

Jakie biologiczne zagadki pomogła rozwiązać matematyka?

Elżbieta Ratajczyk

Politechnika Lubelska

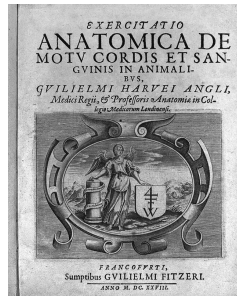
LXVIII Szkoła Matematyki Poglądowej

Wstrzymał płuca, ruszył serce

Wstrzymał płuca, ruszył serce



William Harvey, 1578-1657

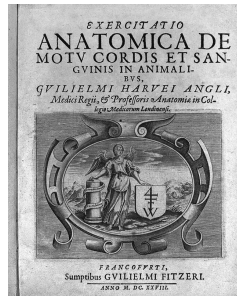


Wstrzymał płuca, ruszył serce



William Harvey, 1578-1657

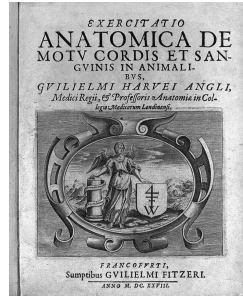
60 ml



Wstrzymał płuca, ruszył serce



William Harvey, 1578-1657

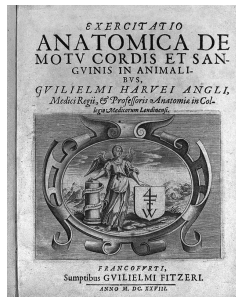


60 ml $\times$ 1/8

Wstrzymał płuca, ruszył serce



William Harvey, 1578-1657

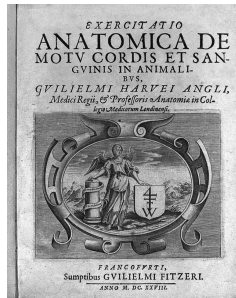


$60 \text{ ml} \times 1/8 \times 60 \text{ uderzeń/minutę}$

Wstrzymał płuca, ruszył serce



William Harvey, 1578-1657

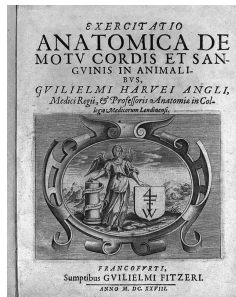


$60 \text{ ml} \times 1/8 \times 60 \text{ uderzeń/minutę} \times 60 \text{ minut/godzinę}$

Wstrzymał płuca, ruszył serce



William Harvey, 1578-1657

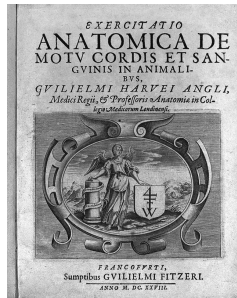


$$\begin{aligned} 60 \text{ ml} \times 1/8 \times 60 \text{ uderzeń/minutę} \times 60 \text{ minut/godzinę} \\ = 27 \text{ litrów/godzinę} \end{aligned}$$

Wstrzymał płuca, ruszył serce



William Harvey, 1578-1657



$$60 \text{ ml} \times 1/8 \times 60 \text{ uderzeń/minutę} \times 60 \text{ minut/godzinę} \\ = 27 \text{ litrów/godzinę} \gg 5 \text{ litrów}$$

The KISS principle

The KISS principle

Keep It Simple, Stupid!

The KISS principle

Keep It Smart and Simple.

Reguła BUZI

Reguła BUZI

Bez Udziwnień Zapisu, Idioto.

Reguła CMOK

Reguła CMOK

Człowieku, Modeluj Oszczędnie i Klarownie.

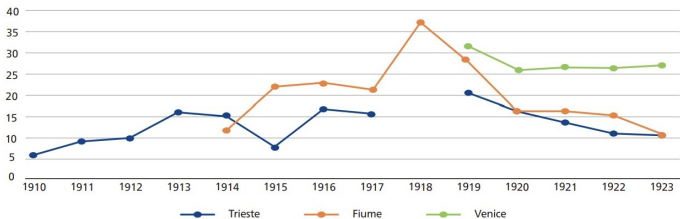
65. Szkoła Matematyki Poglądowej

Uogólnienia

Logistyczny model wzrostu populacji, jego wady i wynikające z nich całkowicie błędne wnioski

Krzysztof Argasiński

Model logistyczny jest jednym z najstarszych przykładów nieliniowych równań różniczkowych. W referacie zostanie przedstawiona historia debaty na temat jego interpretacji i wyciąganych z niej (błędnych i nie uzasadnionych) wniosków w ekologii i biologii ewolucyjnej. Część z tych wniosków, jak na przykład tzw. koncepcja doboru r i K ma w zasadzie magiczny charakter. Przedstawione problemy pokazują że w przypadku zastosowań matematyki do opisu zjawisk przyrodniczych, łatwo utracić kontakt z rzeczywistością i dlatego bardzo ważne jest sensowne osadzenie abstrakcyjnych pojęć matematycznych w realnym świecie.



Rys. Odsetek ryb chrzęstnoszkieletowych w połowach w trzech głównych portach północnego Adriatyku przed, w trakcie i po I wojnie światowej.

Model Lotki – Volterry

$x(t)$ – ilość ofiar, $y(t)$ – drapieżników w czasie t

$$\dot{x} = rx$$

$$\dot{y} = -sy$$

Model Lotki – Volterry

$x(t)$ – ilość ofiar, $y(t)$ – drapieżników w czasie t

$$\dot{x} = rx - axy$$

$$\dot{y} = bxy - sy$$

Model Lotki – Volterry

$x(t)$ – ilość ofiar, $y(t)$ – drapieżników w czasie t

$$\dot{x} = rx - axy$$

$$\dot{y} = bxy - sy$$

Stany stacjonarne:

$$\begin{cases} x(r - ay) = 0 \\ y(bx - s) = 0 \end{cases}$$

Model Lotki – Volterry

$x(t)$ – ilość ofiar, $y(t)$ – drapieżników w czasie t

$$\dot{x} = rx - axy$$

$$\dot{y} = bxy - sy$$

Stany stacjonarne:

$$\begin{cases} x(r - ay) = 0 \\ y(bx - s) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{s}{b} \\ y = \frac{r}{a} \end{cases}$$

Model Lotki – Volterry

$x(t)$ – ilość ofiar, $y(t)$ – drapieżników w czasie t

$$\dot{x} = rx - axy$$

$$\dot{y} = bxy - sy$$

Stany stacjonarne:

$$\begin{cases} x(r - ay) = 0 \\ y(bx - s) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \bar{x} = \frac{s}{b} \\ \bar{y} = \frac{r}{a} \end{cases}$$

$$\dot{x} = rx - axy$$

$$\dot{y} = bxy - sy$$

$$\dot{x} = rx - axy$$

$$\dot{y} = bxy - sy$$

Twierdzenie

Funkcja

$$E(x, y) = s \ln x - bx + r \ln y - ay$$

jest całką pierwszą układu L-V.

$$\dot{x} = rx - axy$$

$$\dot{y} = bxy - sy$$

Twierdzenie

Funkcja

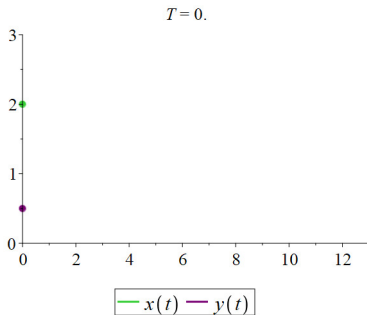
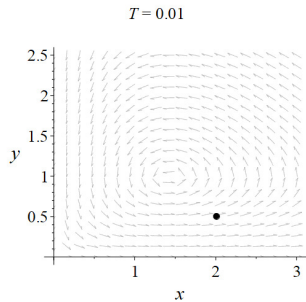
$$E(x, y) = s \ln x - bx + r \ln y - ay$$

jest całką pierwszą układu L-V.

Dowód:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) &= \left(\frac{s}{x} - b\right)(rx - axy) + \left(\frac{r}{y} - a\right)(bxy - sy) \\ &= (s - bx)(r - ay) + (r - ay)(bx - s) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Trajektorie rozwiązań układu Lotki – Volterra



$$\dot{x} = rx - axy$$

$$\dot{y} = bxy - sy$$

Twierdzenie

Wszystkie rozwiązania układu L-V mają taką samą średnią równą

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{s}{b}, \frac{r}{a} \right).$$

$$\dot{x} = rx - axy$$

$$\dot{y} = bxy - sy$$

Twierdzenie

Wszystkie rozwiązania układu L-V mają taką samą średnią równą

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{s}{b}, \frac{r}{a} \right).$$

Dowód: Niech T będzie okresem rozwiązania układu L-V z warunkiem początkowym (x_0, y_0) . Wtedy

$$\frac{\dot{x}}{x} = r - ay \implies \ln \frac{x(T)}{x_0} = rT - a \int_0^T y(t) dt$$

$$\dot{x} = rx - axy$$

$$\dot{y} = bxy - sy$$

Twierdzenie

Wszystkie rozwiązania układu L-V mają taką samą średnią równą

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{s}{b}, \frac{r}{a} \right).$$

Dowód: Niech T będzie okresem rozwiązania układu L-V z warunkiem początkowym (x_0, y_0) . Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{x} = r - ay &\implies \ln \frac{x(T)}{x_0} = rT - a \int_0^T y(t) \, dt \\ &\implies \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \, dt = \frac{r}{a} \end{aligned}$$

$$\dot{x} = rx - axy$$

$$\dot{y} = bxy - sy$$

Twierdzenie

Wszystkie rozwiązania układu L-V mają taką samą średnią równą

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{s}{b}, \frac{r}{a} \right).$$

Dowód: Niech T będzie okresem rozwiązania układu L-V z warunkiem początkowym (x_0, y_0) . Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{x} = r - ay &\implies \ln \frac{x(T)}{x_0} = rT - a \int_0^T y(t) \, dt \\ \implies \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \, dt &= \frac{r}{a} = \bar{y}. \end{aligned}$$

□

Efekt braku połowów w czasie I wojny światowej

Efekt braku połowów w czasie I wojny światowej

$$\dot{x} = rx - axy + \varepsilon x$$

$$\dot{y} = bxy - sy + \delta y$$

Efekt braku połowów w czasie I wojny światowej

$$\dot{x} = (r + \varepsilon)x - axy$$

$$\dot{y} = bxy - (s - \delta)y$$

Wtedy

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{s - \delta}{b}, \frac{r + \varepsilon}{a} \right)$$

Czerwiec w Ameryce

$$\dot{x} = rx - axy - \varepsilon x$$

$$\dot{y} = bxy - sy - \delta y$$

$$\dot{x} = rx - axy - \varepsilon x$$

$$\dot{y} = bxy - sy - \delta y$$

Wtedy

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{s + \delta}{b}, \frac{r - \varepsilon}{a} \right)$$

$$\dot{x} = rx - axy - \varepsilon x$$

$$\dot{y} = bxy - sy - \delta y$$

Wtedy

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{s + \delta}{b}, \frac{r - \varepsilon}{a} \right)$$

Paradoks pestycydów

Zastosowanie pestycydu może skutkować zwiększeniem populacji szkodników, jeśli mają one naturalnego wroga.

Model Rosenzweiga – MacArthura

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right)$$

$$\dot{y} = -sy$$

Model Rosenzweiga – MacArthura

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy \\ \dot{y} &= bxy - sy\end{aligned}$$

Model Rosenzweiga – MacArthura

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy \\ \dot{y} &= bxy - sy\end{aligned}$$

V – liczba ofiar, które są atakowane,

τ – czas „obsługi” ofiary,

T – całkowity czas,

$$V = \alpha x(T - \tau V)$$

Model Rosenzweiga – MacArthura

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy \\ \dot{y} &= \beta xy - sy\end{aligned}$$

V – liczba ofiar, które są atakowane,

τ – czas „obsługi” ofiary,

T – całkowity czas,

$$V = \alpha x(T - \tau V) \implies V = \frac{\alpha T x}{1 + \alpha \tau x}$$

Model Rosenzweiga – MacArthura

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{bx}{a+x}y \\ \dot{y} &= \frac{cx}{a+x}y - sy\end{aligned}$$

V – liczba ofiar, które są atakowane,

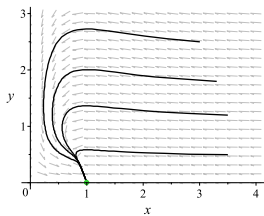
τ – czas „obsługi” ofiary,

T – całkowity czas,

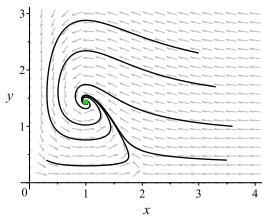
$$V = \alpha x(T - \tau V) \implies V = \frac{\alpha T x}{1 + \alpha \tau x}$$

Paradoks wzbogacenia

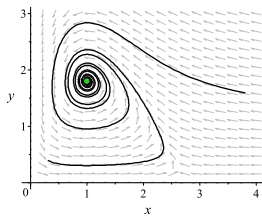
$K = 1$



$K = 2$

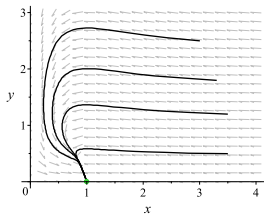


$K = 3$

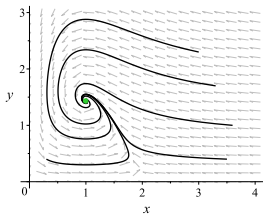


Paradoks wzbogacenia

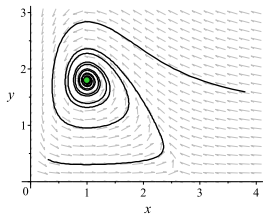
$K = 1$



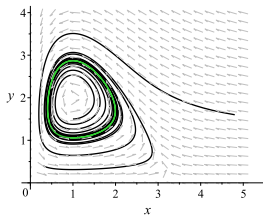
$K = 2$



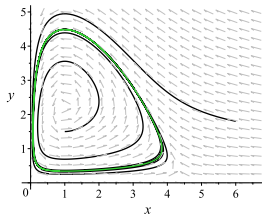
$K = 3$



$K = 4$



$K = 5$



Łańcuch pokarmowy

$$\dot{x} = qx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy$$

$$\dot{y} = bxy - ry$$

Łańcuch pokarmowy

$$\dot{x} = qx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy$$

$$\dot{y} = bxy - ry - cyz$$

$$\dot{z} = dyz - sz$$

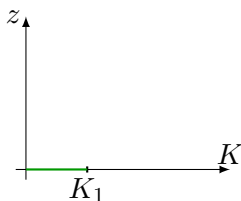
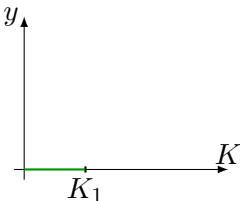
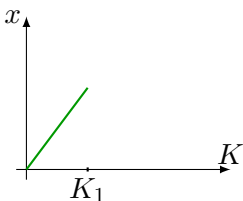
Łańcuch pokarmowy

$$\dot{x} = qx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy$$

$$\dot{y} = bxy - ry - cyz$$

$$\dot{z} = dyz - sz$$

Stabilne stany stacjonarne:



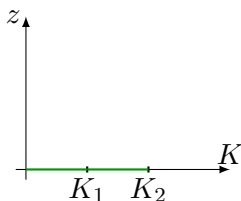
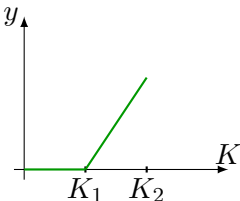
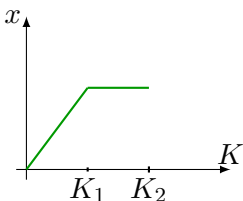
Łańcuch pokarmowy

$$\dot{x} = qx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy$$

$$\dot{y} = bxy - ry - cyz$$

$$\dot{z} = dyz - sz$$

Stabilne stany stacjonarne:



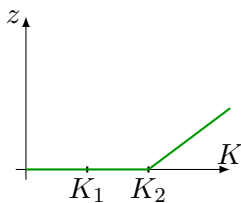
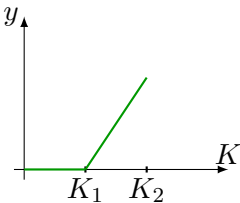
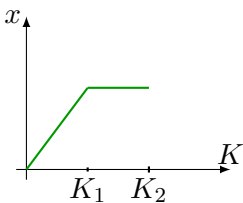
Łańcuch pokarmowy

$$\dot{x} = qx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy$$

$$\dot{y} = bxy - ry - cyz$$

$$\dot{z} = dyz - sz$$

Stabilne stany stacjonarne:



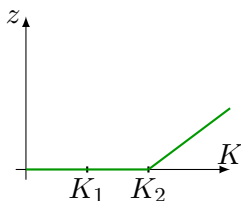
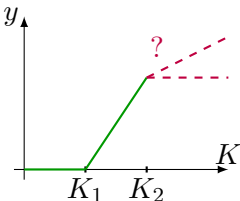
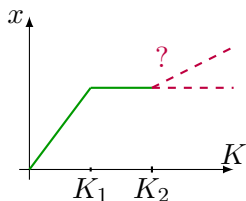
Łańcuch pokarmowy

$$\dot{x} = qx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy$$

$$\dot{y} = bxy - ry - cyz$$

$$\dot{z} = dyz - sz$$

Stabilne stany stacjonarne:



Konkurencja międzygatunkowa

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1} \right) \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2} \right) \end{aligned}$$

Konkurencja międzygatunkowa

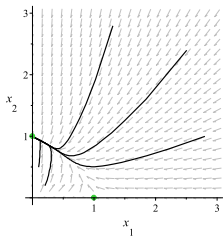
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - a_1 x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - a_2 x_1 x_2\end{aligned}$$

Konkurencja międzygatunkowa

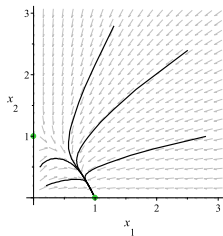
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1 + b_1 x_2}{K_1} \right) \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2 + b_2 x_1}{K_2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1 + b_1 x_2}{K_1} \right) \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2 + b_2 x_1}{K_2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_1 \frac{K_2}{K_1} &> 1, \\ b_2 \frac{K_1}{K_2} &< 1:\end{aligned}$$

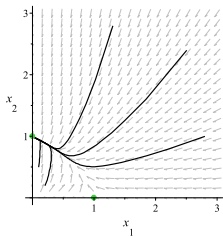


$$\begin{aligned}b_1 \frac{K_2}{K_1} &< 1, \\ b_2 \frac{K_1}{K_2} &> 1:\end{aligned}$$

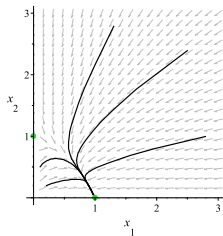


$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1 + b_1 x_2}{K_1}\right) \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2 + b_2 x_1}{K_2}\right)\end{aligned}$$

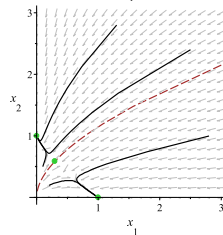
$$b_1 \frac{K_2}{K_1} > 1, \\ b_2 \frac{K_1}{K_2} < 1:$$



$$b_1 \frac{K_2}{K_1} < 1, \\ b_2 \frac{K_1}{K_2} > 1:$$

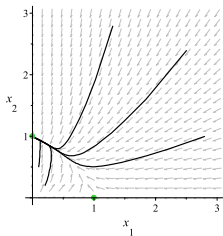


$$b_1 \frac{K_2}{K_1} > 1, \\ b_2 \frac{K_1}{K_2} > 1:$$

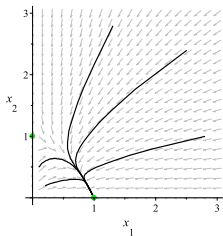


$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1 + b_1 x_2}{K_1}\right) \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2 + b_2 x_1}{K_2}\right)\end{aligned}$$

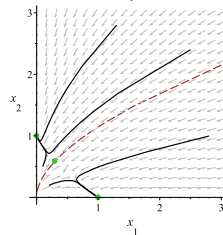
$$b_1 \frac{K_2}{K_1} > 1, \\ b_2 \frac{K_1}{K_2} < 1:$$



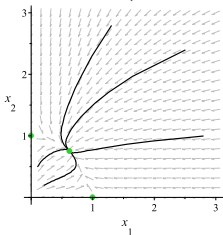
$$b_1 \frac{K_2}{K_1} < 1, \\ b_2 \frac{K_1}{K_2} > 1:$$



$$b_1 \frac{K_2}{K_1} > 1, \\ b_2 \frac{K_1}{K_2} > 1:$$

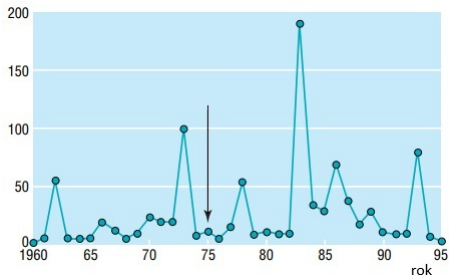


$$b_1 \frac{K_2}{K_1} < 1, \\ b_2 \frac{K_1}{K_2} < 1:$$

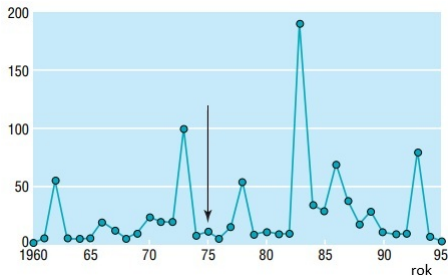


Zasada Gausego

Dwa gatunki o identycznych wymaganiach (mające takie same nisze ekologiczne) nie mogą współistnieć ze sobą na tym samym obszarze: z czasem, w wyniku konkurencji jeden zostaje wyparty.



Rys. Liczba zachorowań na zespół różyczki wrodzonej na 100 000 mieszkańców Grecji w latach 1960-95.



Rys. Liczba zachorowań na zespół różyczki wrodzonej na 100 000 mieszkańców Grecji w latach 1960-95.

1975r. – początek masowych szczepień przeciwko różyczce

Model SIR

$S(t)$ – liczba osób podatnych, $I(t)$ – zainfekowanych,
 $R(t)$ – ozdrowiałych, w czasie t

$$\dot{S} = dN - (\beta I + d)S$$

$$\dot{I} = \beta IS - (\gamma + d)I$$

$$\dot{R} = \gamma I - dR$$

Model SIR

$S(t)$ – liczba osób podatnych, $I(t)$ – zainfekowanych,
 $R(t)$ – ozdrowiałych, w czasie t

$$\dot{S} = dN - (\beta I + d)S$$

$$\dot{I} = \beta IS - (\gamma + d)I$$

$$\dot{R} = \gamma I - dR$$

Bazowy współczynnik reprodukcji:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma + d} \cdot N$$

Model SIR ze strukturą wiekową

$s(a, t)$ – gęstość osobników podatnych, $i(a, t)$ – zainfekowanych,
 $r(a, t)$ – ozdrowiałych, w wieku a w czasie t

$$\dot{s}_t = -\dot{s}_a - (\beta I + d)s$$

$$\dot{i}_t = -\dot{i}_a + \beta I s - (\gamma + d)i$$

$$\dot{r}_t = -\dot{r}_a + \gamma i - dr$$

$$I(t) = \int_0^\infty i(a, t) da, \quad N(t) = \int_0^\infty (s(a, t) + i(a, t) + r(a, t)) da$$

$$s(0, t) = dN(t), \quad i(0, t) = 0, \quad r(0, t) = 0$$

[...] Średni wiek zachorowania:

$$\bar{a} = \frac{1}{d \cdot R_0} = \frac{1}{d \cdot \frac{\beta}{\gamma+d} \cdot N}$$

[...] Średni wiek zachorowania:

$$\bar{a} = \frac{1}{d \cdot R_0} = \frac{1}{d \cdot \frac{\beta}{\gamma+d} \cdot N}$$

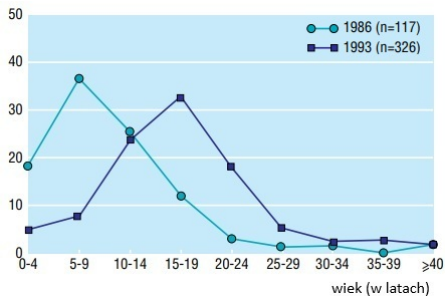
p – frakcja zaszczepionych

[...] Średni wiek zachorowania:

$$\bar{a} = \frac{1}{d \cdot R_0} = \frac{1}{d \cdot \frac{\beta}{\gamma+d} \cdot N}$$

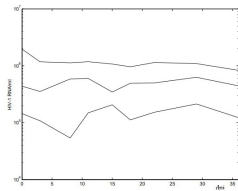
p – frakcja zaszczepionych

$$\tilde{a} = \frac{1}{d \cdot \frac{\beta}{\gamma+d} \cdot (1-p)N} = \frac{\bar{a}}{1-p}$$

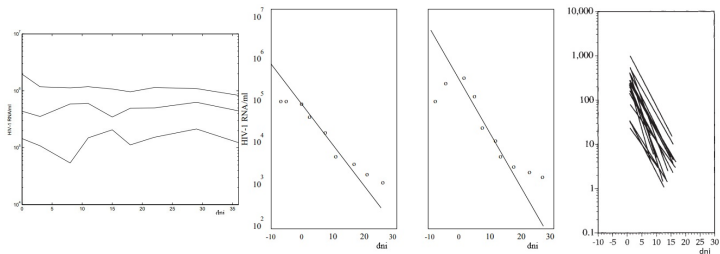


Rys. Rozkład wiekowy pacjentów z różyczką zgłaszających się na oddziały ambulatoryjne szpitali ogólnych w Atenach w latach 1986 i 1993.

Wirus HIV



Wirus HIV



Rys. Stężenie wirusa HIV w osoczu przed i po leczeniu inhibitorem proteazy.

Wirus HIV

$V(t)$ – stężenie wirusa w czasie t

Wirus HIV

$V(t)$ – stężenie wirusa w czasie t

$$\dot{V} = P - cV$$

Wirus HIV

$V(t)$ – stężenie wirusa w czasie t

$$\dot{V} = P - cV$$

Po podaniu leku: $P = 0$

Wirus HIV

$V(t)$ – stężenie wirusa w czasie t

$$\dot{V} = P - cV$$

Po podaniu leku: $P = 0 \implies V(t) = V_0 e^{-ct}$

Wirus HIV

$V(t)$ – stężenie wirusa w czasie t

$$\dot{V} = P - cV$$

Po podaniu leku: $P = 0 \implies V(t) = V_0 e^{-ct}$

$$V_0 e^{-ct_{1/2}} = \frac{1}{2} V_0 \implies t_{1/2} = \frac{\ln 2}{c} \approx 2 \text{ dni}$$

Wirus HIV

$V(t)$ – stężenie wirusa w czasie t

$$\dot{V} = P - cV$$

Po podaniu leku: $P = 0 \implies V(t) = V_0 e^{-ct}$

$$V_0 e^{-ct_{1/2}} = \frac{1}{2} V_0 \implies t_{1/2} = \frac{\ln 2}{c} \approx 2 \text{ dni}$$

Przed rozpoczęciem leczenia:

$$\dot{V} = 0$$

Wirus HIV

$V(t)$ – stężenie wirusa w czasie t

$$\dot{V} = P - cV$$

Po podaniu leku: $P = 0 \implies V(t) = V_0 e^{-ct}$

$$V_0 e^{-ct_{1/2}} = \frac{1}{2} V_0 \implies t_{1/2} = \frac{\ln 2}{c} \approx 2 \text{ dni}$$

Przed rozpoczęciem leczenia:

$$\dot{V} = 0 \implies P = cV_0 \approx 10^9 \text{ cząsteczek wirusa/dzień}$$

Wirus HIV

$V(t)$ – stężenie wirusa w czasie t

$$\dot{V} = P - cV$$

Po podaniu leku: $P = 0 \implies V(t) = V_0 e^{-ct}$

$$V_0 e^{-ct_{1/2}} = \frac{1}{2} V_0 \implies t_{1/2} = \frac{\ln 2}{c} \approx 2 \text{ dni}$$

Przed rozpoczęciem leczenia:

$$\dot{V} = 0 \implies P = cV_0 \approx 10^9 \text{ cząsteczek wirusa/dzień}$$

"It is an excellent example where even very simple models can be of immense help in extracting crucial information from patient data."

Leczenie anemii polekowej

Leczenie anemii polekowej

$u(x, t)$ – gęstość komórek o dojrzałości x w czasie t

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial x}(c(x)u(x, t)) + p(x, u) \\ u(x, 0) &= \tilde{u}(x)\end{aligned}$$

gdzie

$$c(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$p(x, u) = \begin{cases} \lambda(1 - u), & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < L + 1 \\ -\infty, & x \geq L + 1 \end{cases}$$

Ilość erytrocytów w czasie t : $U(t) = \int_1^{L+1} u(x, t) \, dx$

Ilość erytrocytów w czasie t : $U(t) = \int_1^{L+1} u(x, t) \, dx$

Stan stacjonarny:

$$u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\lambda - 1}{\lambda}, x \in [0, L + 1]$$

Ilość erytrocytów w czasie t : $U(t) = \int_1^{L+1} u(x, t) dx$

Stan stacjonarny:

$$u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\lambda-1}{\lambda}, x \in [0, L+1] \implies U_0^\infty = L \cdot \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

Ilość erytrocytów w czasie t : $U(t) = \int_1^{L+1} u(x, t) dx$

Stan stacjonarny:

$$u(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda-1}{\lambda}, x \in [0, L+1] \implies U_0^\infty = L \cdot \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

Na skutek radioterapii lub leków cytostatycznych:

Ilość erytrocytów w czasie t : $U(t) = \int_1^{L+1} u(x, t) dx$

Stan stacjonarny:

$$u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\lambda-1}{\lambda}, x \in [0, L+1] \implies U_0^\infty = L \cdot \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

Na skutek radioterapii lub leków cytostatycznych: $\theta \in (0, 1)$

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \theta \frac{\lambda-1}{\lambda}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{\lambda-1}{\lambda}, & 1 \leq x < L+1 \\ 0, & x \geq L+1 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \lambda \rightarrow \lambda' < \lambda$$

Ilość erytrocytów w czasie t : $U(t) = \int_1^{L+1} u(x, t) dx$

Stan stacjonarny:

$$u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\lambda-1}{\lambda}, x \in [0, L+1] \implies U_0^\infty = L \cdot \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

Na skutek radioterapii lub leków cytostatycznych: $\theta \in (0, 1)$

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \theta \frac{\lambda-1}{\lambda}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{\lambda-1}{\lambda}, & 1 \leq x < L+1 \\ 0, & x \geq L+1 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \lambda \rightarrow \lambda' < \lambda$$

Nowy stan stacjonarny:

Ilość erytrocytów w czasie t : $U(t) = \int_1^{L+1} u(x, t) dx$

Stan stacjonarny:

$$u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\lambda-1}{\lambda}, x \in [0, L+1] \implies U_0^\infty = L \cdot \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

Na skutek radioterapii lub leków cytostatycznych: $\theta \in (0, 1)$

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \theta \frac{\lambda-1}{\lambda}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{\lambda-1}{\lambda}, & 1 \leq x < L+1 \\ 0, & x \geq L+1 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \lambda \rightarrow \lambda' < \lambda$$

Nowy stan stacjonarny:

$$u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\lambda'-1}{\lambda'}, x \in [0, L+1]$$

Ilość erytrocytów w czasie t : $U(t) = \int_1^{L+1} u(x, t) dx$

Stan stacjonarny:

$$u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\lambda-1}{\lambda}, x \in [0, L+1] \implies U_0^\infty = L \cdot \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

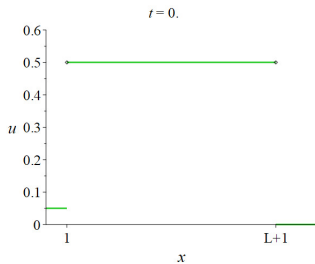
Na skutek radioterapii lub leków cytostatycznych: $\theta \in (0, 1)$

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \theta \frac{\lambda-1}{\lambda}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{\lambda-1}{\lambda}, & 1 \leq x < L+1 \\ 0, & x \geq L+1 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \lambda \rightarrow \lambda' < \lambda$$

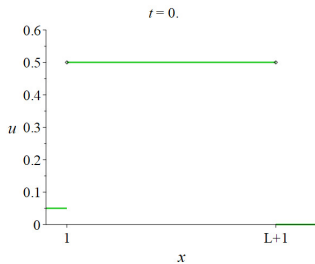
Nowy stan stacjonarny:

$$u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\lambda'-1}{\lambda'}, x \in [0, L+1] \implies U_1^\infty = L \cdot \frac{\lambda'-1}{\lambda'}$$

Anemia polekowa

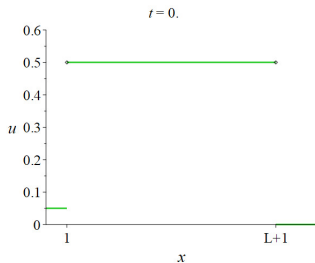


Anemia polekowa

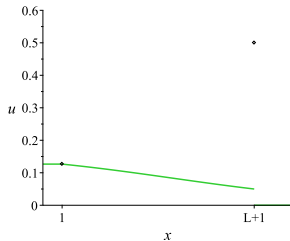


$$U_0^\infty = 20 \rightarrow U_1^\infty = 6.6,$$

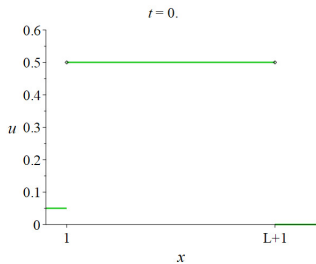
Anemia polekowa



$U_0^\infty = 20 \rightarrow U_1^\infty = 6.6$, ale co gorsze $U_1^{\min} = 3.7$.



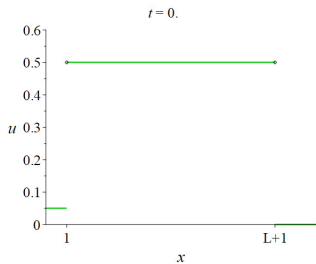
Leczenie anemii polekowej



Leczenie anemii polekowej

$\alpha < 1$:

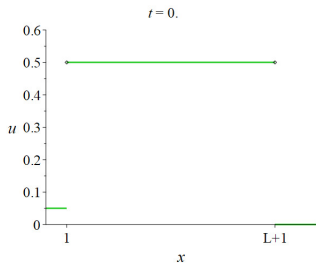
$$c(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



Leczenie anemii polekowej

$\alpha < 1$:

$$c(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



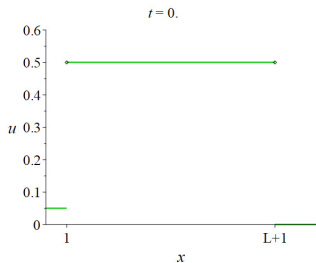
Nowy stan stacjonarny:

$$u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \alpha \frac{\lambda' - \alpha}{\lambda'}, x \in [1, L + 1]$$

Leczenie anemii polekowej

$$\alpha < 1:$$

$$c(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



Nowy stan stacjonarny:

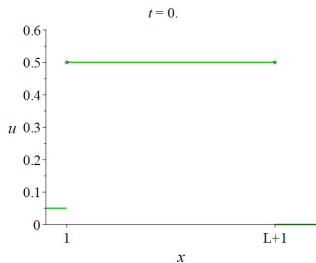
$$u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \alpha \frac{\lambda' - \alpha}{\lambda'}, x \in [1, L + 1]$$

$$\implies U_2^\infty = L\alpha \cdot \frac{\lambda' - \alpha}{\lambda'}$$

Leczenie anemii polekowej

$$\alpha < 1:$$

$$c(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



Nowy stan stacjonarny:

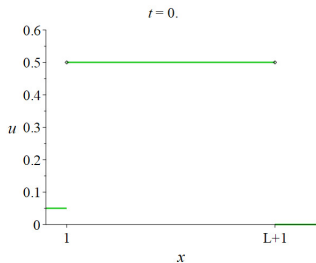
$$u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \alpha \frac{\lambda' - \alpha}{\lambda'}, x \in [1, L + 1]$$

$$\implies U_2^\infty = L\alpha \cdot \frac{\lambda' - \alpha}{\lambda'} \xrightarrow[\max]{} \alpha = \frac{\lambda'}{2}$$

Leczenie anemii polekowej

$$\alpha < 1:$$

$$c(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



Nowy stan stacjonarny:

$$u(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \alpha \frac{\lambda' - \alpha}{\lambda'}, x \in [1, L + 1]$$

$$\implies U_2^\infty = L\alpha \cdot \frac{\lambda' - \alpha}{\lambda'} \xrightarrow{\max} \alpha = \frac{\lambda'}{2}$$

$$\implies U_2^\infty = 12 \text{ oraz } U_2^{\min} = 9.7$$

Leczenie anemii polekowej

$$\alpha < 1:$$

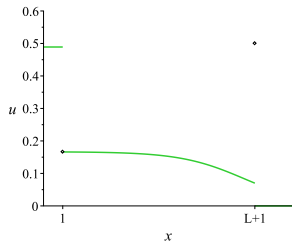
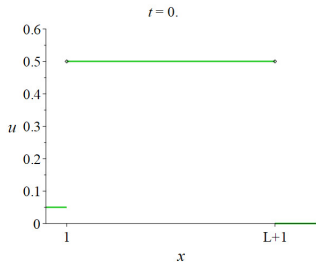
$$c(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Nowy stan stacjonarny:

$$u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \alpha \frac{\lambda' - \alpha}{\lambda'}, x \in [1, L + 1]$$

$$\Rightarrow U_2^\infty = L\alpha \cdot \frac{\lambda' - \alpha}{\lambda'} \xrightarrow{\max} \alpha = \frac{\lambda'}{2}$$

$$\Rightarrow U_2^\infty = 12 \text{ oraz } U_2^{\min} = 9.7$$



Once we have a model of the process, we can steer it. Such attempts made by Dr. Ważewska were succesful. Doctor Ważewska, using our solution of the differential equation in her planned therapy, helped some patients with drug-induced anemia in a meaningful way.

If my work contributed to that in even just a minimal way, it may be the most valuable thing I have ever done.

"Matemathics like poetry. Tomasz Szarek interviews Andrzej Lasota"

Bibliografia

Książki



Britton N. F., Essential Mathematical Biology. London: Springer, 2003



Müller, J., Kuttler, C., Methods and Models in Mathematical Biology. Heidelberg: Springer, 2015



Murray J., Mathematical Biology I. An Introduction. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, New York, 3 edition, 2002



Shonkwiler R.W., Herod J., Mathematical Biology: An Introduction with Maple and Matlab. 2nd ed., Springer, 2009

O W. Harveyu



Cohen J.E., Mathematics Is Biology's Next Microscope, Only Better; Biology Is Mathematics' Next Physics, Only Better. *PLoS Biol* 2(12), 2004



Zareba K.M., Circulation over the centuries: William Harvey (1578-1657). *Cardiol J.* 14(2), 214-5, 2007



Buzzi A.E., La circulación de la sangre a 400 años de su descubrimiento. *Rev. argent. cardiol.* 84(6), 2016 [rysunki]

Model Lotki-Volterra



Cataudella S., Spagnolo M. (eds), The state of Italian marine fisheries and aquaculture. Ministero delle Politiche Agricole, Alimentari e Forestali (MiPAAF), 2011, Rome (Italy) [rysunek]

Szczepienia w Grecji



Panagiotopoulos T, Antoniadou I, Valassi-Adam E. Increase in congenital rubella occurrence after immunisation in Greece: retrospective survey and systematic review. *BMJ.* 1999, 319(7223), 1462-7.

Wirus HIV



Perelson, A.S., Nelson, P.W. Mathematical analysis of HIV-1 dynamics in vivo. *SIAM Review*, 1991, 41(1), 3-44



Ho D.D., Neumann A.U., Perelson A.S., Chen W., Leonard J.M., Markowitz M. Rapid turnover of plasma virions and CD4 lymphocytes in HIV-1 infection. *Nature*. 1995, 373(6510):123-6

Wirusowe zapalenie wątroby typu C



Neumann AU, Lam NP, Dahari H, Gretch DR, Wiley TE, Layden TJ, Perelson AS. Hepatitis C viral dynamics in vivo and the antiviral efficacy of interferon-alpha therapy. *Science*. 1998, 282(5386), 103-7

Leczenie anemii polekowej



Lasota A., Mackey M.C., Ważewska-Czyżewska M., Minimizing therapeutically induced anemia. *J Math Biol*. 1981;13(2):149-58



Gacki, H., Zwierzyńska, J. I., Mathematics like poetry: Andrzej Lasota 1932-2006 (No. 3472; p. 259). Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, 2016

Łańcuch pokarmowy

$$\dot{x} = qx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy$$

$$\dot{y} = bxy - ry - cyz$$

$$\dot{z} = dyz - sz$$

Stabilne stany stacjonarne:

