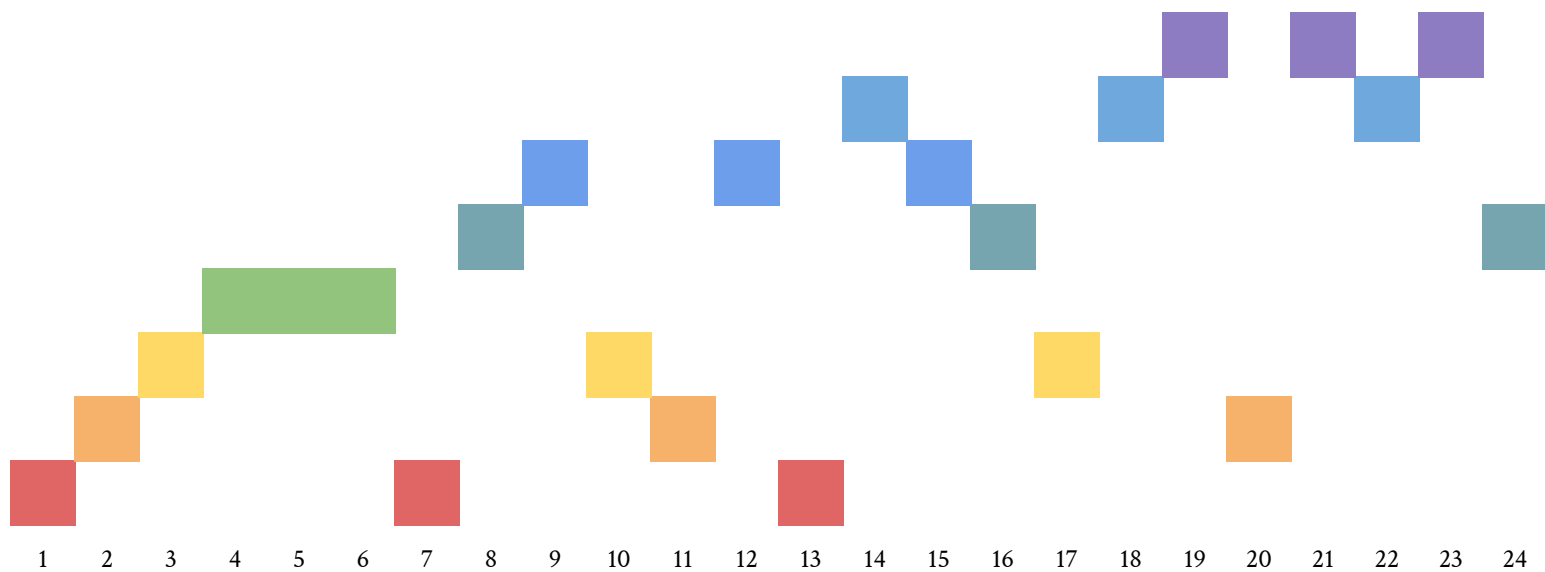
**Definicja:** *Kanonem rytmicznym doskonałym  $K(n, r)$  nazywamy podział zbioru  $\{1, 2, \dots, nr\}$  na  $n$  ciągów arytmetycznych długości  $r$ , z których żadne dwa nie mają tej samej różnicy.*



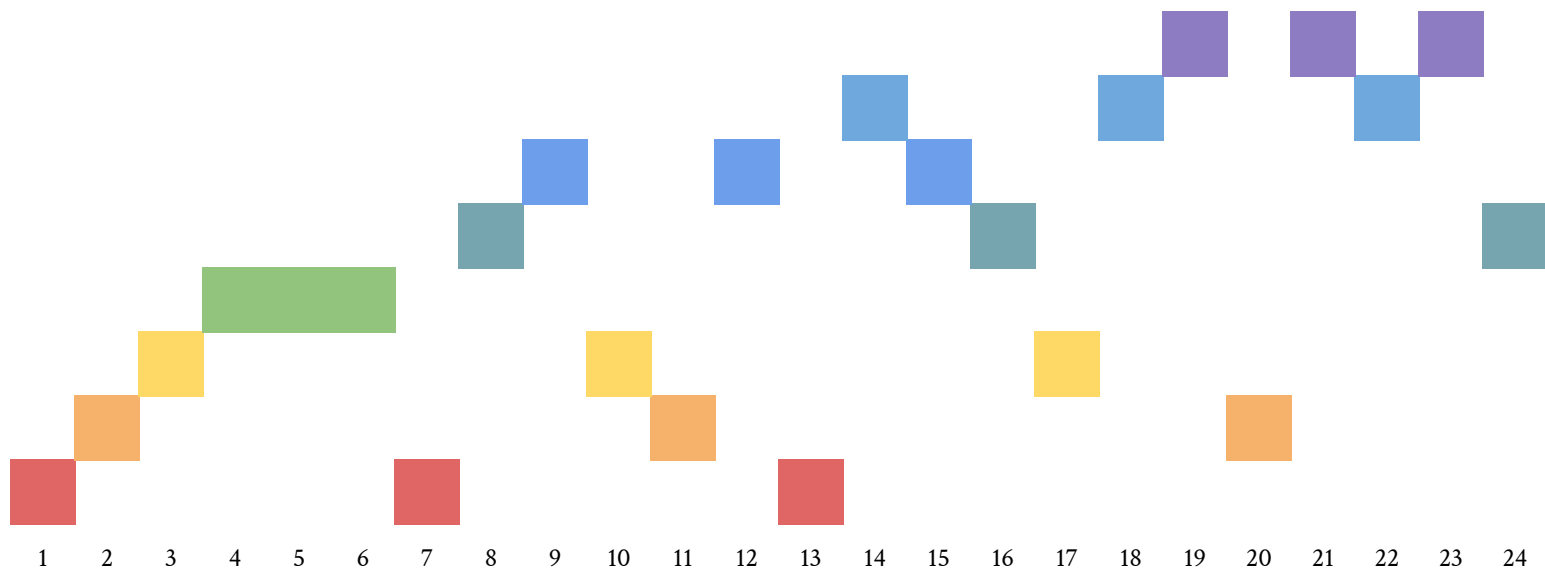
### Kanon rytmiczny doskonały $K(5, 3)$

**Definicja:** *Kanonem rytmicznym doskonałym  $K(n, r)$  nazywamy podział zbioru  $\{1, 2, \dots, nr\}$  na  $n$  ciągów arytmetycznych długości  $r$ , z których żadne dwa nie mają tej samej różnicy.*

Dla jakich par  $(n, r)$  istnieją kanony rytmiczne doskonałe  $K(n, r)$  ?

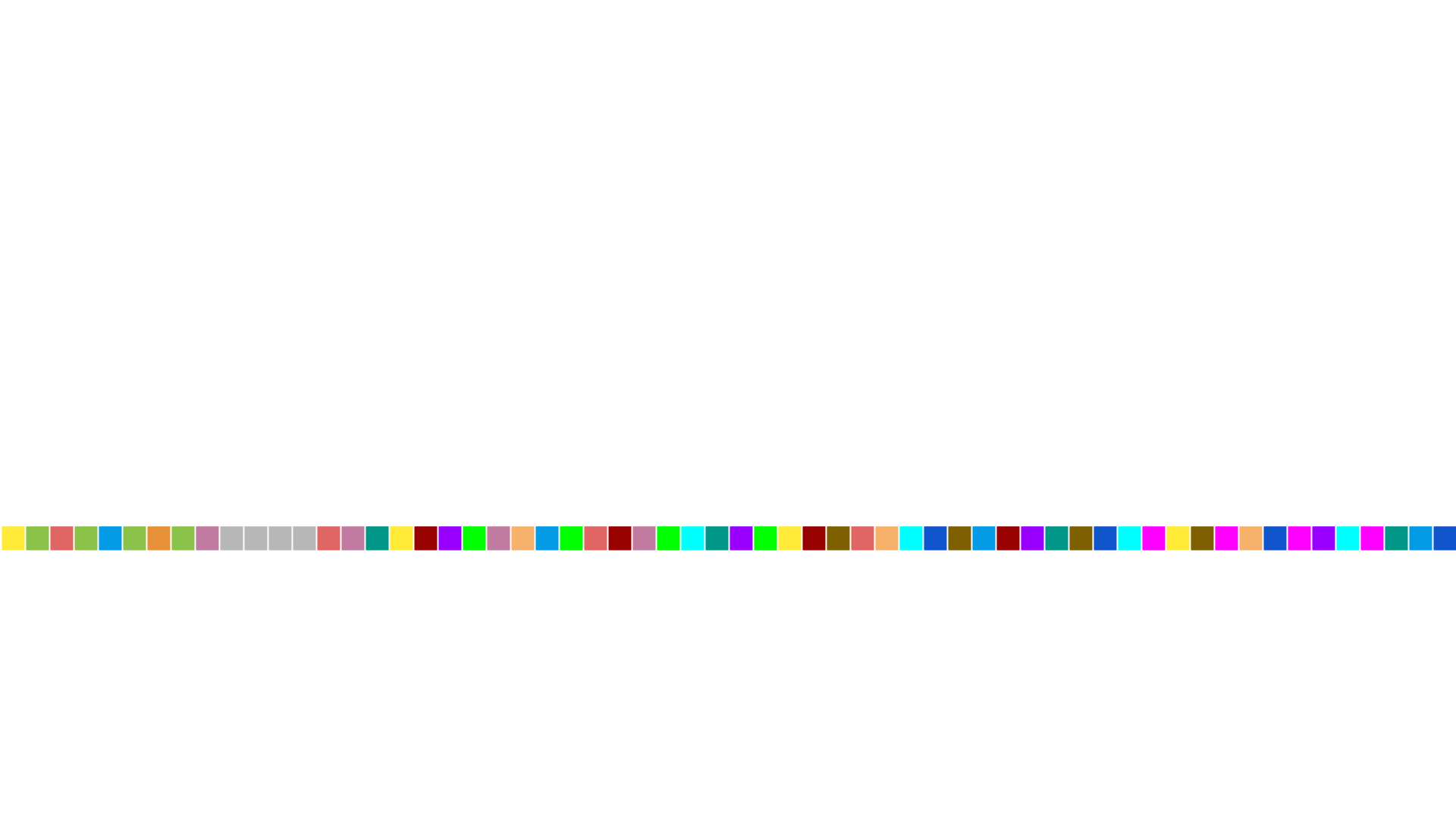


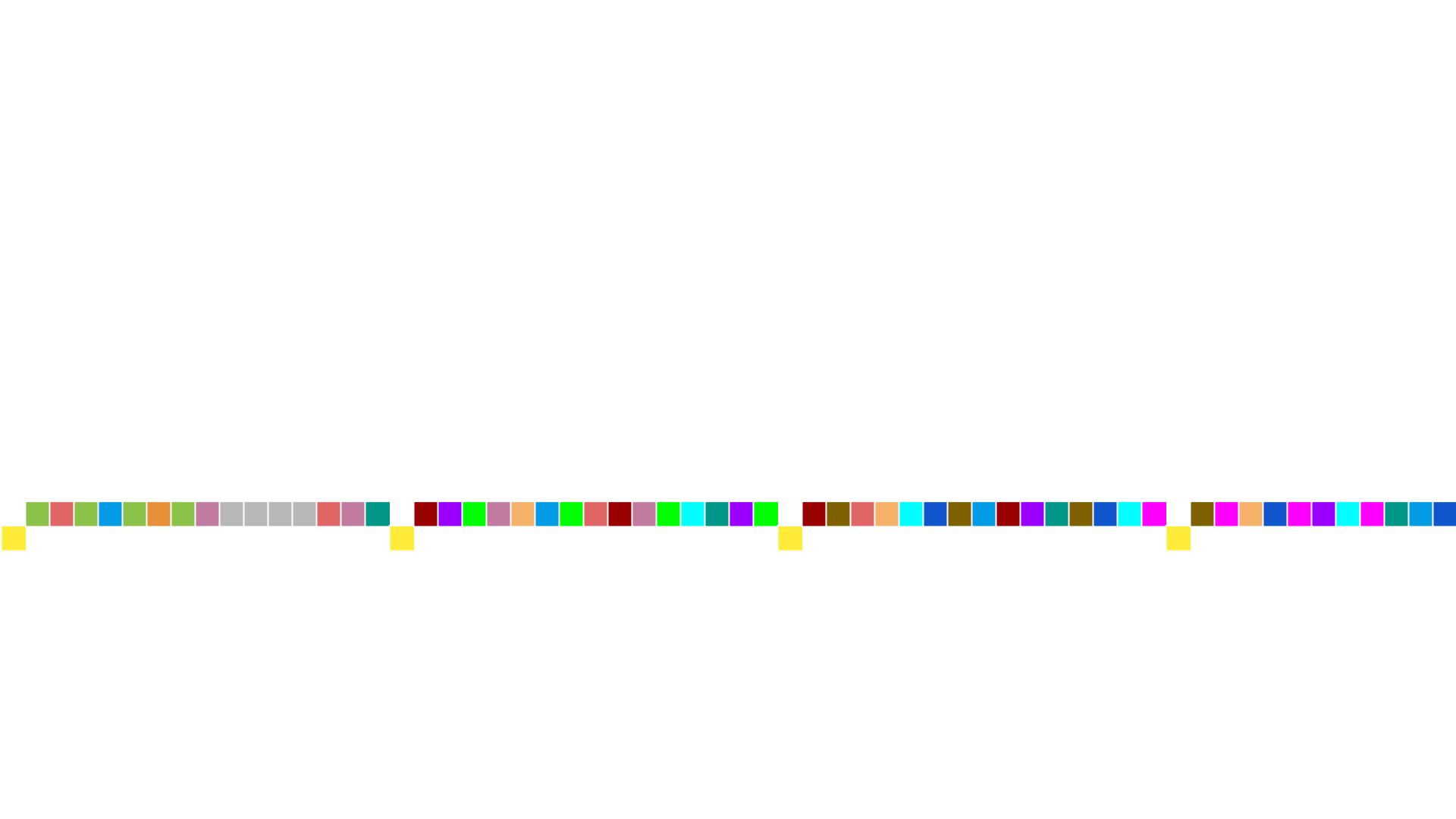
**Kanon rytmiczny doskonały  $K(8, 3)$**

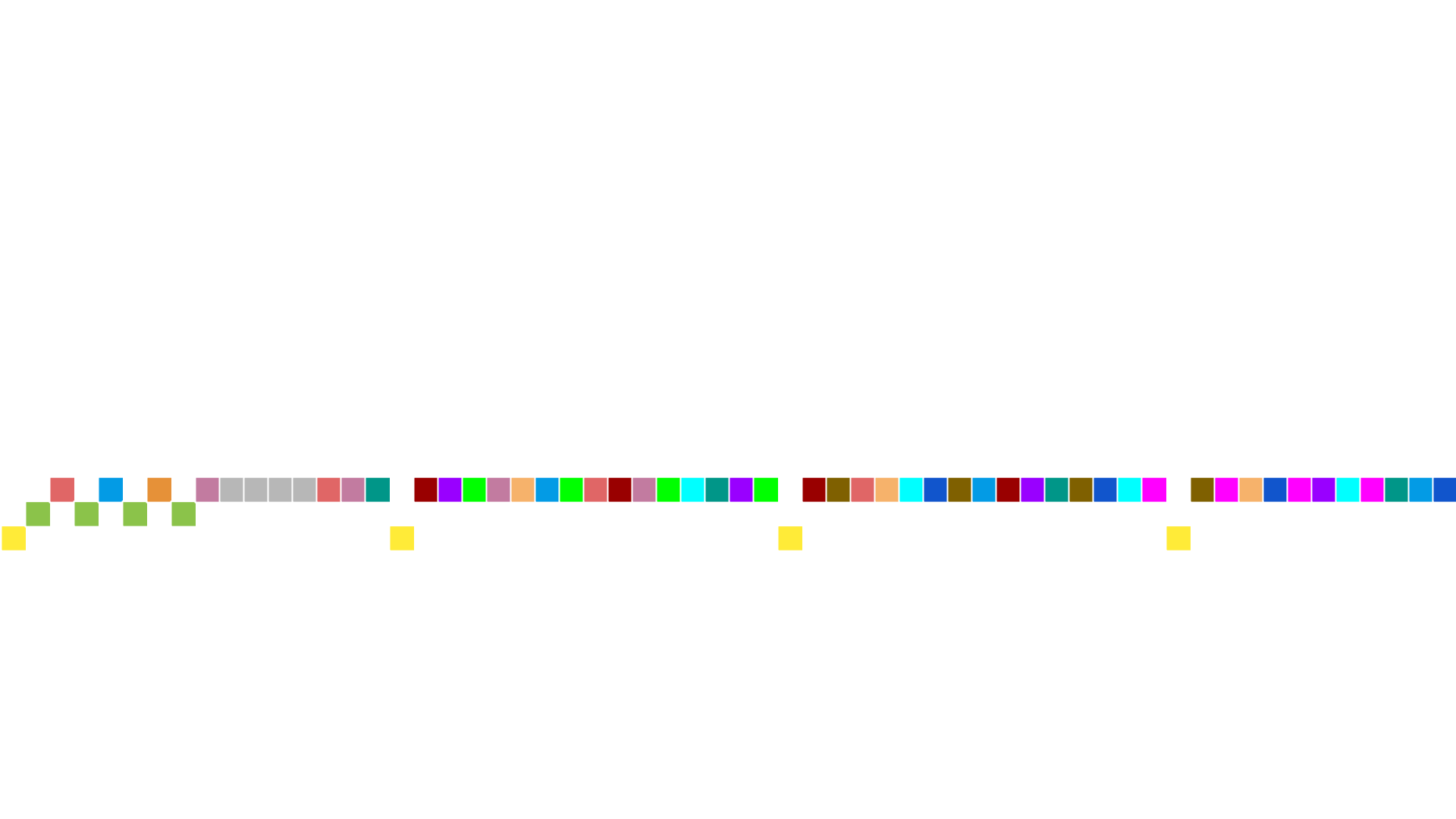


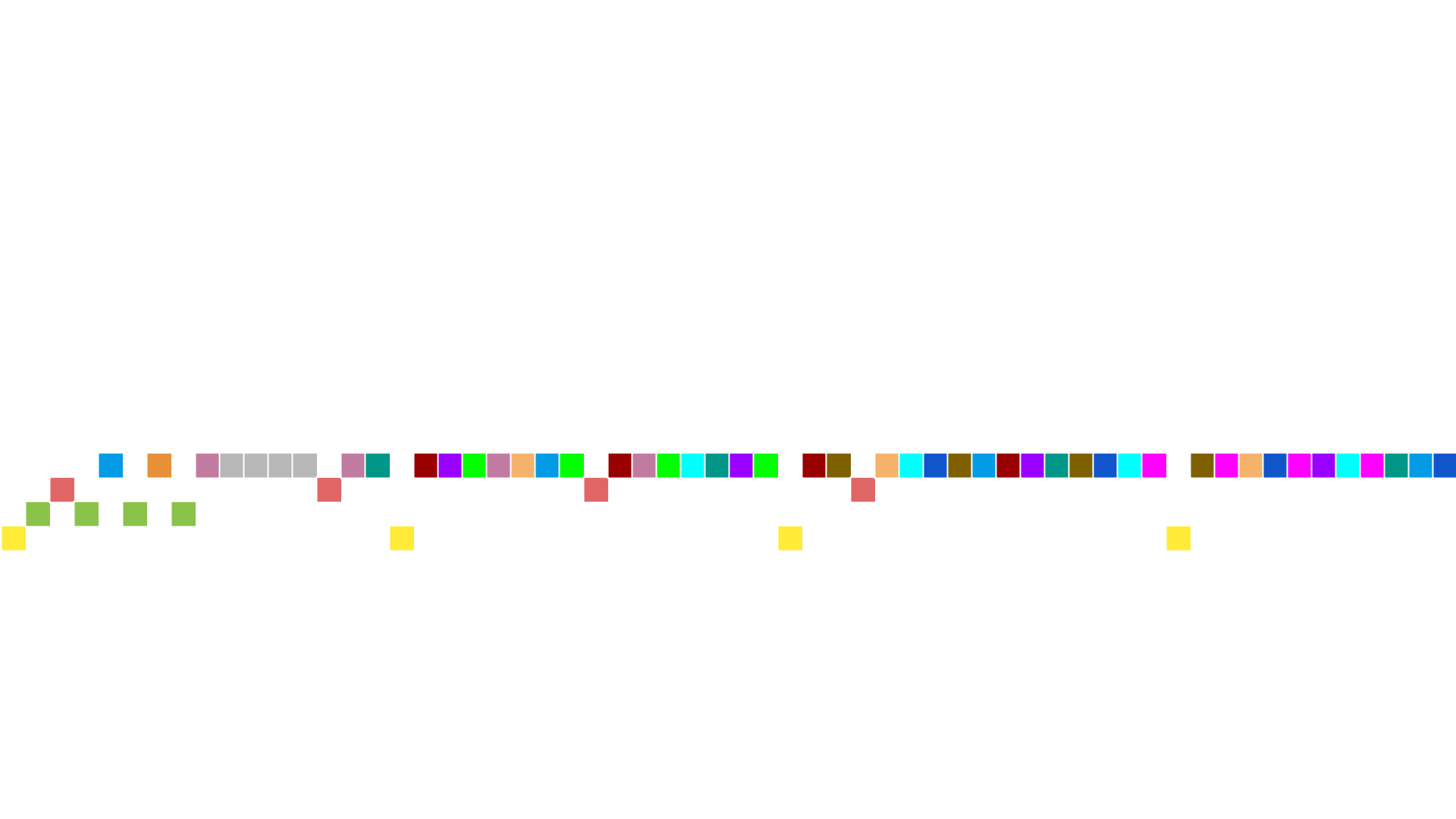
## Kanon rytmiczny doskonały $K(8, 3)$

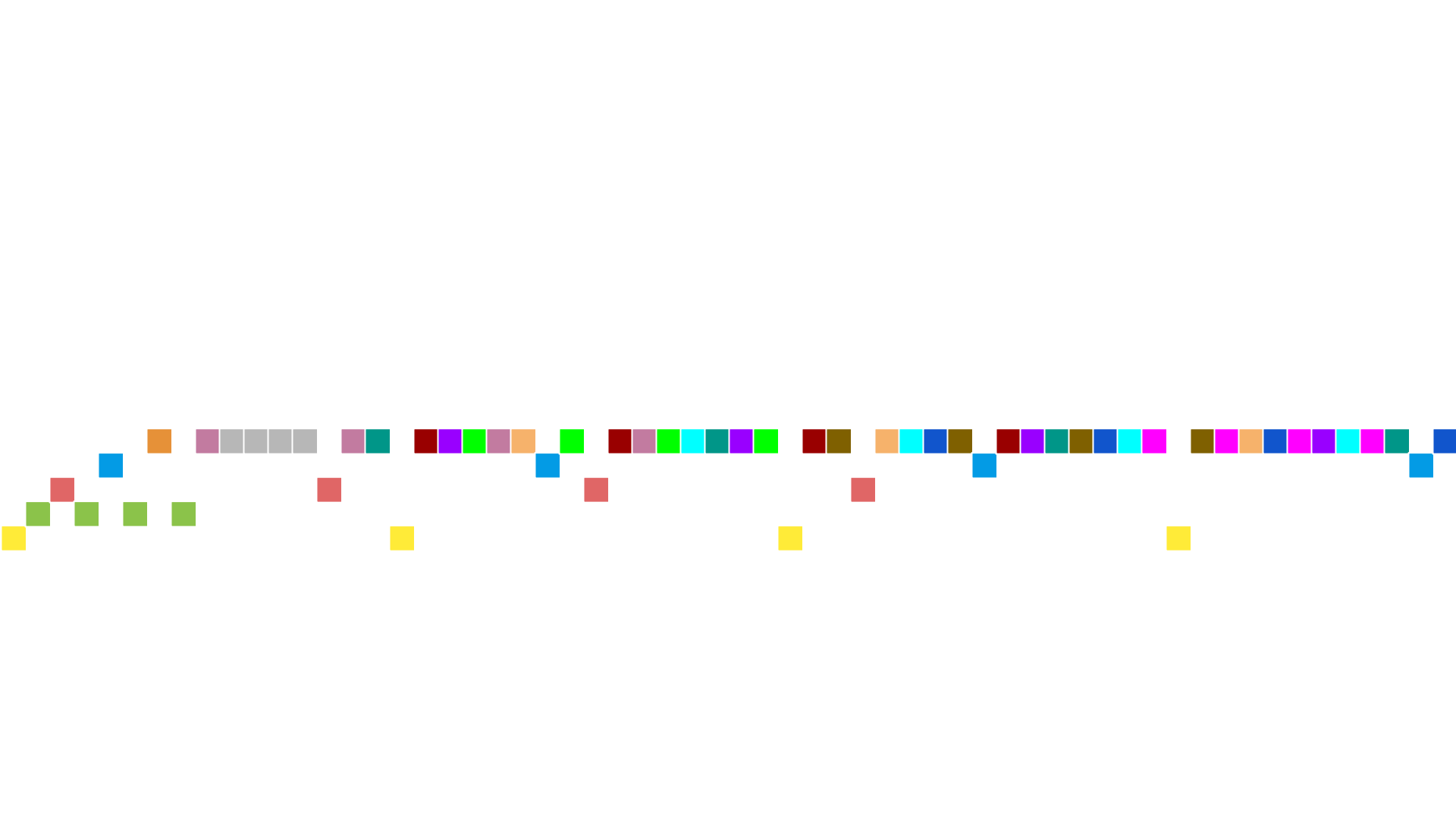
**Hipoteza:** Dla każdego  $n \geq 7$  istnieje kanon rytmiczny doskonały  $K(n, 3)$ .

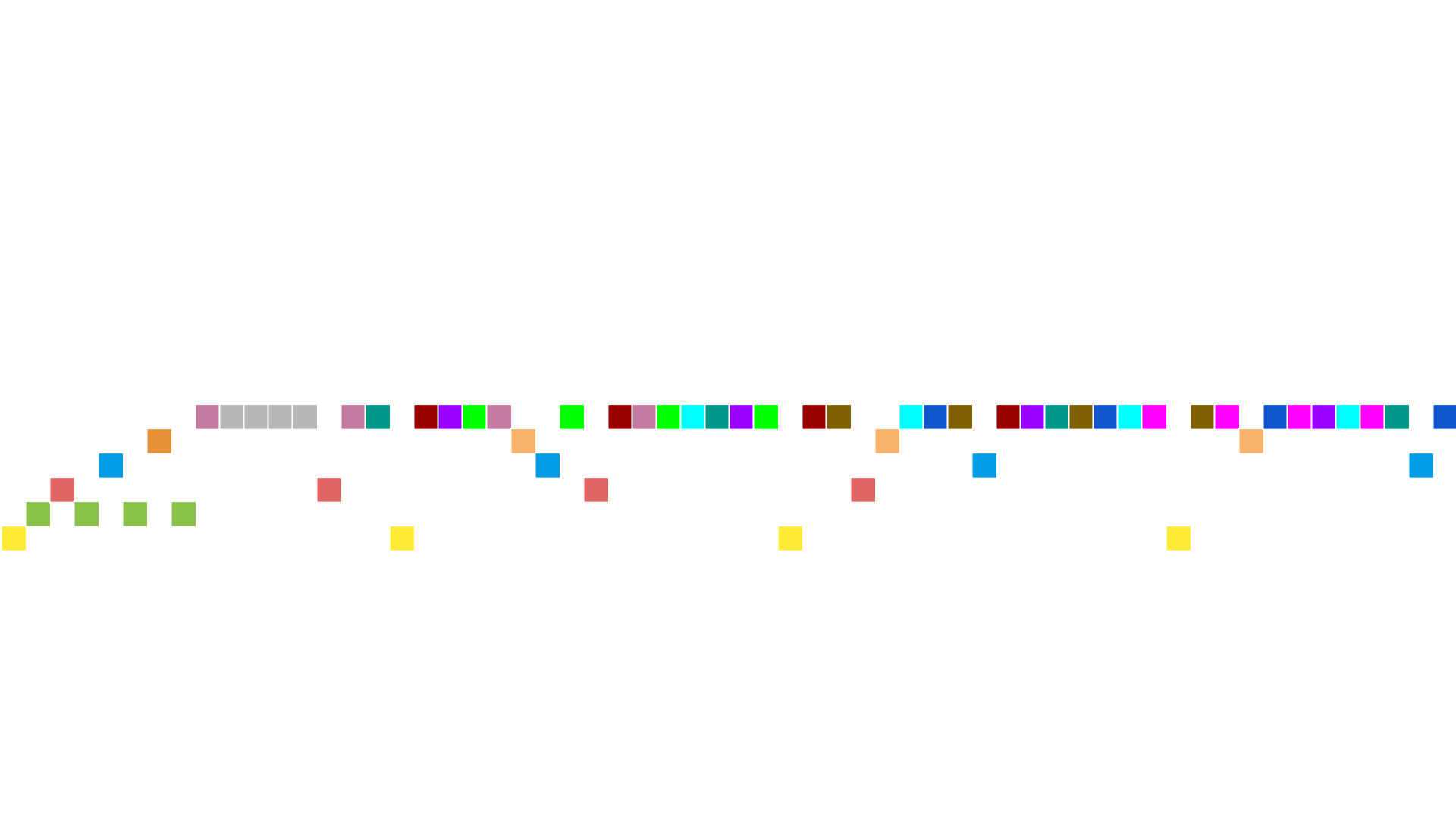












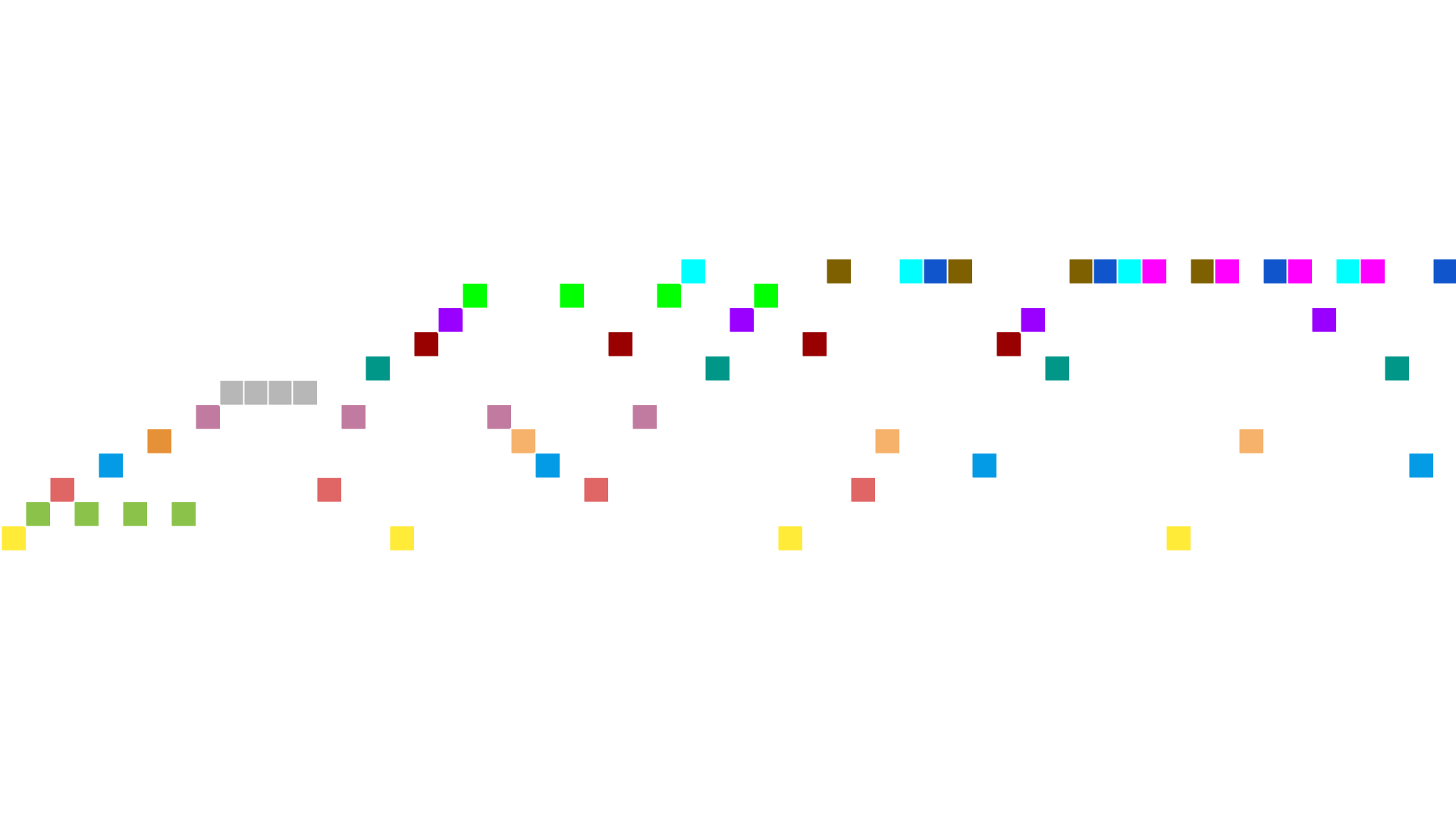


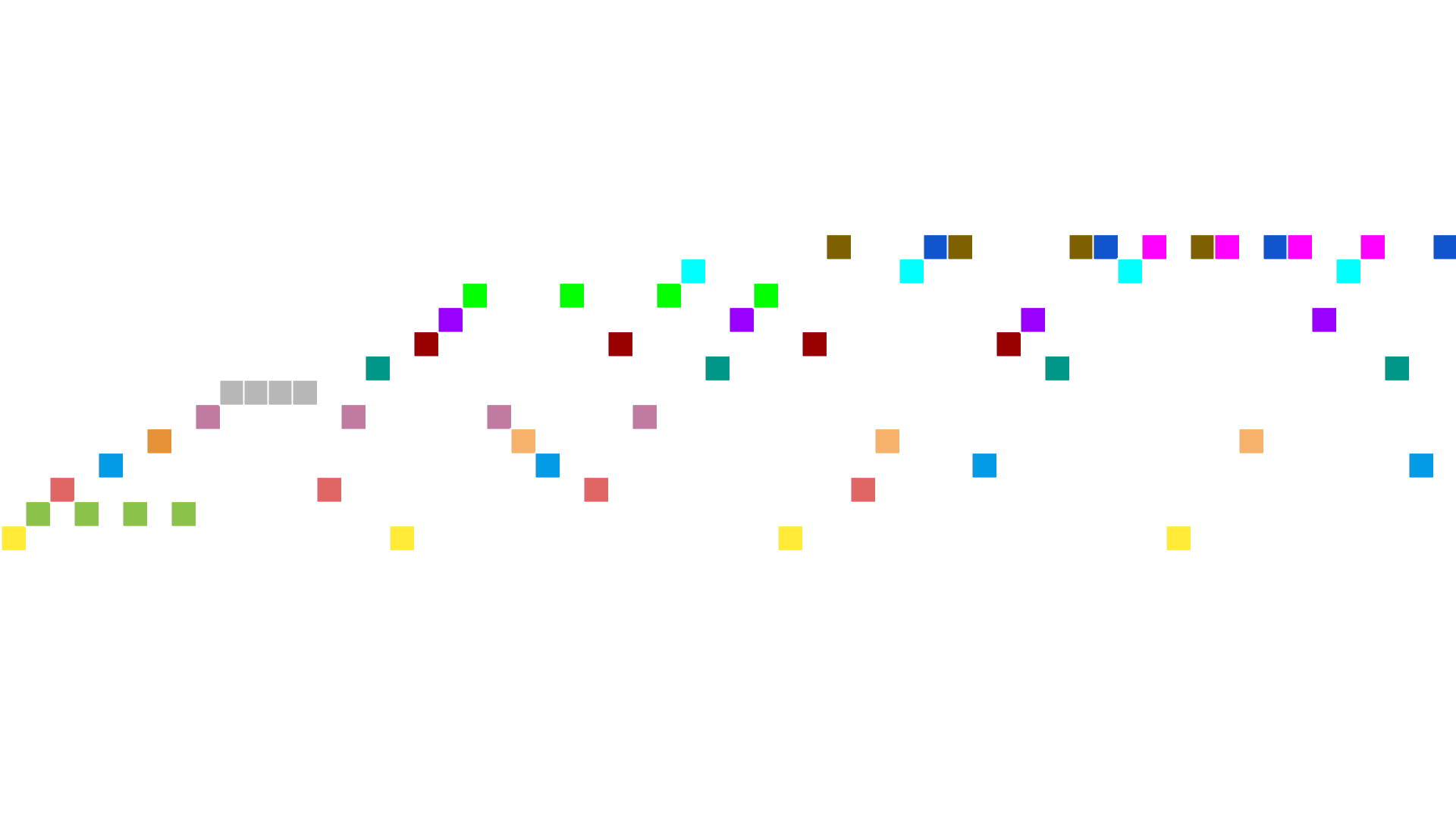


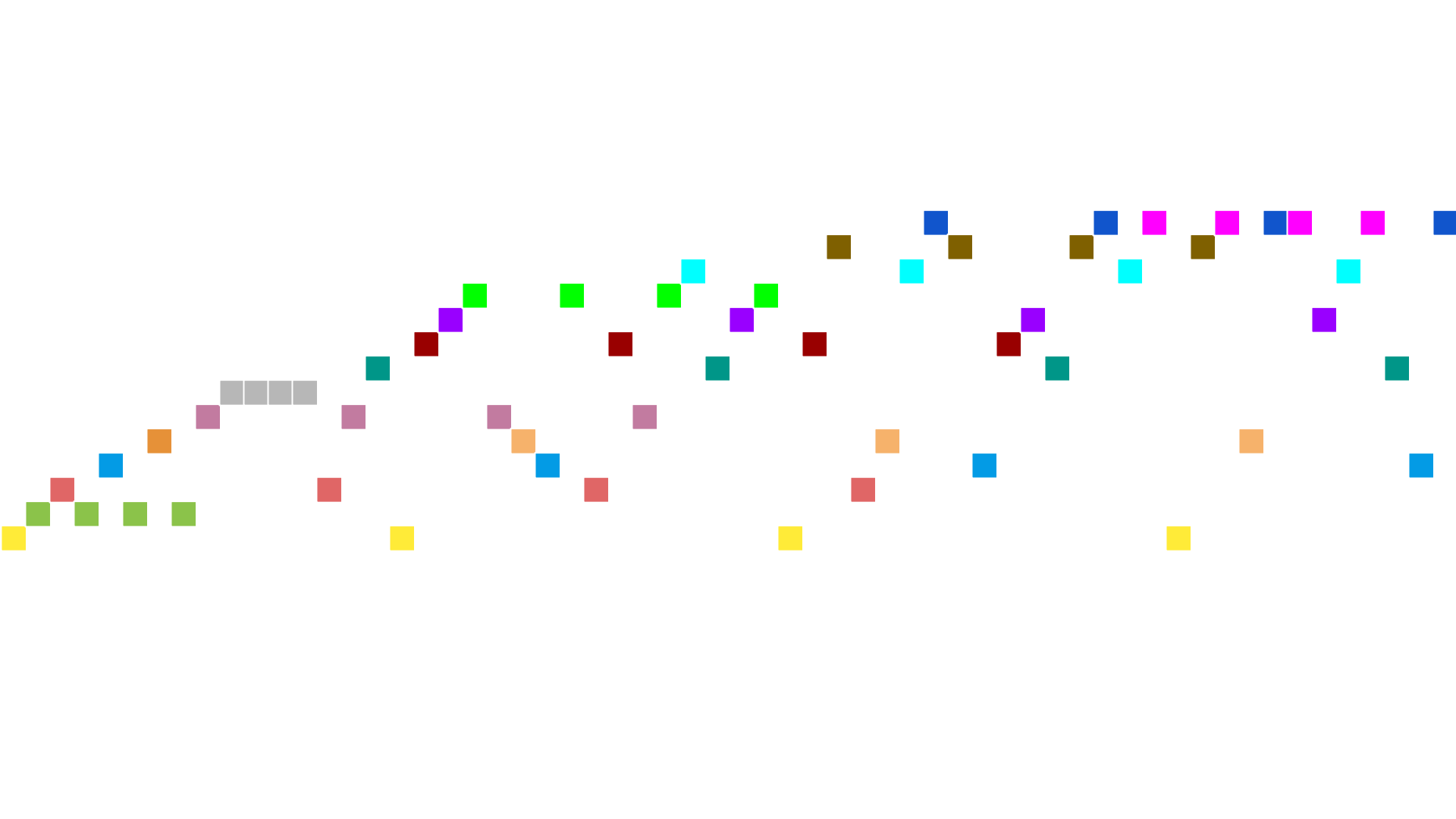


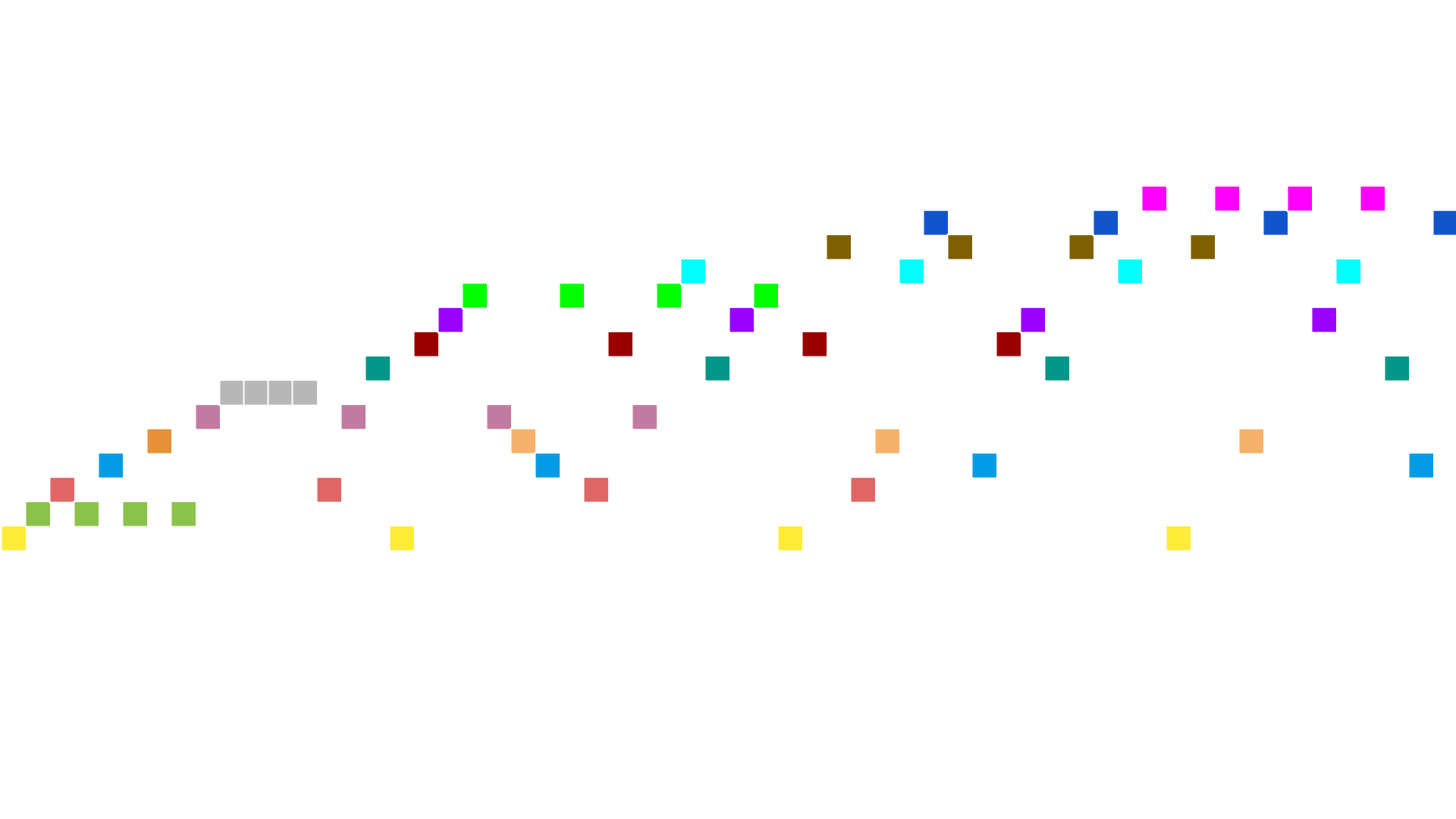


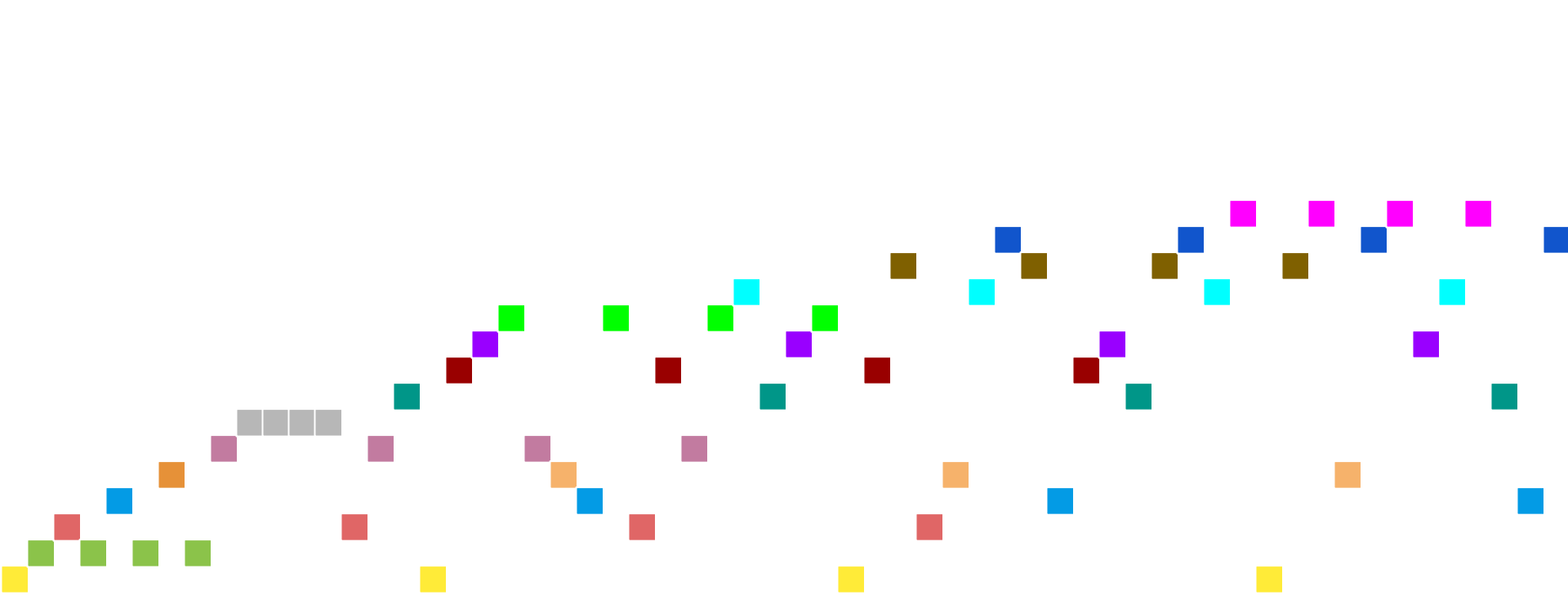




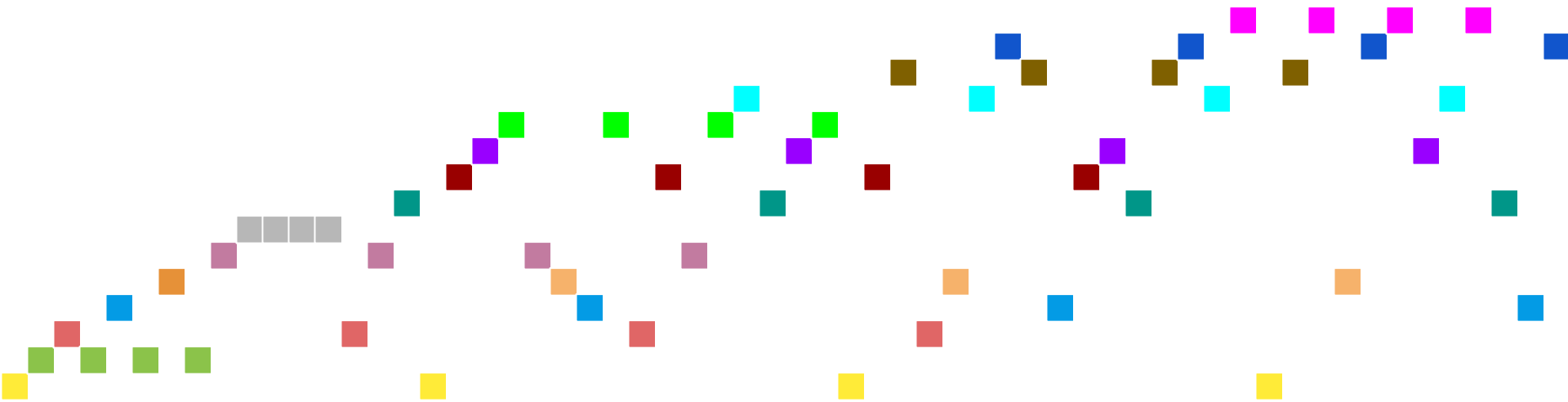








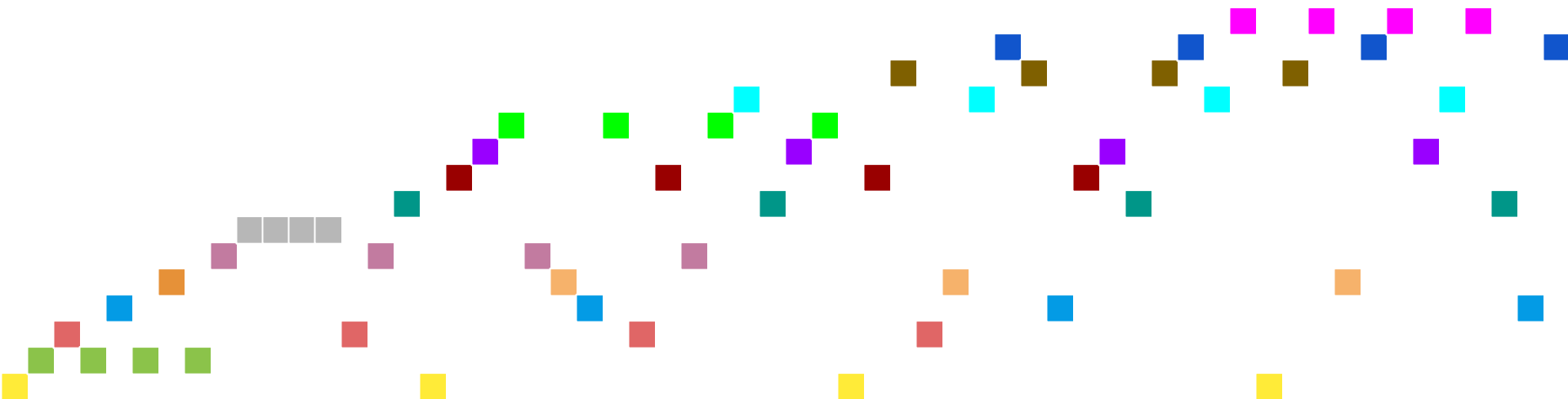
**Kanon rytmiczny doskonały  $K(15, 4)$**



Kanon rytmiczny doskonały  $K(15, 4)$

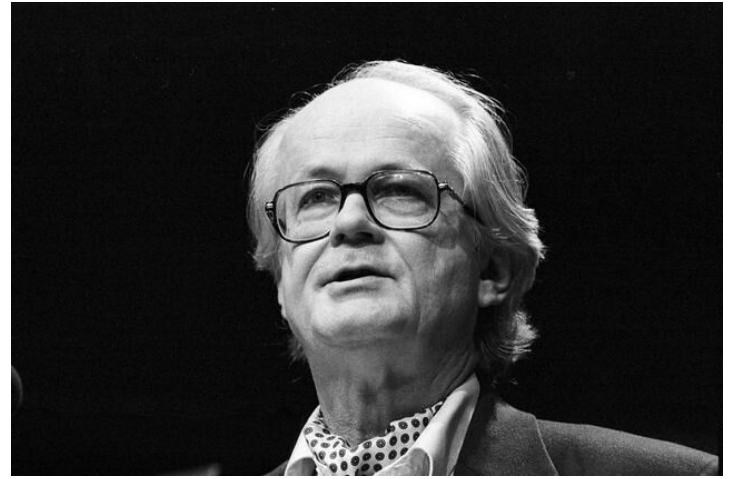
**Hipoteza:** Dla każdego  $n \geq 15$  istnieje kanon rytmiczny doskonały  $K(n, 4)$ .

**Hipoteza:** Dla każdego  $r$  istnieje  $k(r)$  takie, że  $K(n, r)$  istnieje dla każdego  $n \geq k(r)$ .

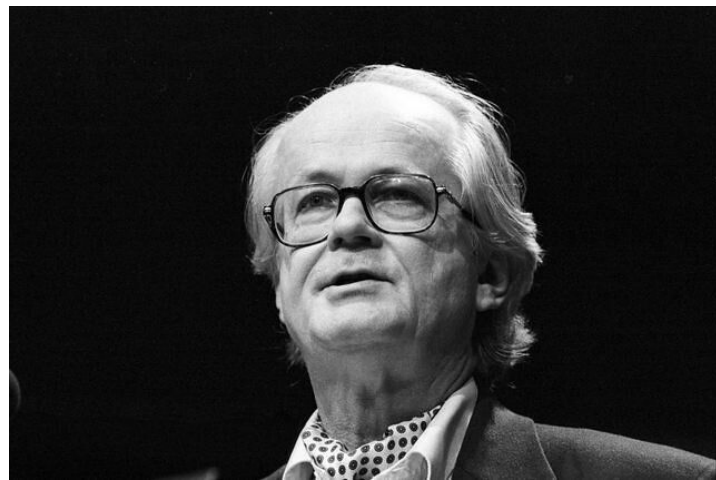
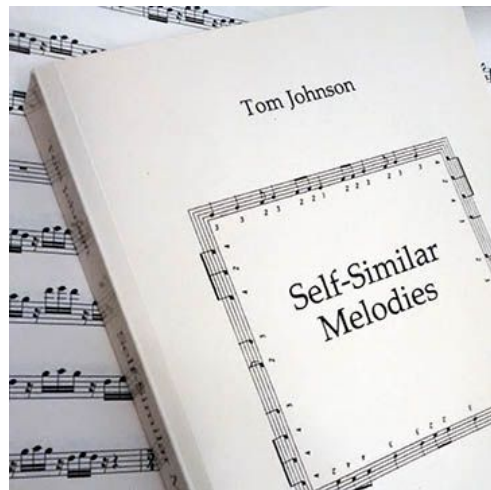


**Kanon rytmiczny doskonały  $K(15, 4)$**

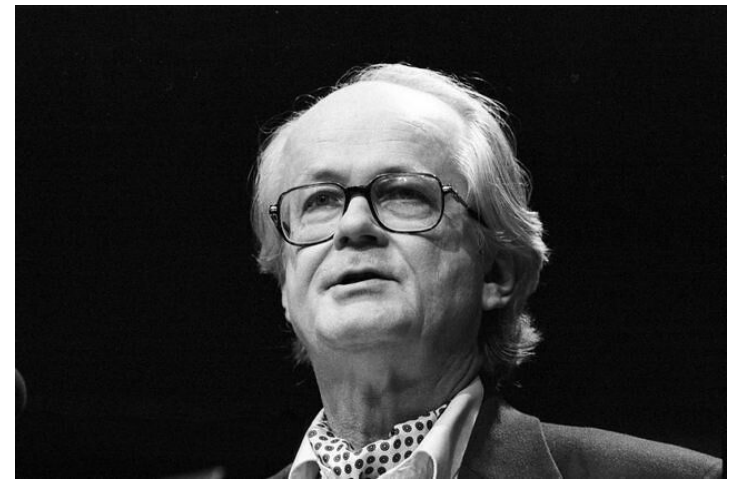
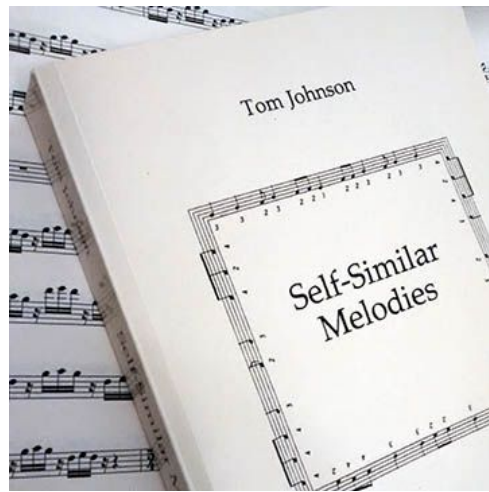
**Hipoteza:** Dla każdego  $n \geq 15$  istnieje kanon rytmiczny doskonały  $K(n, 4)$ .



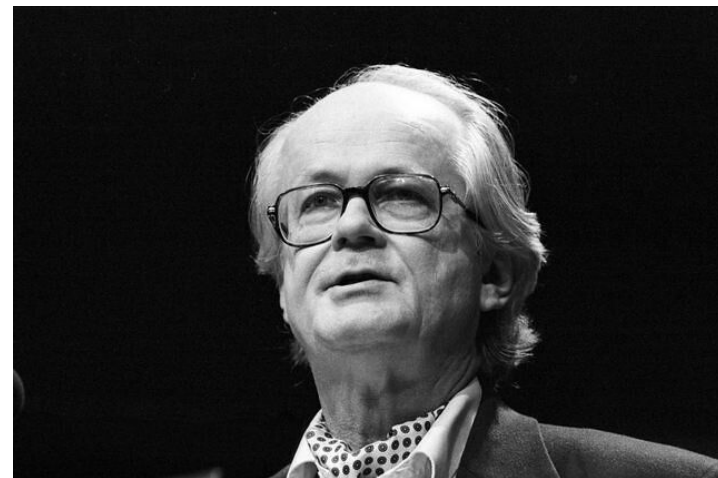
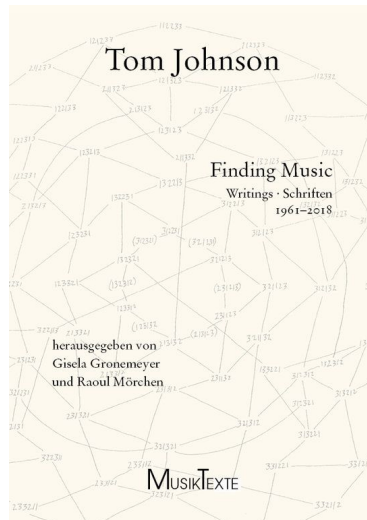
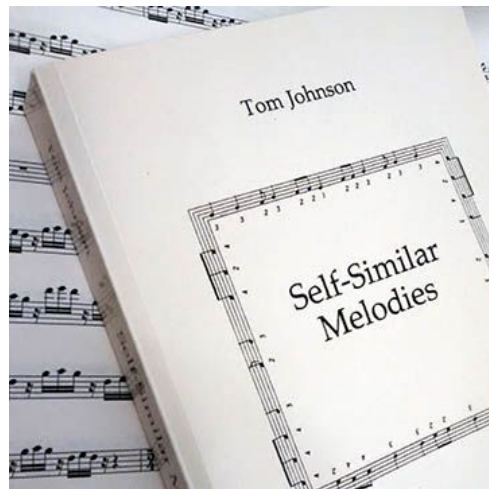
**Tom Johnson (1939 - 2024)**



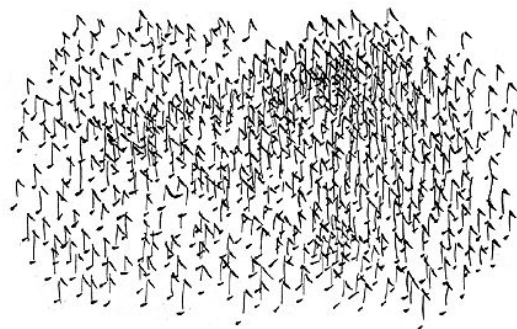
**Tom Johnson (1939 - 2024)**



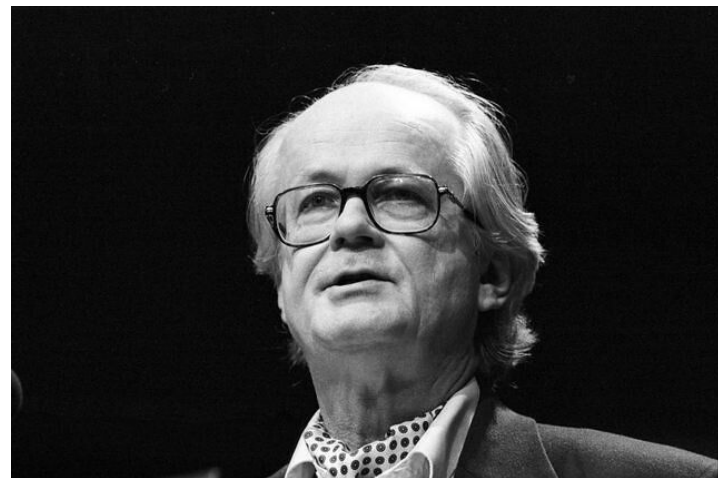
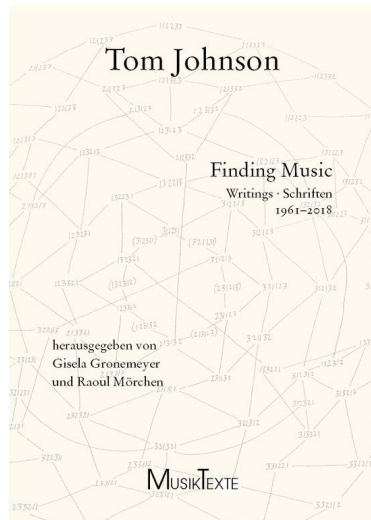
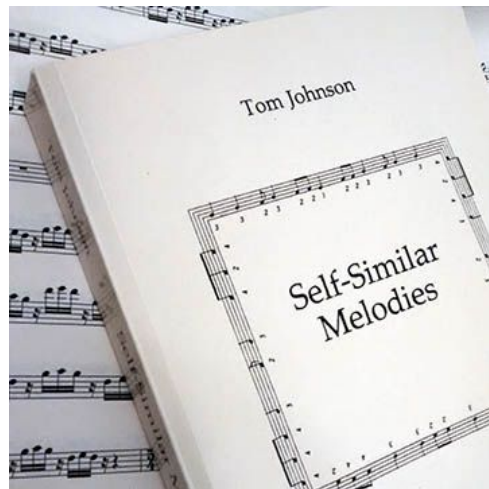
**Tom Johnson (1939 - 2024)**



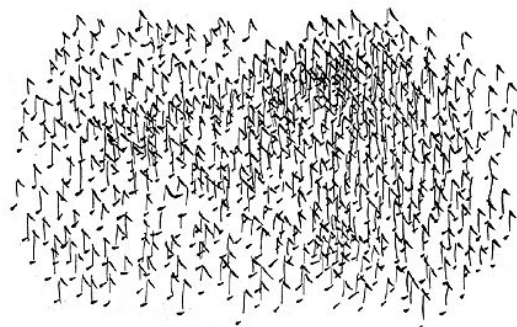
**Tom Johnson (1939 - 2024)**



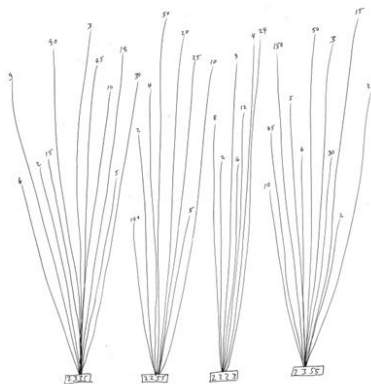
19. Pilonatnyi zavar



## Tom Johnson (1939 - 2024)

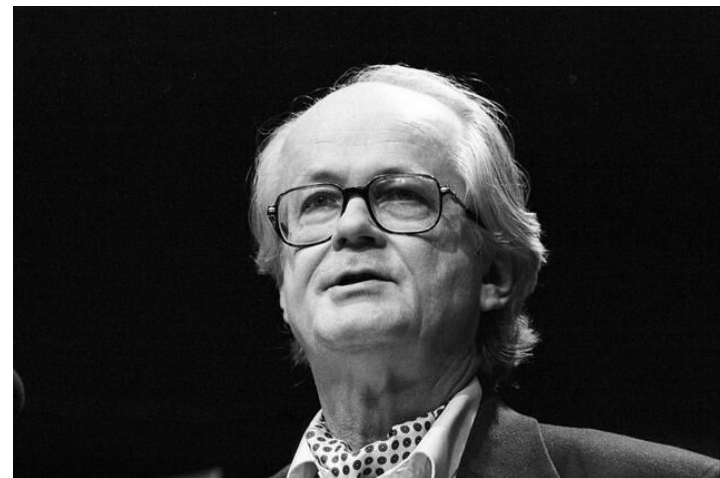
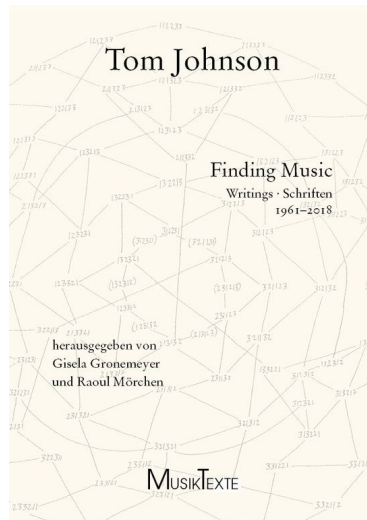
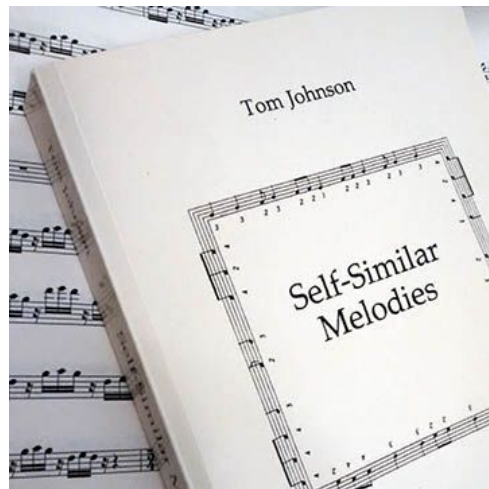


19. Pilonatnyi zavar

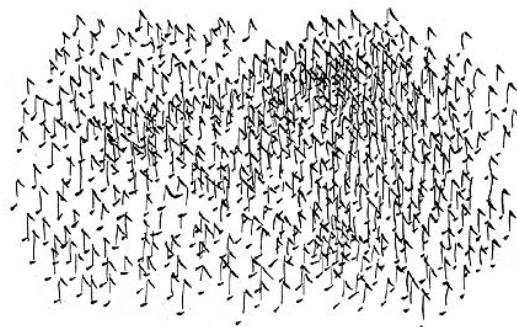


Music for 11: Euler's Harmonies (1988), excerpt  
The overtones are calculated as multiples of 2, 3, 5, and 7

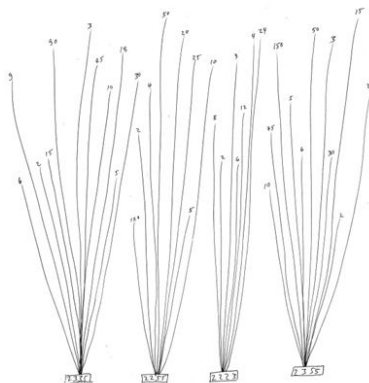
Tom Johnson 2008



## Tom Johnson (1939 - 2024)

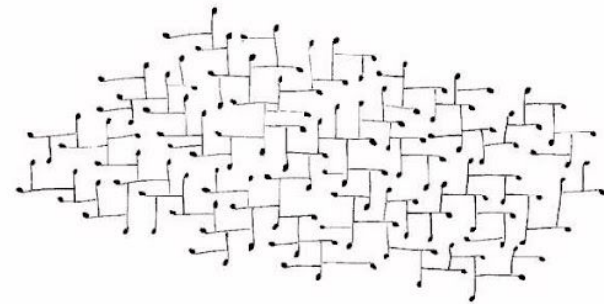


19. Pillonnatnyi zavor



Music for 11: Euler's Harmonies (1988), excerpt  
The overtones are calculated as multiples of 2, 3, and 5

Tom Johnson 2008



**Szachownice**

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej *spójnej* kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej *spójnej* kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje wszędzie nieosobliwa macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej *spójnej* kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje wszędzie nieosobliwa macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

**Twierdzenie (Thue, 1912):** Dla każdego  $n$ , istnieje macierz kwadratowa wymiaru  $n$ , o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2\}$ , której żadna spójna kwadratowa podmacierz nie zawiera dwóch identycznych wierszy ani dwóch identycznych kolumn.

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej *spójnej* kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje *wszędzie nieosobliwa* macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

**Twierdzenie (Thue, 1912):** Dla każdego  $n$ , istnieje macierz kwadratowa wymiaru  $n$ , o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2\}$ , której żadna spójna kwadratowa podmacierz nie zawiera dwóch identycznych wierszy ani dwóch identycznych kolumn.

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej *spójnej* kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje wszędzie nieosobliwa macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

**Twierdzenie (Thue, 1912):** Dla każdego  $n$ , istnieje macierz kwadratowa wymiaru  $n$ , o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2\}$ , której żadna spójna kwadratowa podmacierz nie zawiera dwóch identycznych wierszy ani dwóch identycznych kolumn.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej *spójnej* kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje wszędzie nieosobliwa macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

**Twierdzenie (Thue, 1912):** Dla każdego  $n$ , istnieje macierz kwadratowa wymiaru  $n$ , o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2\}$ , której żadna spójna kwadratowa podmacierz nie zawiera dwóch identycznych wierszy ani dwóch identycznych kolumn.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej spójnej kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje wszędzie nieosobliwa macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

**Twierdzenie (Thue, 1912):** Dla każdego  $n$ , istnieje macierz kwadratowa wymiaru  $n$ , o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2\}$ , której żadna spójna kwadratowa podmacierz nie zawiera dwóch identycznych wierszy ani dwóch identycznych kolumn.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej spójnej kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje wszędzie nieosobliwa macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

**Twierdzenie (Thue, 1912):** Dla każdego  $n$ , istnieje macierz kwadratowa wymiaru  $n$ , o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2\}$ , której żadna spójna kwadratowa podmacierz nie zawiera dwóch identycznych wierszy ani dwóch identycznych kolumn.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej spójnej kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje wszędzie nieosobliwa macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

**Twierdzenie (Thue, 1912):** Dla każdego  $n$ , istnieje macierz kwadratowa wymiaru  $n$ , o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2\}$ , której żadna spójna kwadratowa podmacierz nie zawiera dwóch identycznych wierszy ani dwóch identycznych kolumn.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej spójnej kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje wszędzie nieosobliwa macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

**Twierdzenie (Thue, 1912):** Dla każdego  $n$ , istnieje macierz kwadratowa wymiaru  $n$ , o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2\}$ , której żadna spójna kwadratowa podmacierz nie zawiera dwóch identycznych wierszy ani dwóch identycznych kolumn.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej spójnej kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje wszędzie nieosobliwa macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

**Twierdzenie (Thue, 1912):** Dla każdego  $n$ , istnieje macierz kwadratowa wymiaru  $n$ , o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2\}$ , której żadna spójna kwadratowa podmacierz nie zawiera dwóch identycznych wierszy ani dwóch identycznych kolumn.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej spójnej kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje wszędzie nieosobliwa macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

**Twierdzenie (Thue, 1912):** Dla każdego  $n$ , istnieje macierz kwadratowa wymiaru  $n$ , o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2\}$ , której żadna spójna kwadratowa podmacierz nie zawiera dwóch identycznych wierszy ani dwóch identycznych kolumn.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej spójnej kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje wszędzie nieosobliwa macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

**Twierdzenie (Thue, 1912):** Dla każdego  $n$ , istnieje macierz kwadratowa wymiaru  $n$ , o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2\}$ , której żadna spójna kwadratowa podmacierz nie zawiera dwóch identycznych wierszy ani dwóch identycznych kolumn.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej spójnej kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje wszędzie nieosobliwa macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

**Twierdzenie (Thue, 1912):** Dla każdego  $n$ , istnieje macierz kwadratowa wymiaru  $n$ , o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2\}$ , której żadna spójna kwadratowa podmacierz nie zawiera dwóch identycznych wierszy ani dwóch identycznych kolumn.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
|   |   |   |   |   |   |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej spójnej kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje wszędzie nieosobliwa macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

**Twierdzenie (Thue, 1912):** Dla każdego  $n$ , istnieje macierz kwadratowa wymiaru  $n$ , o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2\}$ , której żadna spójna kwadratowa podmacierz nie zawiera dwóch identycznych wierszy ani dwóch identycznych kolumn.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
|   |   |   |   |   |   |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej spójnej kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje wszędzie nieosobliwa macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

**Twierdzenie (Thue, 1912):** Dla każdego  $n$ , istnieje macierz kwadratowa wymiaru  $n$ , o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2\}$ , której żadna spójna kwadratowa podmacierz nie zawiera dwóch identycznych wierszy ani dwóch identycznych kolumn.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |

**Definicja:** Macierz kwadratową nazywamy *wszędzie nieosobliwą* jeżeli żaden wyznacznik jej spójnej kwadratowej podmacierzy nie jest zerowy.

**Hipoteza:** Dla każdego  $n$  istnieje wszędzie nieosobliwa macierz wymiaru  $n$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

**Twierdzenie (Thue, 1912):** Dla każdego  $n$ , istnieje macierz kwadratowa wymiaru  $n$ , o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2\}$ , której żadna spójna kwadratowa podmacierz nie zawiera dwóch identycznych wierszy ani dwóch identycznych kolumn.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |



**Jeffrey Shallit**

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |



**Jeffrey Shallit**

**Open Problem 8 (£100):** Is there a sequence on three real numbers for which all the Hankel determinants are nonzero?

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |

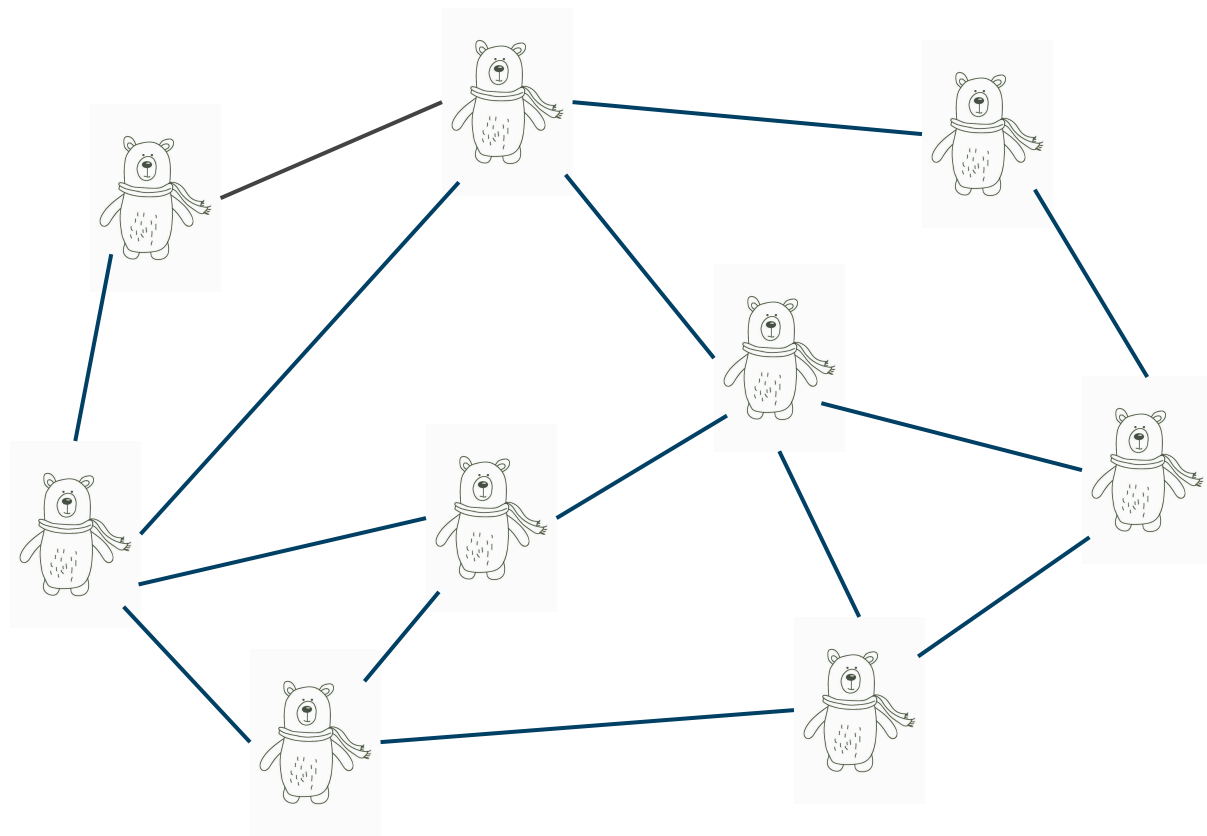


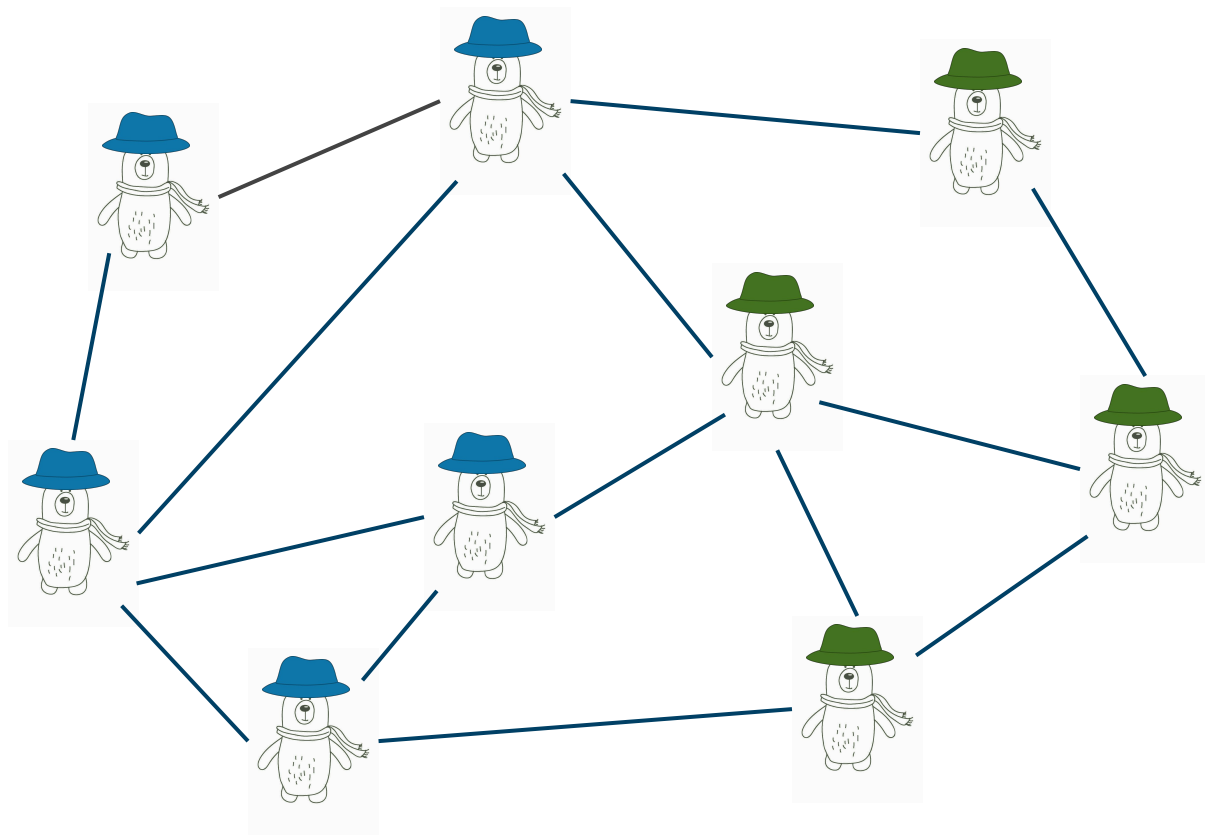
**Jeffrey Shallit**

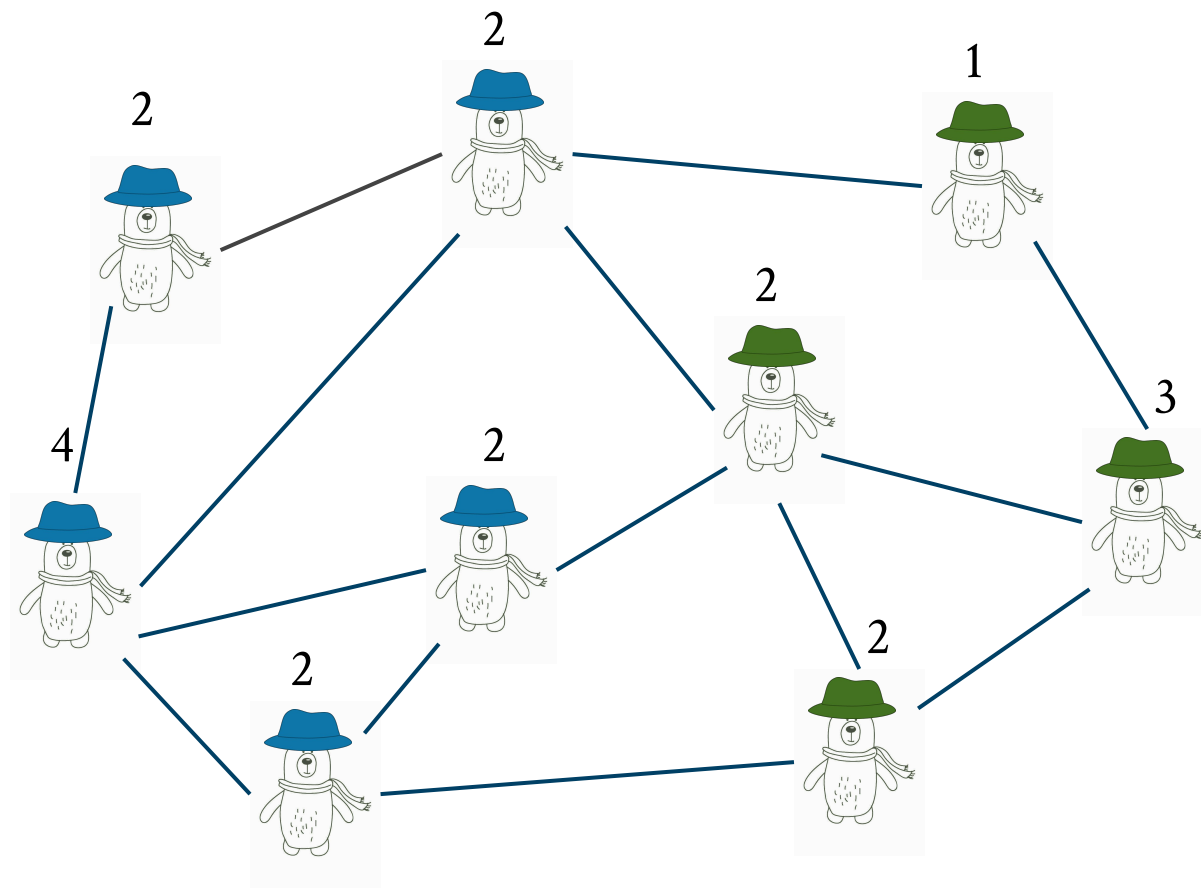
**Open Problem 8 (£100):** Is there a sequence on three real numbers for which all the Hankel determinants are nonzero?

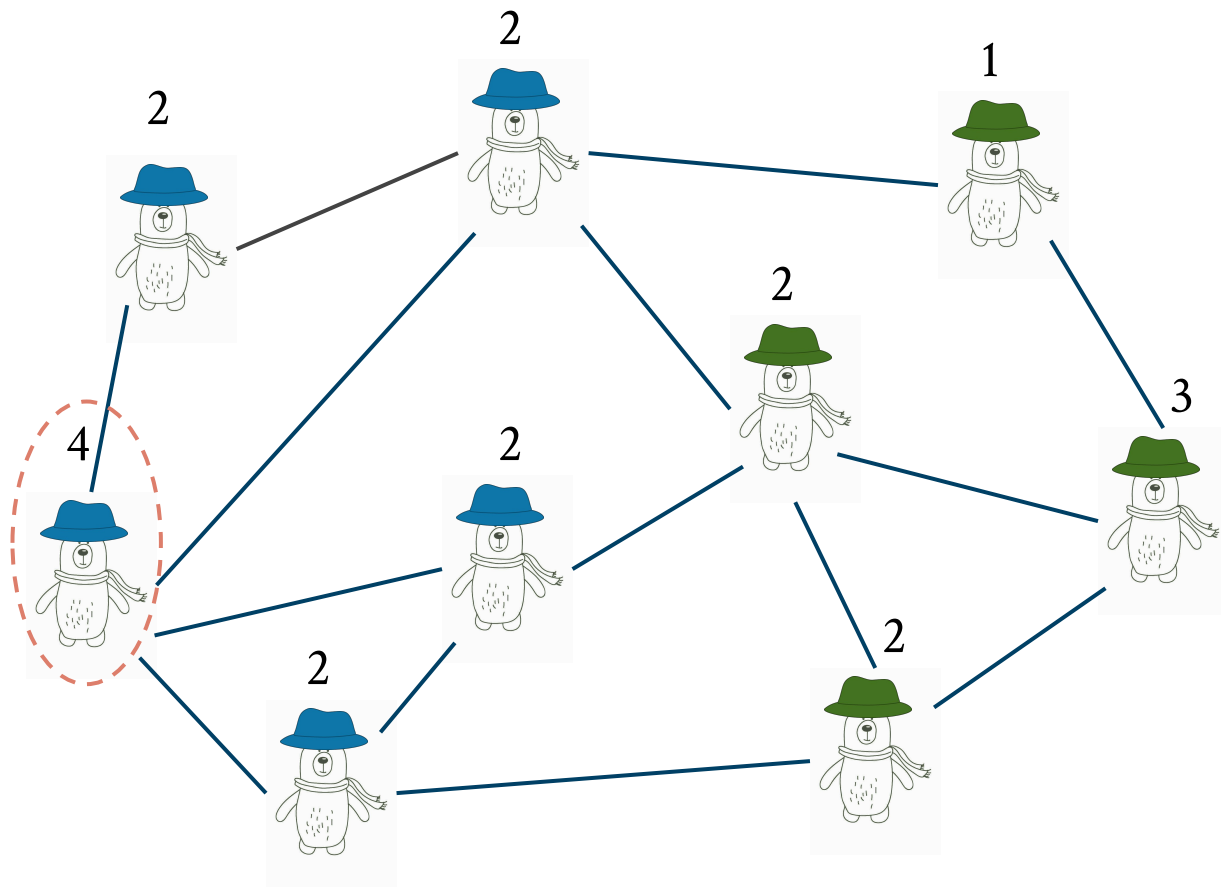
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

# **Problem czterech kolorów**





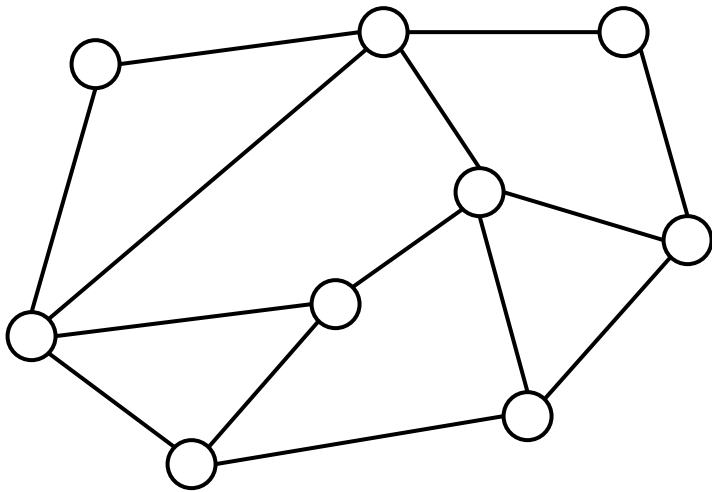




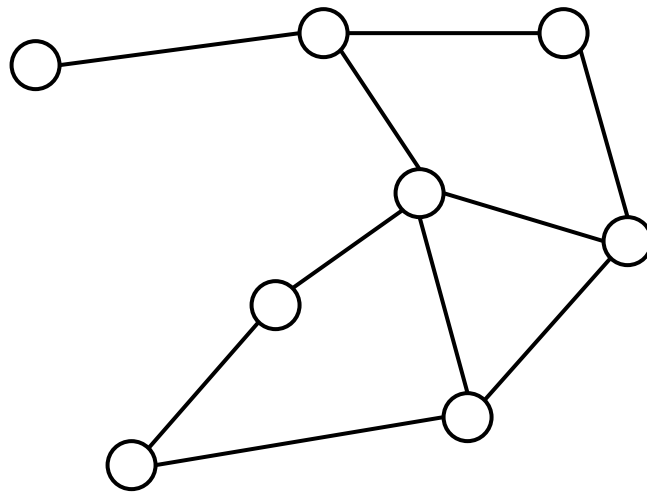


Czy każdy graf można pokolorować *czterema* kolorami tak, żeby żaden wierzchołek nie miał dokładnie *czterech* sąsiadów w swoim własnym kolorze?

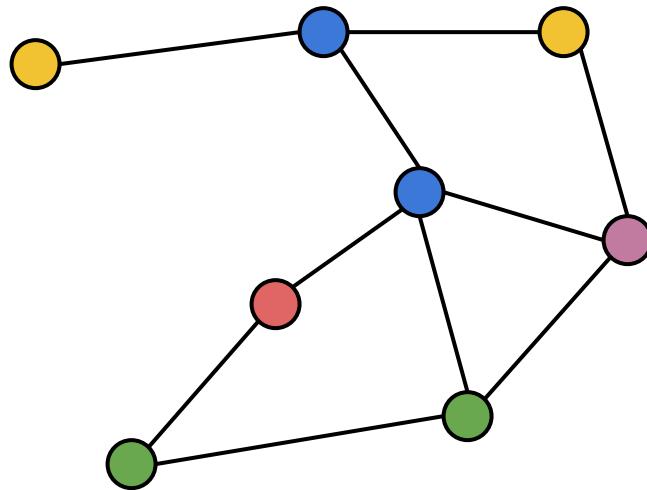
Czy każdy graf można pokolorować *czterema* kolorami tak, żeby żaden wierzchołek nie miał dokładnie *czterech* sąsiadów w swoim własnym kolorze?



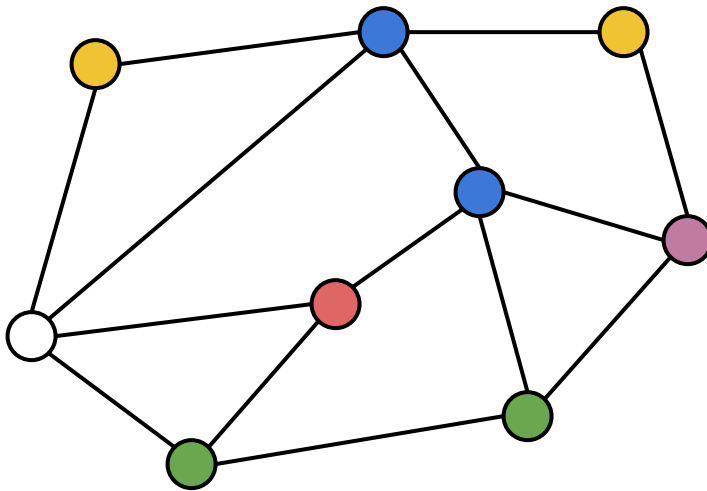
Czy każdy graf można pokolorować *czterema* kolorami tak, żeby żaden wierzchołek nie miał dokładnie *czterech* sąsiadów w swoim własnym kolorze?



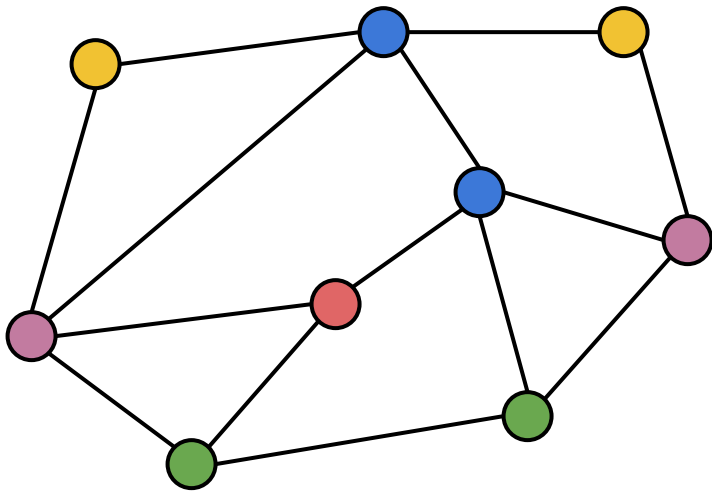
Czy każdy graf można pokolorować *czterema* kolorami tak, żeby żaden wierzchołek nie miał dokładnie *czterech* sąsiadów w swoim własnym kolorze?



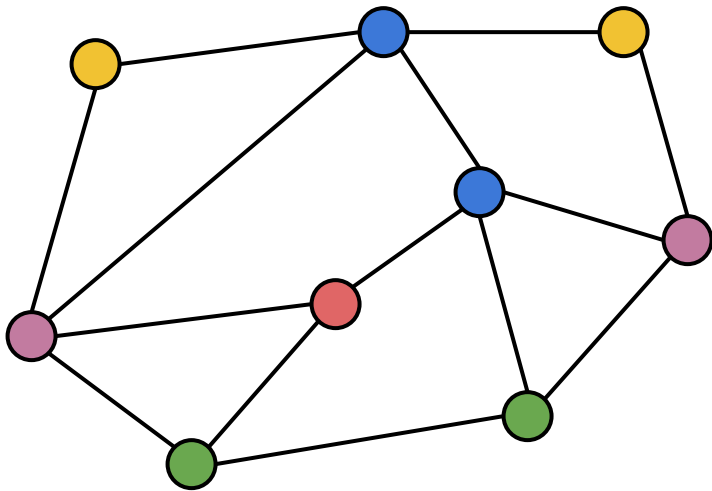
Czy każdy graf można pokolorować *czterema* kolorami tak, żeby żaden wierzchołek nie miał dokładnie *czterech* sąsiadów w swoim własnym kolorze?



Czy każdy graf można pokolorować *czterema* kolorami tak, żeby żaden wierzchołek nie miał dokładnie *czterech* sąsiadów w swoim własnym kolorze?

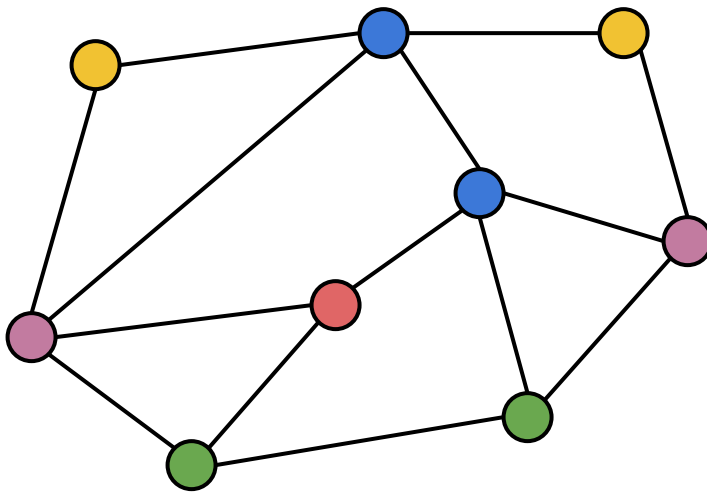


Czy każdy graf można pokolorować *czterema* kolorami tak, żeby żaden wierzchołek nie miał dokładnie *czterech* sąsiadów w swoim własnym kolorze?



**Twierdzenie:** Niech  $d \geq 0$  będzie ustaloną liczbą całkowitą. Każdy graf ma  $(d + 1)$ -kolorowanie *unikające* stopnia  $d$ .

Czy każdy graf można pokolorować *czterema* kolorami tak, żeby żaden wierzchołek nie miał dokładnie *czterech* sąsiadów w swoim własnym kolorze?



**Twierdzenie:** Niech  $d \geq 0$  będzie ustaloną liczbą całkowitą. Każdy graf ma  $(d + 1)$ -kolorowanie *unikające* stopnia  $d$ .

**Hipoteza:** Niech  $d \geq 0$  będzie ustaloną liczbą całkowitą. Każdy graf ma 3-kolorowanie *unikające* stopnia  $d$ .

# Dziękuję!

