

Z PIASKOWNICY W HIMALAJE I Z POWROTEM

NA KOŃCU NIE ZAWSZE JEST ODPOWIEDŹ

GLIWICE – SIERPIEŃ-2025

Z PIASKOWNICY W HIMALAJE I Z POWROTEM

DYWAGACJE WETERANA

KILKA UWAG

- 1. STWIERDZENIE, ŻE „**NA KOŃCU NIE ZAWSZE JEST ODPOWIEDŹ**” WYMAGA PEWNEGO KOMENTARZA. Dlaczego? NA JAKIEJ BOWIEM PODSTAWIE MOŻEMY STWIERDZIĆ, ŻE JESTEŚMY „NA KOŃCU”. WYDAJE SIĘ, ŻE JEDYNYM BEZDYSKUSYJNYM KRYTERIUM „KOŃCA” JEST POZYSKANIE ODPOWIEDZI. KAŻDE INNE „ZAKOŃCZENIE” MA CHARAKTER ARBITRALNY.
- 2. SZUKANIE ODPOWIEDZI NA PYTANIE MA **CHARAKTER BIEGU ROZSTAWNEGO – SZTAFETY**. JEDEN BIEGACZ ODDAJE PAŁECZKĘ DRUGIEMU. PRZEKAZANIE PAŁECZKI PRZED METĄ OZNACZA BRAK ODPOWIEDZI, ALE NA KOŃCU „TEJ” ZMIANY, ALE ZARAZEM OZNACZA POCZĄTEK NOWEGO BIEGU W POSZUKIWANIU ODPOWIEDZI.
- 3. SZEREG NIEPOROZUMIEŃ ZWIĄZANYCH Z „BRAKIEM ODPOWIEDZI” BIERZE SIĘ STĄD, ŻE **SFORMUŁOWANIE PYTANIA EWOLUUE Z CZASEM** W MIARĘ POZYSKIWANIA NOWYCH REZULTATÓW I „NA KOŃCU” OTRZYMujemy ODPOWIEDŹ NIE NA TO PYTANIE, CO BYŁO NA POCZĄTKU.

O MYŚLI PRZEWODNIEJ SZKOŁY

- W MATEMATYCE CZĘSTO POJAWIAJĄ SIĘ PYTANIA, NA KTÓRE W MOMENCIE ICH FORMUŁOWANIA, NIE ZNAMY ODPOWIEDZI. PYTANIA TE MAJĄ ZAZWYCZAJ FORMĘ : TWIERDZENIE **T** JEST PRAWDZIWE I, PONIEWAŻ NIE ZNAMY ODPOWIEDZI, TO OMAWIANE TWIERDZENIE NAZYWAMY **HIPOTEZĄ**. SENS MYŚLI PRZEWODNIEJ WG. MNIE JEST TAKI: (KONKRETNY) UCZONY PRZYSTĘPUJĄC DO BADANIA HIPOTEZY Z ZAMIAREM UZYSKANIA ODPOWIEDZI **NIE ZAWSZE** JĄ ZNAJDUJE. WYDAJE SIĘ, ŻE BLIŻSZA PRAWDY JEST OCENA, ŻE **RZADKO** JĄ ZNAJDUJE. CZĘŚCIEJ JEST TAK, ŻE BADACZ POZYSKUJE PEWNE INFORMACJE, KTÓRE RODZĄ NOWE PYTANIA STANOWIĄC KROK W KIERUNKU POSZUKIWANEJ ODPOWIEDZI, CHOCIAŻ NADAL NIE WIADOMO NA ILE TEN KROK JEST ISTOTNY (CZYLI JAK DALEKO JEST DO KOŃCA).

O MYŚLI PRZEWODNIEJ SZKOŁY-CD

- INACZEJ MÓWIĄC TYPOWA SYTUACJA W NAUCE JEST TAKA, ŻE ODPOWIEDŹ, O ILE JĄ UZYSKAMY, ZAZWYCZAJ NIE JEST OSTATECZNA. TA OSTATECZNA MOŻE BYĆ POZA NASZYM ZASIĘGIEM, A TO CO ROBIMY TO TYLKO KONSTRUKCJA KOLEJNYCH PRZYBLIŻEŃ. PONADTO, JEŻELI POZYSKAMY JAKĄŚ ODPOWIEDŹ, KTÓRA NASZYM ZDANIEM BĘDZIE WYPEŁNIAŁA KRYTERIA OSTATECZNOŚCI, TO MU-SIMY MIEĆ ŚWIADOMOŚĆ, **ŻE NASZA DZISIEJSZA WIEDZA JEST CZĘŚCIĄ WIEDZY PRZYSZŁEJ, CZYLI TEJ, KTÓRĄ WYTWORZĄ PRZYSZŁE POKOLENIA.**
- PRZYKŁAD: EUKLIDES POSTAWIŁ PYTANIE: CZY LICZB PIERWSZYCH JEST NIESKOŃCZENIE WIELE I UZYSKAŁ NA KOŃCU ODPOWIEDŹ ALE OD ROZUMOWANIA EUKLIDESA DO HIPOTEZY RIEMANNA DROGA JEST DALEKA.

O MYŚLI PRZEWODNIEJ SZKOŁY-CD

- ZAUWAŻMY NA KONIEC TYCH ROZWAŻAŃ OGÓLNYCH NA TEMAT MYŚLI PRZEWODNIEJ, ŻE W TEJ PARZE UPORZĄDKOWANEJ (PYTANIE, ODPOWIEDŹ) TEN PIERWSZY ELEMENT PARY – „PYTANIE” JEST DALEKO WAŻNIEJSZY NIŻ TEN DRUGI – „ODPOWIEDŹ”. PO PIERWSZE DLATEGO, ŻE PYTANIE MOŻE ISTNIEĆ BEZ ODPOWIEDZI, A ODPOWIEDŹ BEZ PYTANIA NIE MA SENSU. PO DRUGIE MATEMATYCZNA „WARTOŚĆ” ODPOWIEDZI JEST ZAZWYCZAJ DALEKO MNIEJSZA NIŻ WARTOŚĆ PYTANIA. WSPOMINANY W CZORAJ TADEUSZ WAŻEWSKI TWIERDZIŁ: „**W MATEMATYCE NAJWAŻNIEJSZE SĄ METODY**”. A TE POWSTAJĄ PRZY SZUKANIU ODPOWIEDZI NA PYTANIA.

TO CO WYŻEJ, ALE NIECO INACZEJ

- 1. TO ŻE NA KOŃCU NIE ZAWSZE JEST ODPOWIEDŹ TO NIE JEST DRAMAT, A NAWET W JAKIEJŚ MIERZE TO JEST OKOLICZNOŚĆ SZCZĘŚLIWA. DZIĘKI TEMU ZA PROBLEM MOGĄ SIĘ BRAĆ NOWI LUDZIE Z NOWYMI SIŁAMI I DZIĘKI TEMU POJAWIAJĄ SIĘ NOWE PROBLEMY I DZIĘKI TEMU MATEMATYKA ŻYJE. W NAUCE, A W MATEMATYCE W SZCZEGÓLNOŚCI, PYTANIA SĄ NIEMAL RÓWNIIE WAŻNE JAK ODPOWIEDZI. BEZ PYTAŃ NIE BYŁOBY POSTĘPU. ABY BYŁA ODPOWIEDŹ, NAJPIERW MUSI BYĆ PYTANIE. TO CO JUŻ WIEMY NIE JEST WAŻNE. WAŻNE JEST TO CZEGO NIE WIEMY. WAŻNE SĄ CHWILE, KTÓRYCH JESZCZE NIE ZNAMY (MAREK GRECHUTA)

ABSTRAKCJA I KONKRET

- O SPRAWACH ŁATWYCH MOŻNA MÓWIĆ W SPOSÓB ABSTRAKCYJNY – O SPRAWACH TRUDNYCH – WYŁĄCZNIE W OPARCIU O KONKRETNE PRZYKŁADY (A. LASOTA).
- ROZWAŻANIA ZWIĄZANE Z TEMATEM 68-SZKOŁY O ROLI HIPOTEZ W ROZWOJU NAUKI SĄ TRUDNE I DLATEGO PRZYPOMNĘ HISTORIE POZYSKANIA LUB NIE POZYSKANIA ODPOWIEDZI NA NIEKTÓRE „WIELKIE” PYTANIA POSTAWIONE OK. 100 LAT TEMU.

PROBLEM METRYZOWALNOŚCI

- WIELE ZALEŻY OD RODZAJU ZADANEGO W HIPOTEZIE PYTANIA.
- W PIERWSZEJ POŁOWIE XX w. CENTRALNYM ZAGADNIENIEM TOPOLOGII OGÓLNEJ BYŁ PROBLEM ZNALEZIENIA WKW NA TO BY PRZESTRZEŃ TOPOLOGICZNA X BYŁA METRYZOWALNA. PIERWSZYM ISTOTNYM REZULTATEM W TYM KIERUNKU BYŁO TWIERDZENIE URYSOHNA (LATA 20-TE): JEŻELI X JEST REGULARNA I MA BAZĘ PRZELICZALNĄ TO JEST METRYZOWALNA. OSTATECZNE ROZWIĄZANIE POJAWIŁO SIĘ NA POCZĄTKU LAT 50-TYCH: (NAGATA-SMIRNOW) PRZESTRZEŃ X JEST METRYZOWALNA WTW GDY JEST REGULARNA I MA BAZĘ SIGMA LOKALNIE SKOŃCZONĄ

PROBLEM METRYZOWALNOŚCI -cd

JAK DO TEGO DOSZŁO? PO URYSOHNIE I TICHONOWIE ZAPEWNE WIELU CZOŁOWYCH MATEMATYKÓW TAMTEGO CZASU ZAJMOWAŁO SIĘ PROBLEMEM METRYZOWALNOŚCI. PEWNE ELEGANCKIE TWIERDZENIE W TEJ DZIEDZINIE UDOWODNIŁ WACŁAW SIERPIŃSKI: **PRZESTRZEŃ TOPOLOGICZNA PRZELICZALNA I BEZ PUNKTÓW IZOLOWANYCH JEST HOMEOMORFICZNA Z $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$** . W LATACH 30-TYCH PROBLEM METRYZOWALNOŚCI ATAKOWAŁ WEIL BUDUJĄC **TEORIĘ PRZESTRZENI JEDNOSTAJNYCH**. W **1939** ROKU DIEUDONNE NAPISAŁ PRACĘ O PRZESTRZENIACH JEDNOSTAJNYCH, CO MOŻE ŚWIADCZYĆ O TYM, ŻE I ON INTERESOWAŁ SIĘ PROBLEMEM METRYZOWALNOŚCI. W **1944** ROKU DIEUDONNE „WYMYŚLIŁ” **POJĘCIE PARAZWARTOŚCI**, KTÓRE OKAZAŁO SIĘ KLUCZOWE DLA TWIERDZENIA O METRYZOWALNOŚCI. GDY W **1948** ROKU STONE UDOWODNIŁ, ŻE **PRZESTRZENIE METRYCZNE SĄ PARAZWARTE** TO SPRAWY POTOCZYŁY SIĘ SZYBKO BO W 1950 I 1951 NAGATA I SMIRNOW UDOWODNILI CYTOWANE TWIERDZENIE.

PROBLEM BANACHA - FRECHETA

OKOŁO 100 LAT TEMU DO MATEMATYKI WKROCZYŁY PRZESTRZENIE LINIOWE TOPOLOGICZNE I W SZCZEGÓLNOŚCI PRZESTRZENIE BANACHA I W TYM SAMYM CZASIE POJAWIŁ SIĘ PROBLEM TOPOLOGICZNEJ RÓWNOWAŻNOŚCI PRZESTRZENI BANACHA. OCZYWIŚCIE PRZESTRZENIE SKOŃCZENIE WYMIAROWE SĄ HOMEOMORFICZNE WTW, GDY MAJĄ RÓWNE WYMIARY, WIĘC OMAWIANY PROBLEM NALEŻY ROZUMIEĆ NASTĘPUJĄCO: **X,Y TO NIESKOŃCZENIE WYMIAROWE I OŚRODKOWE PRZESTRZENIE BANACHA. CZY ISTNIEJE HOMEOMORFIZM $h:X \rightarrow Y$.**

JUŻ W 1928 ROKU MAZUR UDOWODNIŁ, ŻE DLA $p > 1, q > 1$ PRZESTRZENIE l_p I l_q SĄ HOMEOMORFICZNE. JUŻ PRZED WOJNĄ ZNANE BYŁO TWIERDZENIE O UNIWERSALNOŚCI $C[0,1]$, TAK WIĘC POZYTYWNA ODPOWIEDŹ NA PROBLEM BANACHA-FRECHETA OZNACZAŁABY, ŻE $C[0,1]$ BYŁABY HOMEOMORFICZNA Z KAŻDĄ SWOJĄ PODPRZESTZENIĄ DOMKNIĘTĄ.

PROBLEM BANACHA-MAZURA -CD

WOJNA PRZERWAŁA BADANIE PROBLEMU BANACHA-MAZURA, ALE PO WOJNIE, W 1948 ROKU DRAŹNIE TEGO PROBLEMU ROZPOCZĄŁ MŁODY WTEDY MATEMATYK UKRAIŃSKI **MICHAŁ KADEK**. PO ZROBIENIU DOKTORATU W CHARKOWIE ROZPOCZĄŁ PUBLIKOWANIE SERII PRAC, W KTÓRYCH ROZSZERZAŁ TWIERDZENIE (METODĘ) MAZURA DOWODZĄC ISTNIENIE HOMEOMORFIZMU DLA CORAZ TO WIĘKSZYCH KLAS PRZESTRZENI BANACHA. W OSIĄGNIECIU OSTATECZNEGO SUKCESU (1967) POMOGŁO PEWNE TWIERDZENIE **PEŁCZYŃSKIEGO** (METODA ROZKŁADU. TWIERDZENIE BARTELA-GRAVESA O SELEKCJI).

ISTNIENIE SUPLEMENTU

- W ANALIZIE FUNKCJONALNEJ, W DRUGIEJ POŁOWIE UBIEGŁEGO WIEKU, WIODĄCYM BYŁ KRĄG BADAŃ ZWIĄZANYCH Z PROBLEMEM ISTNIENIA BAZY SCHAUDERA W OŚRODKOWYCH PRZESTRZENIACH BANACHA (PROBLEM 137 Z KSIĘGI SZKOCKIEJ) ORAZ Z PROBLEMEM ISTNIENIA NIETRYWIALNEGO SUPLEMENTU (ROZKŁADU PRZESTRZENI NA PRODUKT, RZUTOWANIA CIĄGŁEGO NA PODPRZESTRZEŃ). W LATACH TRZYDZIESTYCH WIADOMO BYŁO, ŻE WSZYSTKIE KLASYCZNE PRZESTRZENIE MAJĄ BAZY. PONADTO MAZUR ZAUWAŻYŁ, ŻE KAŻDA NIESKOŃCZENIE WYMIAROWA PRZESTRZEŃ ZAWIERA NIETRYWIALNĄ PODPRZESTRZEŃ Z BAZĄ. ALE ZARAZEM BANACH Z MAZUREM ZAUWAŻYLI, ŻE W $C[0,1]$ NIE KAŻDA PODPRZESTRZEŃ JEST UZUPEŁNIALNA. NA POCZĄTKU LAT 70-TYCH LINDENSTRAUSS I TZAFRIRI UDOWODNILI, ŻE JEDYNĄ PRZESTRZENIĄ W KTÓREJ KAŻDA PODPRZESTRZEŃ JEST UZUPEŁNIALNA, JEST PRZESTRZEŃ HILBERTA.

BAZY SCHAUDERA - SUPLEMENTY

- KLUCZOWYM KROKIEM W DZIEDZINIE BAZY SCHAUDERA BYŁA PRACA **GROTHENDICKA** O ILOCZYNACH TENSOROWYCH, W KTÓREJ WYODRĘBNIŁ ON PEWNĄ WŁASNOŚĆ SŁABSZĄ OD POSIADANIA BAZY (IDENTYCZNOŚĆ JEST GRANICĄ PUNKTOWO ZBIEŻNEGO CIĄGU OPERATORÓW ZWARTYCH-TZW WŁASNOŚĆ APROKSYMACJI (WA)). W LATACH 70-TYCH ENFLÖ WYKAZAŁ, ŻE **ISTNIEJE PRZESTRZEŃ BEZ WŁASNOŚCI APROKSYMACJI** ZA CO OTRZYMAŁ OBIECANĄ PRZEZ **MAZURĄ ŻYWĄ GĘŚ**.
- W LATACH 70-TYCH MAUREY WYKAZAŁ, ŻE ISTNIEJE PRZESTRZEŃ BANACHA BEZ BEZWARUNKOWEGO CIĄGU BAZOWEGO.
- OKOŁO 20 LAT PÓŹNIEJ **GOWERS** WYKAZAŁ, ŻE **ISTNIEJE PRZESTRZEŃ DZIEDZICZNIE NIEROZKŁADALNA**.

SZTAFETY Z PRZYKŁADÓW

- HAUSDORF $\rightarrow$ URYSOHN $\rightarrow$ WEIL $\rightarrow$ DIEUDONNE $\rightarrow$ STONE $\rightarrow$ NAGATA – SMIRNOW (METRYZACJA)
- SCHAUDER $\rightarrow$ MAZUR $\rightarrow$ GROTHENDIECK $\rightarrow$ ENFLO (BAZY)
- BANACH-MAZUR $\rightarrow$ LINDENSTRAUSS $\rightarrow$ MAUREY $\rightarrow$ GOWERS (SUPLEMENTY)
- BANACH-FRECHET $\rightarrow$ KADEC $\rightarrow$ PEŁCZYŃSKI $\rightarrow$ KADEC

USPRAWIEDLIWIENIE TYTUŁU: *Z PIASKOWNICY W HIMALAJE I Z POWROTEM*

GDY OTRZYMAŁEM ZAPROSZENIE DO UDZIAŁU W 68-MEJ SZKOLE, TO MIAŁEM PODOBNY KŁOPOT JAK WIELU PRELEGENTÓW ZWIĄZANY Z PODANIEM TYTUŁU I ABSTRAKTU PRZYSZŁEGO REFERATU. W SWOIM MAILU ANONSUJĄCYM TEMATYKĘ TEJ SZKOŁY, KOLEGA BŁASZCZYK UŻYŁ FRAZY :

...*PIASKOWNICOWY PROBLEM COLLATZ'A I HIMALAJE HIPOTEZY RIEMANN'A*

TO PONIEWAŻ ZDARZYŁO MI SIĘ, EMERYTEM BĘDĄC, „POPEŁNIĆ” DWIE PRACE POWIĄZANE WŁAŚNIE Z PROBLEMEM COLLATZ'A I HIPOTEZĄ RIEMANN'A, TO TO JEST PRZYCZYNA WYBRANIA TAKIEGO, A NIE INNEGO TYTUŁU. TE DWIE PRACE (JEDNA WSPÓLNA Z MOJĄ CÓRKĄ), CHOCIAŻ DOTYCZĄ NADER WAŻNYCH PROBLEMÓW, SĄ *TREŚCIOWO RACZEJ SKROMNE*, ALE OPOWIADAJĄC CO CZUJE MATEMATYK „*DŁUBIĄC*” W TAKIEJ PROBLEMATYCE, BĘDĘ OPISYWAŁ „*NAJPRAWDZIWszą PRAWDĘ*”

HIPOTEZA COLLATZ'A

- PRZYPOMNIENIE SFORMUŁOWANIA: NIECH $|n|_2$ OZNACZA NORMĘ DWUADYCZNĄ LICZBY $n \in \mathbb{N}$, NIECH $X = 2\mathbb{N} + 1$ I NIECH $T: X \rightarrow X$ DANE BĘDZIE WZOREM $T(X) = (3x+1) \cdot |3x+1|_2$. NIECH T^k OZNACZA k -tą ITERACJĘ TRANSFORMACJI T . HIPOTEZA COLLATZ'A POSTULUJE, ŻE DLA KAŻDEGO $x \in X$ ORBITA x ZAWIERA LICZBĘ 1.
- TWIERDZENIE (H.T-G,E.T). NIECH (X,T) OZNACZA PRZESTRZEŃ TOPOGICZNĄ $2\mathbb{N}+1$ Z TOPOLOGIĄ FURSTENBERGA. WÓWCZAS T JEST CIĄGŁA I ZBIÓR $S \subset X$ ZŁOŻONY Z TYCH PUNKTÓW, KTÓRE MAJĄ SKOŃCZONY STOPPING TIME JEST DOMKNIĘTY I NIGDZIE GĘSTY.

DLACZEGO TO TWIERDZENIE „PASUJE” DO TEMATU SZKOŁY? BO SZUKALIŚMY CZEGOŚ INNEGO, CO PO CZĘŚCI ZNALEŻLIŚMY, A POWYŻSZE TWIERDZENIE JEST „PRODUKTEM UBOCZNYM”.

TWIERDZENIE RIHO TERRASA

- TERRAS: ZBIÓR PUNKTÓW S KTÓRE MAJĄ SKOŃCZONY STOPPING TIME MA NATURALNĄ GĘSTOŚĆ $=0$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) * \text{card}([1,x] \cap S) = 0$).
- Badaliśmy pewne uogólnienie transgormacji Collatz'a (p liczba pierwsza >3 , $T_p(x) = T(x)$ gdy p nie dzieli $3x+1$ oraz $T_p(x) = 3x+2$ gdy p dzieli $3x+1$).

KOMENTARZE

- PRACA NAD HIPOTEZĄ **H** MOŻE BYĆ PRZYRÓWNANA DO EGZOTYCZNEGO BIEGU SZTAFETOWEGO ODBYWAJĄCEGO SIĘ WG NASTĘPUJĄCYCH REGUŁ:
- 1. START NASTĘPUJE W MIEJSCU O NAPISIE „PYTANIE”, KONIEC (META) NASTĘPUJE W MIEJSCU O NAPISIE „ODPOWIEDŹ”.
- 2. NA PIERWSZEJ ZMIANIE BIEGNIĘ DOWOLNA LICZBA ZAWODNIKÓW, KAŻDY PO SWOIM TORZE.
- 3. GDY KTÓRYŚ Z ZAWODNIKÓW PIERWSZEJ ZMIANY PRZESTANIE BYĆ ZAINTERESOWANY BIEGIEM, KŁADZIE PAŁECZKĘ NA SWOIM TORZE. MOŻE TĘ PAŁECZKĘ PODNIEŚĆ KTOKOLWIEK I BIEC DALEJ NA DRUGIEJ ZMIANIE. ALE TA PODNIESIONA PAŁECZKA NIE ZNIKA I MOŻE JĄ PODNIEŚĆ KTOŚ INNY I BIEC NA DRUGIEJ ZMIANIE PO SWOIM INDYWIDUALNYM TORZE.
- 4. NA k-TEJ ZMIANIE OBOWIĄZUJĄ TE SAME REGUŁY CO NA PIERWSZEJ.
- 5. GDY KTÓRYŚ Z BIEGACZY OSIĄGNIĘ METĘ, POWIADAMIA O TYM INNYCH BIEGACZY.

UWAGI (2)

- 2. SĄ PYTANIA „WIELKIE” I „MAŁE”. WIELKIE JEST PYTANIE O KRYTERIA METRYZOWALNOŚCI A PYTANIA O PEWNE WARUNKI TYLKO KONIECZNE, CZY TYLKO WYSTARCZAJĄCE, TO PYTANIA „MNIEJSZE”. TWIERDZENIE URYSOHNA PODAJĄCE WARUNEK WYSTARCZAJCY METRYZOWALNOŚCI JEST ODPOWIEDZIĄ NA PYTANIE MNIEJSZE, PODOBNIK JAK TWIERDZENIE TIETZEGO. PODAJĄCE WARUNEK KONIECZNY.
- 3. W PRZYPADKU PROBLEMU ROZKŁADALNOŚCI MAMY DWA BIEGUNY – NA JEDNYM JEST PRZESTRZEŃ HILBERTA A NA DRUGIM PRZESTRZENIE DZIEDZICZNIE NIEROZKŁADALNE.

SKĄD TYTUŁ?

- W ZAPROSZENIU DO UCZESTNICTWA SZKOLE POJAWIŁY SIĘ OKREŚLENIA „PIASKOWNICOWY PROBLEM COLLATZA” I „HIMALAJE HIPOTEZY RIEMANNA” TO, PONIEWAŻ W MOICH WĘDRÓWKACH PO MATEMATYCE OCIERAŁEM SIĘ O TE PROBLEMY, TO POSTANOWIŁEM O TYM OPOWIEDZIEĆ NA BAZIE MOICH OSOBISTYCH DOŚWIADCZEŃ