

$$\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$$

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 3^3 + 4^3 + 5^3 &= 6^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-4 \cdot 8}{1 \cdot 2}$$

$$e^{(i+\pi) \cdot 0} = 1$$

BRZYDKIE RYSUNKI

BARTEK PAWLIK

$$\log(1+2+3) = \log 1 + \log 2 + \log 3$$

$$\frac{48}{98} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2\ 666\ 666}{588\ 666\ 5} = \frac{2}{5}$$

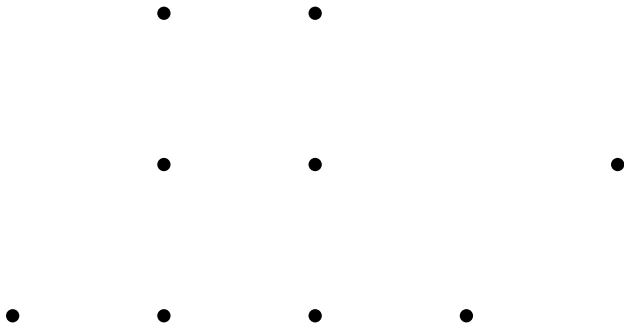
$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$



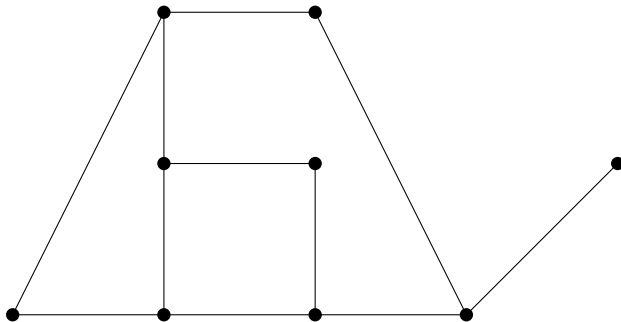
silnia: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$
 stabnia: $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Przykładowy graf G i garść oznaczeń:

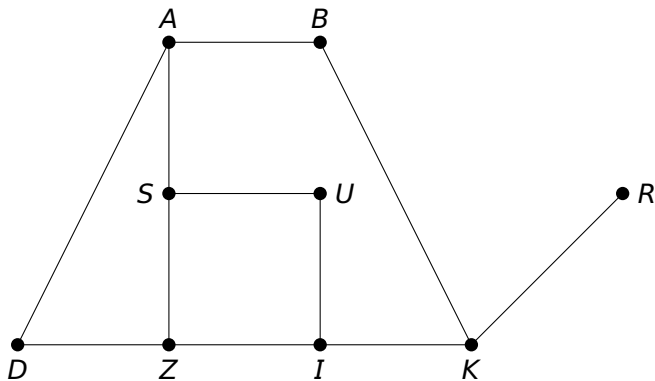
Przykładowy graf G i garść oznaczeń:



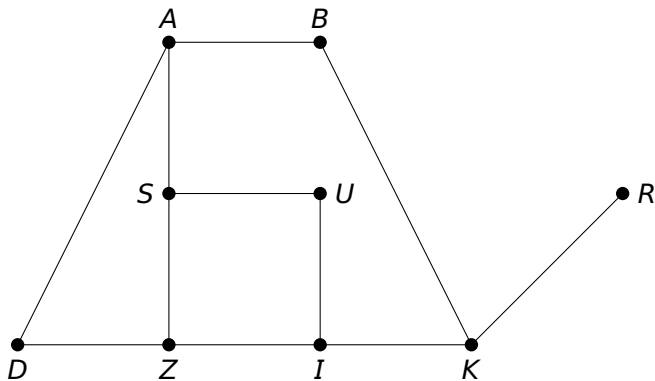
Przykładowy graf G i garść oznaczeń:



Przykładowy graf G i garść oznaczeń:



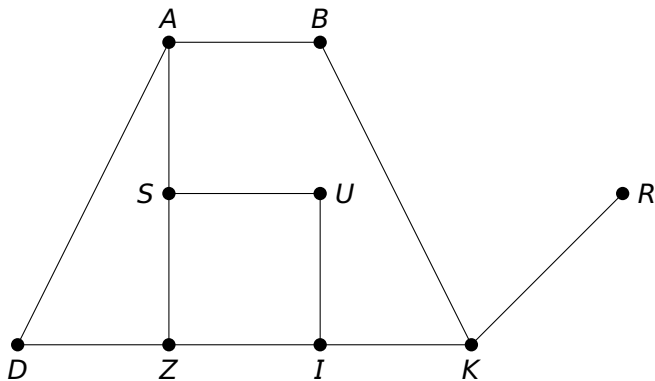
Przykładowy graf G i garść oznaczeń:



$$V(G) = \{A, B, D, I, K, R, S, U, Z\}$$

$$E(G) = \{AB, AD, AS, BK, DZ, IK, IU, IZ, KR, SU, SZ\}$$

Przykładowy graf G i garść oznaczeń:

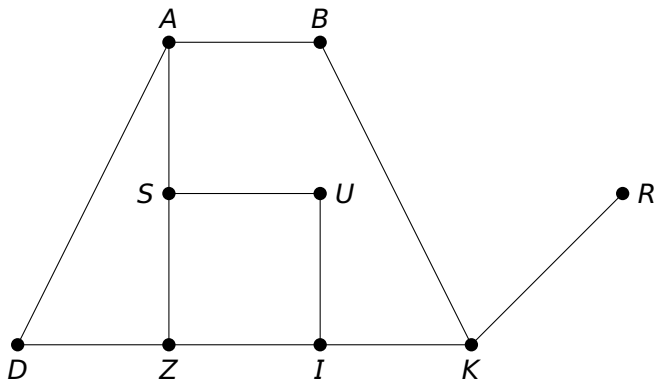


$$V(G) = \{A, B, D, I, K, R, S, U, Z\}$$

$$E(G) = \{AB, AD, AS, BK, DZ, IK, IU, IZ, KR, SU, SZ\}$$

$$\deg A = 3, \deg B = 2, \deg S = 3, \text{ itd.}$$

Przykładowy graf G i garść oznaczeń:



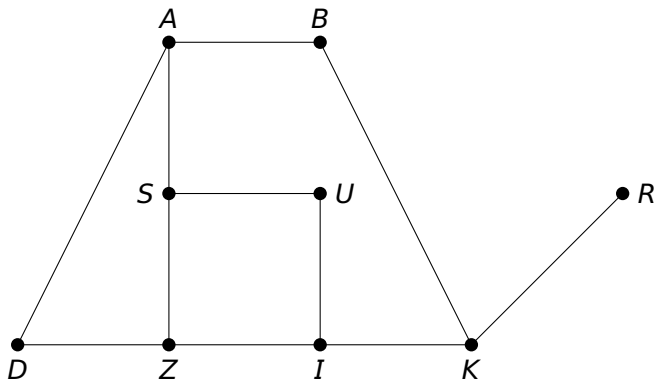
$$V(G) = \{A, B, D, I, K, R, S, U, Z\}$$

$$E(G) = \{AB, AD, AS, BK, DZ, IK, IU, IZ, KR, SU, SZ\}$$

$$\deg A = 3, \deg B = 2, \deg S = 3, \text{ itd.}$$

$$\Delta(G) = 3$$

Przykładowy graf G i garść oznaczeń:



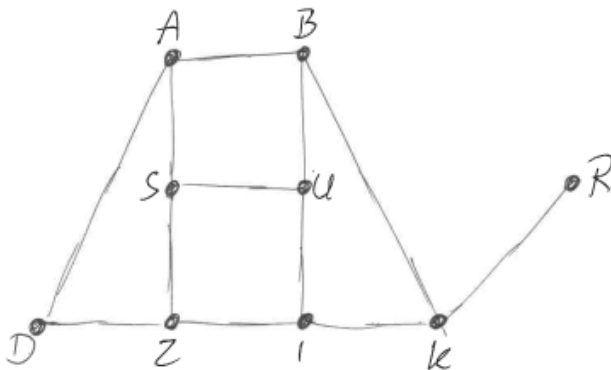
$$V(G) = \{A, B, D, I, K, R, S, U, Z\}$$

$$E(G) = \{AB, AD, AS, BK, DZ, IK, IU, IZ, KR, SU, SZ\}$$

$$\deg A = 3, \deg B = 2, \deg S = 3, \text{ itd.}$$

$$\Delta(G) = 3$$

Przykładowy graf G i garść oznaczeń:



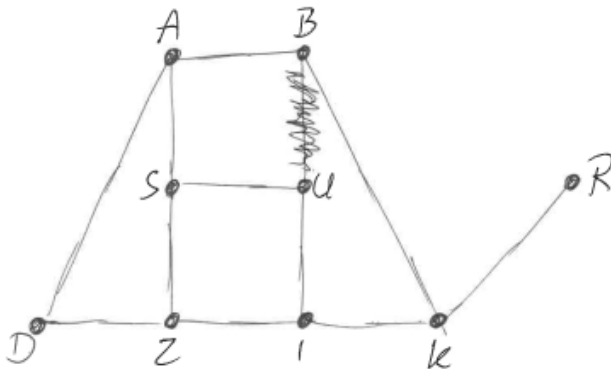
$$V(G) = \{A, B, D, I, K, R, S, U, Z\}$$

$$E(G) = \{AB, AD, AS, BK, DZ, IK, IU, IZ, KR, SU, SZ\}$$

$$\deg A = 3, \deg B = 2, \deg S = 3, \text{ itd.}$$

$$\Delta(G) = 3$$

Przykładowy graf G i garść oznaczeń:



$$V(G) = \{A, B, D, I, K, R, S, U, Z\}$$

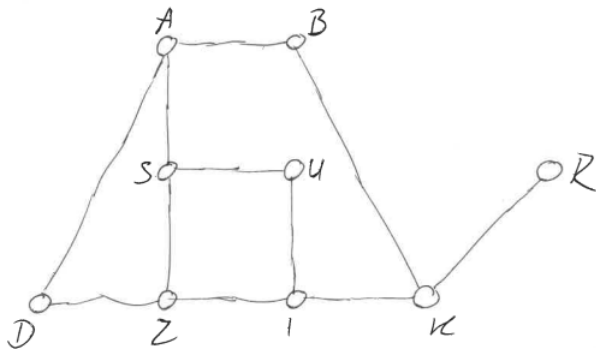
$$E(G) = \{AB, AD, AS, BK, DZ, IK, IU, IZ, KR, SU, SZ\}$$

$$\deg A = 3, \deg B = 2, \deg S = 3, \text{ itd.}$$

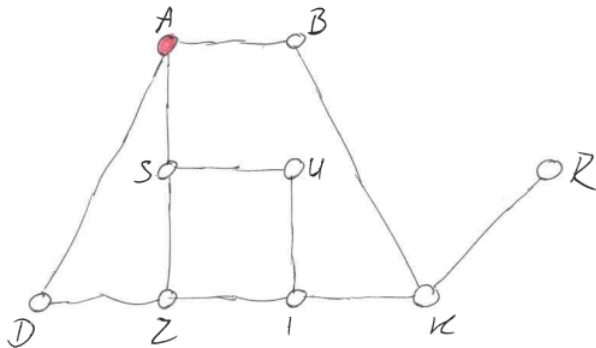
$$\Delta(G) = 3$$

*Kolorowaniem grafu G nazywamy funkcję $c : V(G) \rightarrow C$, taką, że jeżeli $v_1 v_2 \in E(G)$, to $c(v_1) \neq c(v_2)$. Zbiór C nazywamy *zbiorem kolorów*. Elementy zbioru C nazywamy *kolorami*.*

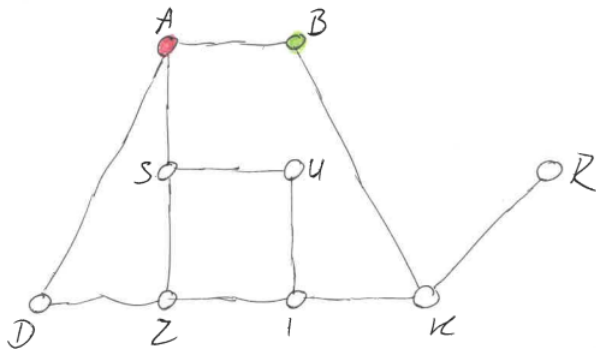
Kolorowaniem grafu G nazywamy funkcję $c : V(G) \rightarrow C$, taką, że jeżeli $v_1 v_2 \in E(G)$, to $c(v_1) \neq c(v_2)$. Zbiór C nazywamy *zbiorem kolorów*. Elementy zbioru C nazywamy *kolorami*.



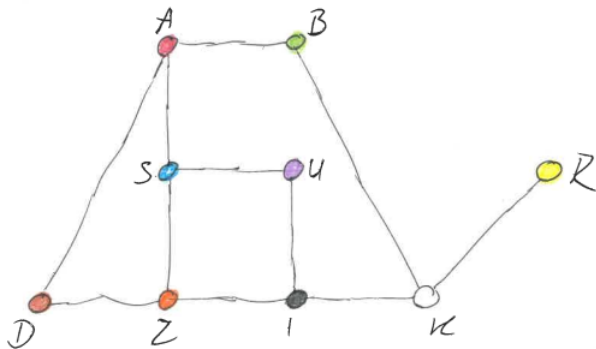
Kolorowaniem grafu G nazywamy funkcję $c : V(G) \rightarrow C$, taką, że jeżeli $v_1 v_2 \in E(G)$, to $c(v_1) \neq c(v_2)$. Zbiór C nazywamy *zbiorem kolorów*. Elementy zbioru C nazywamy *kolorami*.



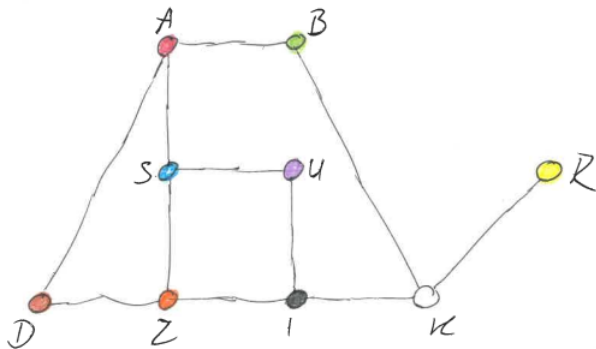
Kolorowaniem grafu G nazywamy funkcję $c : V(G) \rightarrow C$, taką, że jeżeli $v_1 v_2 \in E(G)$, to $c(v_1) \neq c(v_2)$. Zbiór C nazywamy *zbiorem kolorów*. Elementy zbioru C nazywamy *kolorami*.



Kolorowaniem grafu G nazywamy funkcję $c : V(G) \rightarrow C$, taką, że jeżeli $v_1 v_2 \in E(G)$, to $c(v_1) \neq c(v_2)$. Zbiór C nazywamy *zbiorem kolorów*. Elementy zbioru C nazywamy *kolorami*.



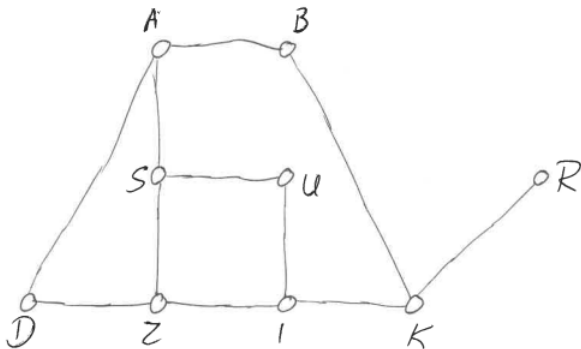
Kolorowaniem grafu G nazywamy funkcję $c : V(G) \rightarrow C$, taką, że jeżeli $v_1 v_2 \in E(G)$, to $c(v_1) \neq c(v_2)$. Zbiór C nazywamy *zbiorem kolorów*. Elementy zbioru C nazywamy *kolorami*.



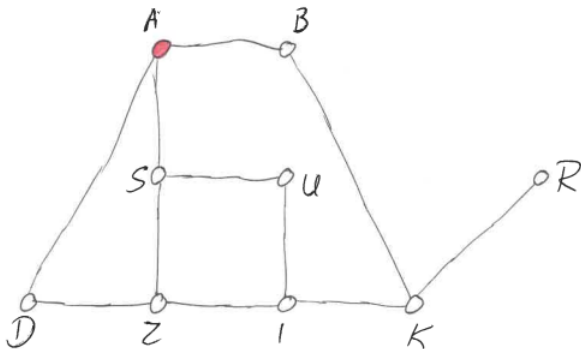
$$C = \{\text{red}, \text{green}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}, \text{orange}, \text{black}, \text{white}\}$$

Kolorowanie istnieje jeżeli zbiór kolorów jest relatywnie duży.
Im mniejszy jest dany zbiór kolorów, tym trudniej znaleźć kolorowanie!

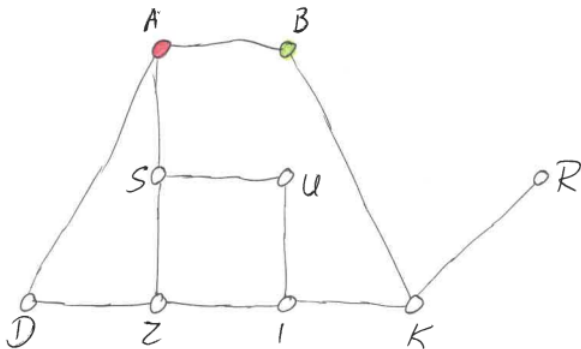
Kolorowanie istnieje jeżeli zbiór kolorów jest relatywnie duży.
Im mniejszy jest dany zbiór kolorów, tym trudniej znaleźć kolorowanie!



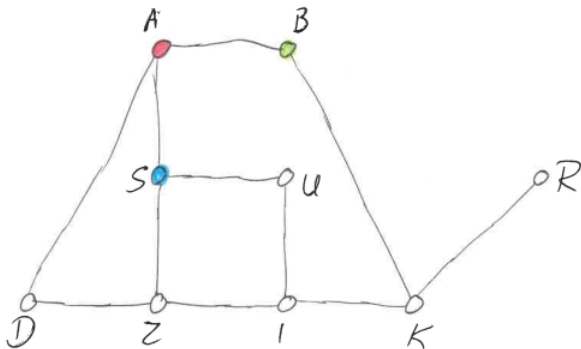
Kolorowanie istnieje jeżeli zbiór kolorów jest relatywnie duży.
Im mniejszy jest dany zbiór kolorów, tym trudniej znaleźć kolorowanie!



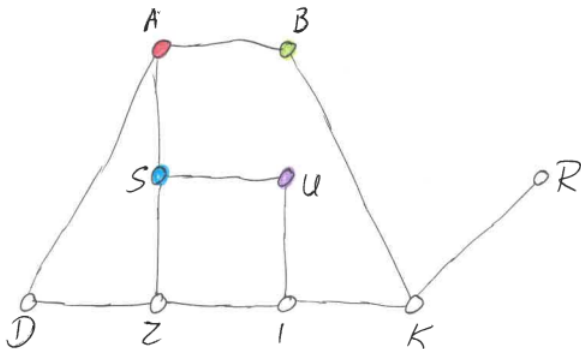
Kolorowanie istnieje jeżeli zbiór kolorów jest relatywnie duży.
Im mniejszy jest dany zbiór kolorów, tym trudniej znaleźć kolorowanie!



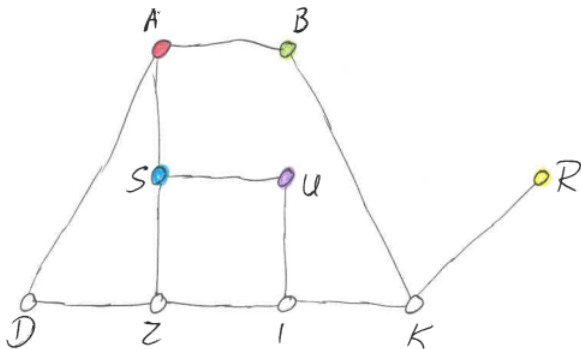
Kolorowanie istnieje jeżeli zbiór kolorów jest relatywnie duży.
Im mniejszy jest dany zbiór kolorów, tym trudniej znaleźć kolorowanie!



Kolorowanie istnieje jeżeli zbiór kolorów jest relatywnie duży.
Im mniejszy jest dany zbiór kolorów, tym trudniej znaleźć kolorowanie!

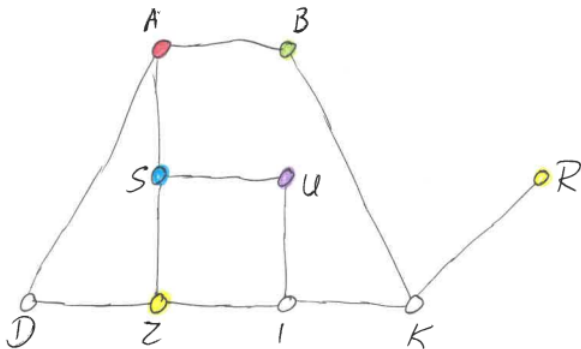


Kolorowanie istnieje jeżeli zbiór kolorów jest relatywnie duży.
Im mniejszy jest dany zbiór kolorów, tym trudniej znaleźć kolorowanie!



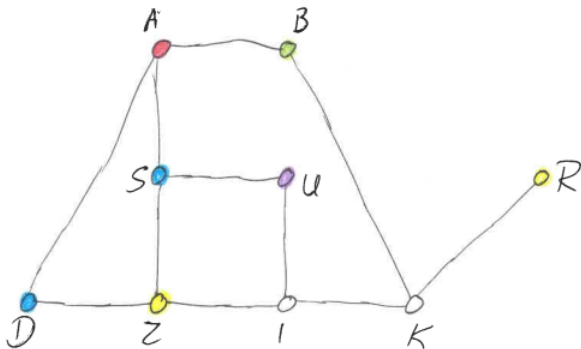
$$C = \{\text{red}, \text{green}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}\}$$

Kolorowanie istnieje jeżeli zbiór kolorów jest relatywnie duży.
Im mniejszy jest dany zbiór kolorów, tym trudniej znaleźć kolorowanie!



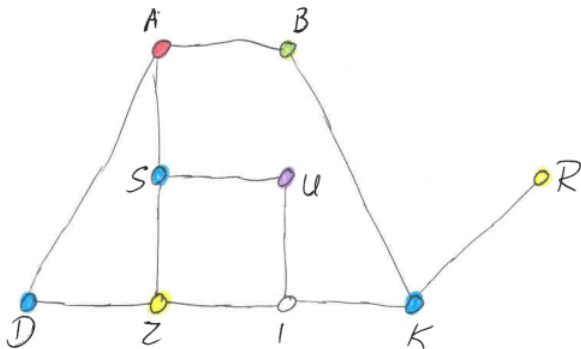
$$C = \{\text{red}, \text{green}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}\}$$

Kolorowanie istnieje jeżeli zbiór kolorów jest relatywnie duży.
Im mniejszy jest dany zbiór kolorów, tym trudniej znaleźć kolorowanie!



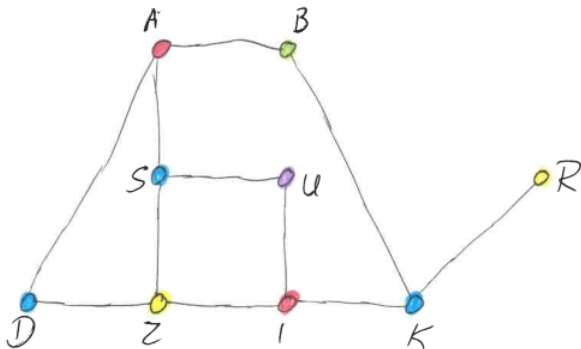
$$C = \{\text{red}, \text{green}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}\}$$

Kolorowanie istnieje jeżeli zbiór kolorów jest relatywnie duży.
Im mniejszy jest dany zbiór kolorów, tym trudniej znaleźć kolorowanie!



$$C = \{\text{red}, \text{green}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}\}$$

Kolorowanie istnieje jeżeli zbiór kolorów jest relatywnie duży.
Im mniejszy jest dany zbiór kolorów, tym trudniej znaleźć kolorowanie!



$$C = \{\text{red}, \text{green}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}\}$$

Jak otrzymać kolorowanie grafów przy użyciu *niewielkiej* liczby kolorów?

Jak otrzymać kolorowanie grafów przy użyciu *niewielkiej* liczby kolorów?

Jednym ze sposobów jest algorytm *first fit*:

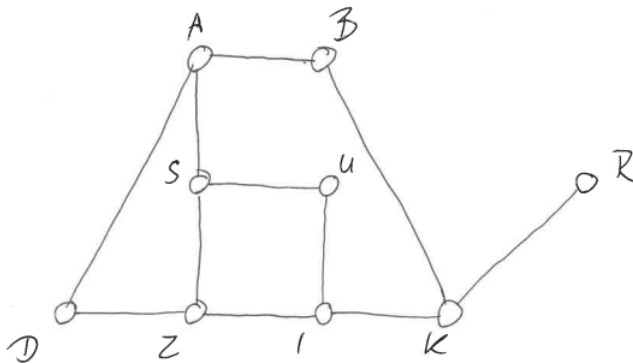
- Ustalamy ciąg wierzchołków $(v_1, v_2, \dots, v_n)$.
- Ustalamy ciąg kolorów $(c_1, c_2, \dots, c_k)$.
- Dla $1 \leq i \leq n$ kolorujemy wierzchołek v_i *najmniejszym* dostępnym kolorem.

Przykładowe kolorowanie first fit (1)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, B, S, U, R, D, Z, I, K)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

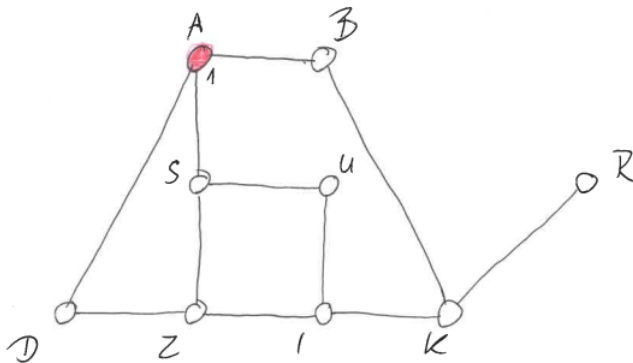


Przykładowe kolorowanie first fit (1)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, B, S, U, R, D, Z, I, K)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{brown}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

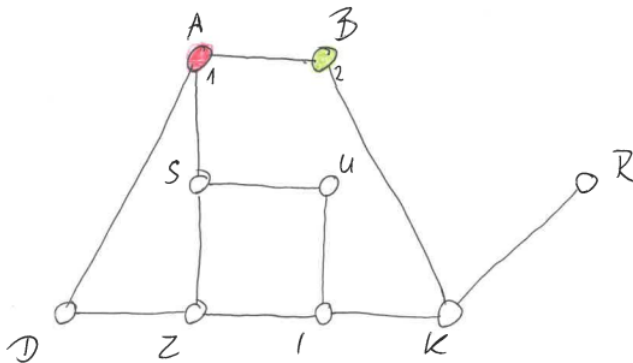


Przykładowe kolorowanie first fit (1)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, B, S, U, R, D, Z, I, K)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

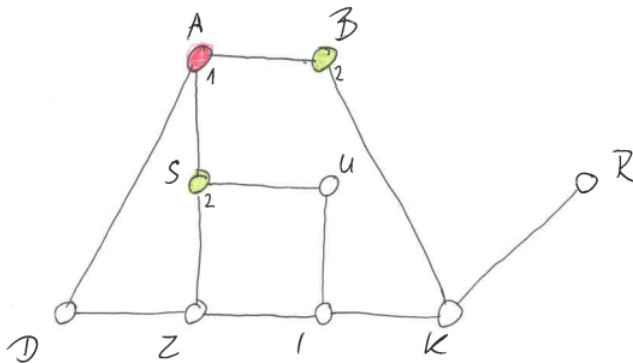


Przykładowe kolorowanie first fit (1)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, B, S, U, R, D, Z, I, K)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

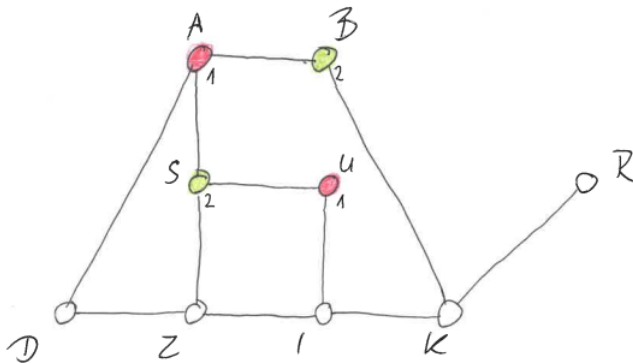


Przykładowe kolorowanie first fit (1)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, B, S, U, R, D, Z, I, K)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

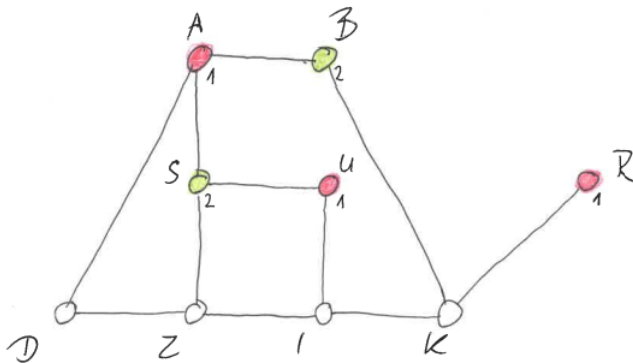


Przykładowe kolorowanie first fit (1)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, B, S, U, R, D, Z, I, K)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{darkred}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

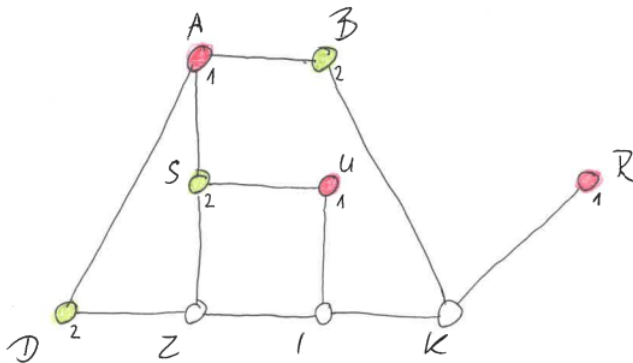


Przykładowe kolorowanie first fit (1)

Graf G.

Ciąg wierzchołków: (A, B, S, U, R, D, Z, I, K).

Ciąg kolorów: (red_1 , green_2 , blue_3 , purple_4 , yellow_5 , darkred_6 , orange_7 , black_8 , $\text{white}_9, \dots$).

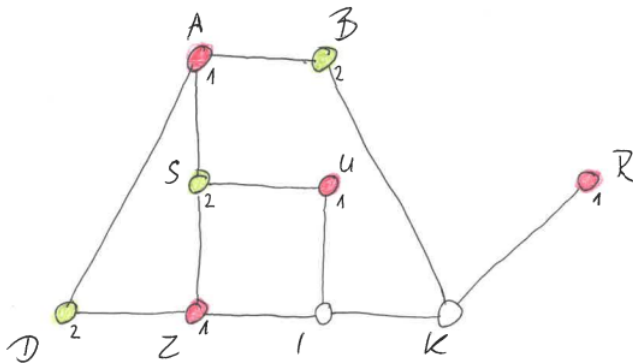


Przykładowe kolorowanie first fit (1)

Graf G.

Ciąg wierzchołków: (A, B, S, U, R, D, Z, I, K).

Ciąg kolorów: (red_1 , green_2 , blue_3 , purple_4 , yellow_5 , darkred_6 , orange_7 , black_8 , $\text{white}_9, \dots$).

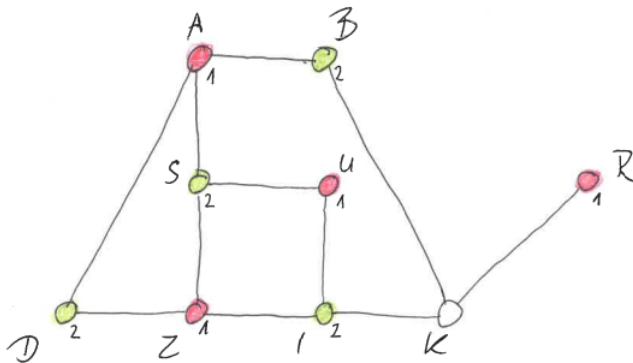


Przykładowe kolorowanie first fit (1)

Graf G.

Ciąg wierzchołków: (A, B, S, U, R, D, Z, I, K).

Ciąg kolorów: (red_1 , green_2 , blue_3 , purple_4 , yellow_5 , darkred_6 , orange_7 , black_8 , $\text{white}_9, \dots$).

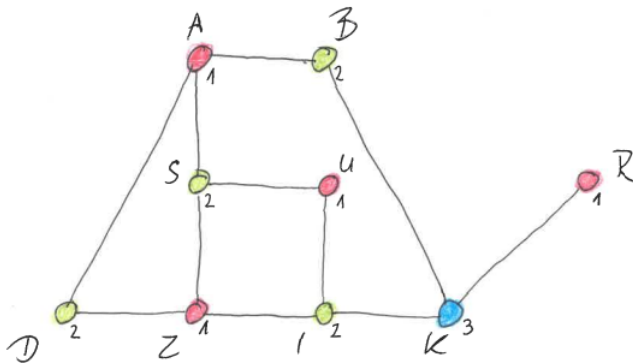


Przykładowe kolorowanie first fit (1)

Graf G.

Ciąg wierzchołków: (A, B, S, U, R, D, Z, I, K).

Ciąg kolorów: (red_1 , green_2 , blue_3 , purple_4 , yellow_5 , darkred_6 , orange_7 , black_8 , $\text{white}_9, \dots$).

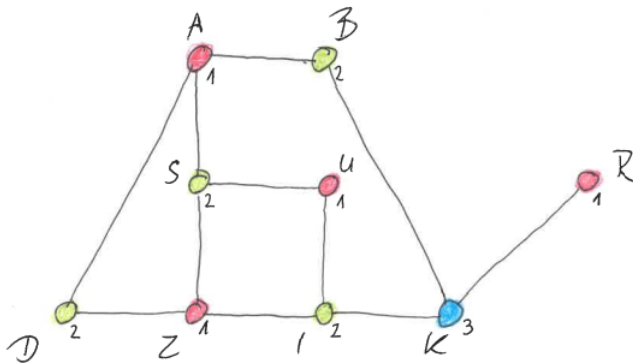


Przykładowe kolorowanie first fit (1)

Graf G.

Ciąg wierzchołków: (A, B, S, U, R, D, Z, I, K).

Ciąg kolorów: (red_1 , green_2 , blue_3 , purple_4 , yellow_5 , darkred_6 , orange_7 , black_8 , $\text{white}_9, \dots$).



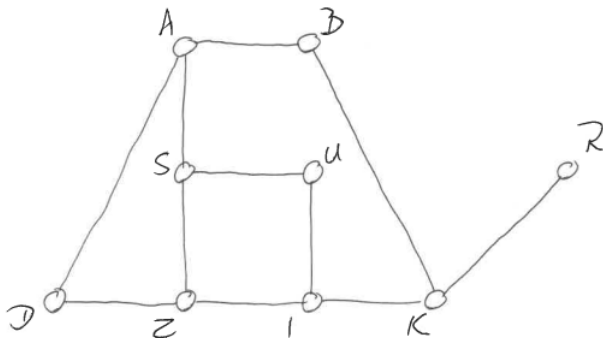
$$C = \{\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3\}$$

Przykładowe kolorowanie first fit (2)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(B, U, D, Z, I, K, S, A, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

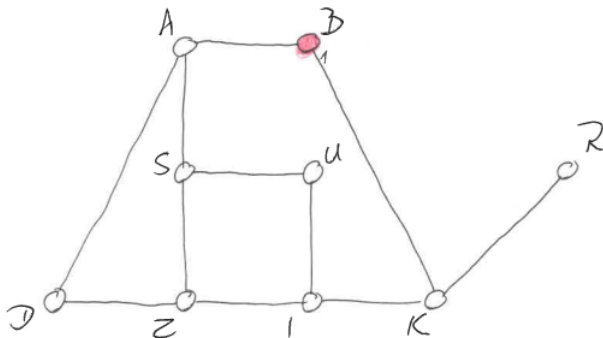


Przykładowe kolorowanie first fit (2)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(B, U, D, Z, I, K, S, A, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

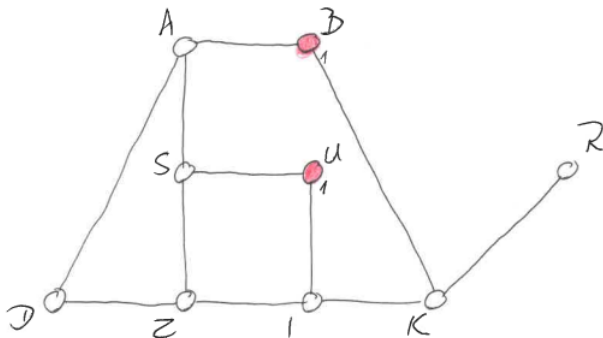


Przykładowe kolorowanie first fit (2)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(B, U, D, Z, I, K, S, A, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

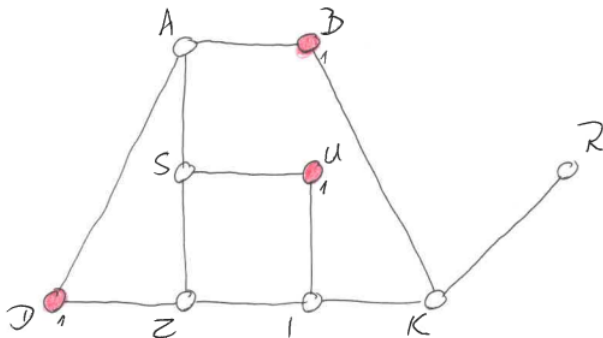


Przykładowe kolorowanie first fit (2)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(B, U, D, Z, I, K, S, A, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

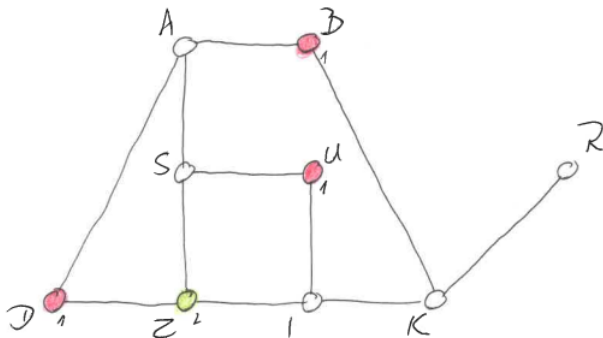


Przykładowe kolorowanie first fit (2)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(B, U, D, Z, I, K, S, A, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

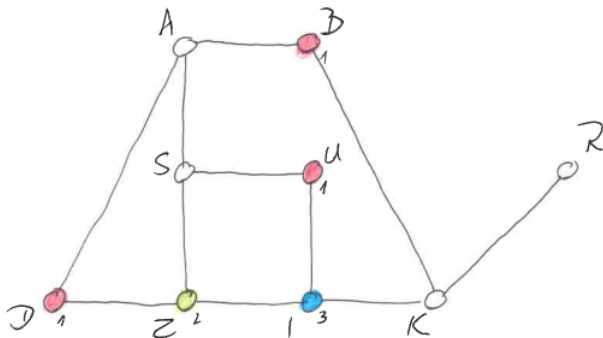


Przykładowe kolorowanie first fit (2)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(B, U, D, Z, I, K, S, A, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

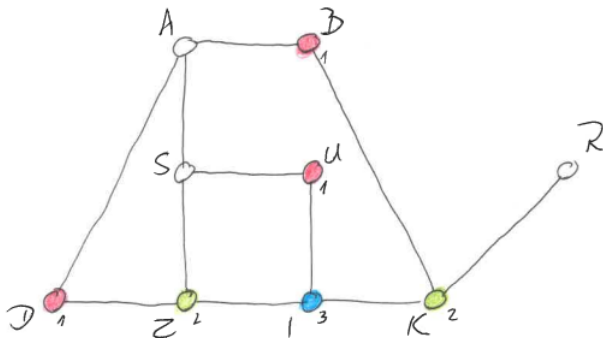


Przykładowe kolorowanie first fit (2)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(B, U, D, Z, I, K, S, A, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

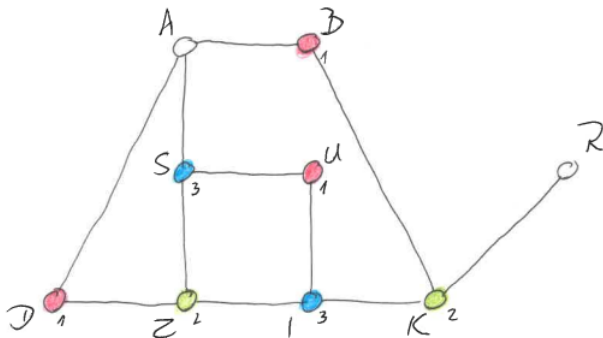


Przykładowe kolorowanie first fit (2)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(B, U, D, Z, I, K, S, A, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

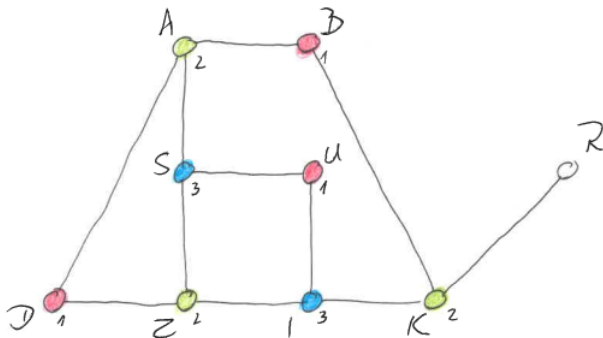


Przykładowe kolorowanie first fit (2)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(B, U, D, Z, I, K, S, A, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

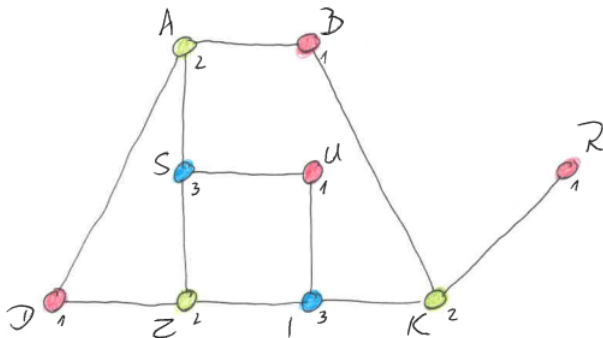


Przykładowe kolorowanie first fit (2)

Graf G.

Ciąg wierzchołków: (B, U, D, Z, I, K, S, A, R).

Ciąg kolorów: (red_1 , green_2 , blue_3 , purple_4 , yellow_5 , darkred_6 , orange_7 , black_8 , $\text{white}_9, \dots$).

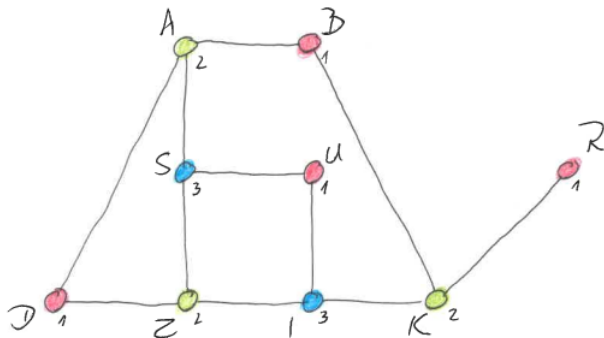


Przykładowe kolorowanie first fit (2)

Graf G.

Ciąg wierzchołków: (B, U, D, Z, I, K, S, A, R).

Ciąg kolorów: (red_1 , green_2 , blue_3 , purple_4 , yellow_5 , darkred_6 , orange_7 , black_8 , $\text{white}_9, \dots$).



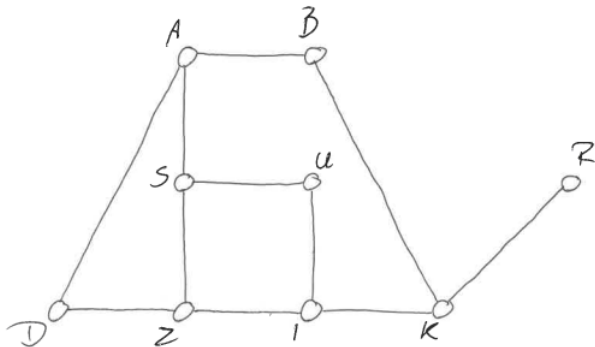
$$C = \{\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3\}$$

Przykładowe kolorowanie first fit (3)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, B, S, D, U, Z, K, R, I)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

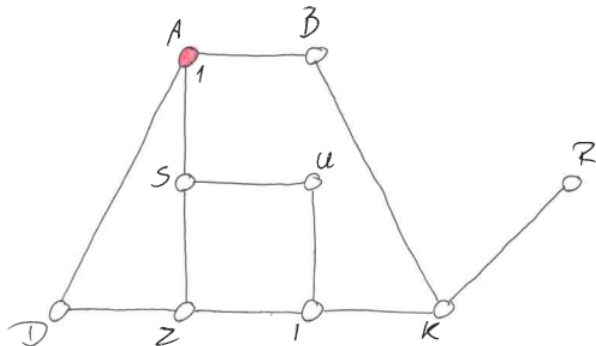


Przykładowe kolorowanie first fit (3)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, B, S, D, U, Z, K, R, I)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{brown}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

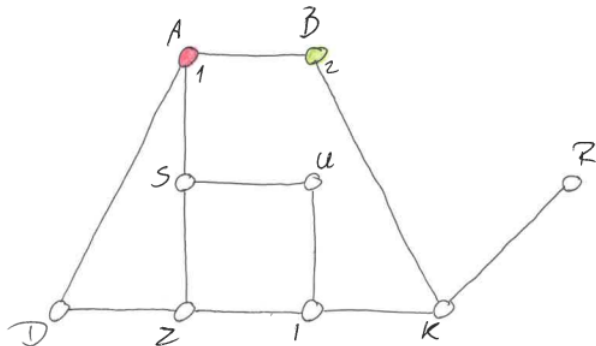


Przykładowe kolorowanie first fit (3)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, B, S, D, U, Z, K, R, I)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{brown}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

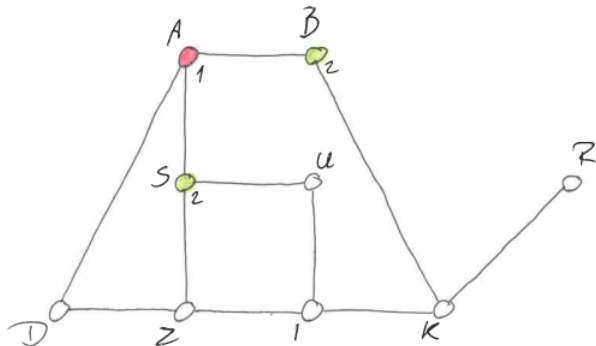


Przykładowe kolorowanie first fit (3)

Graf G.

Ciąg wierzchołków: (A, B, S, D, U, Z, K, R, I).

Ciąg kolorów: (red_1 , green_2 , blue_3 , purple_4 , yellow_5 , darkred_6 , orange_7 , black_8 , $\text{white}_9, \dots$).

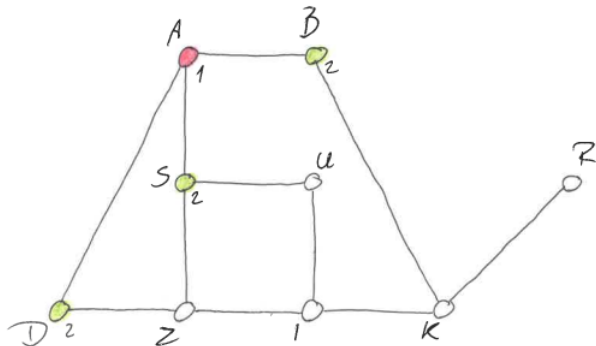


Przykładowe kolorowanie first fit (3)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, B, S, D, U, Z, K, R, I)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

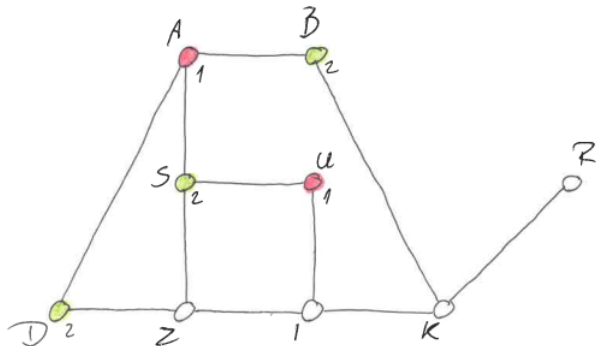


Przykładowe kolorowanie first fit (3)

Graf G.

Ciąg wierzchołków: (A, B, S, D, U, Z, K, R, I).

Ciąg kolorów: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...).

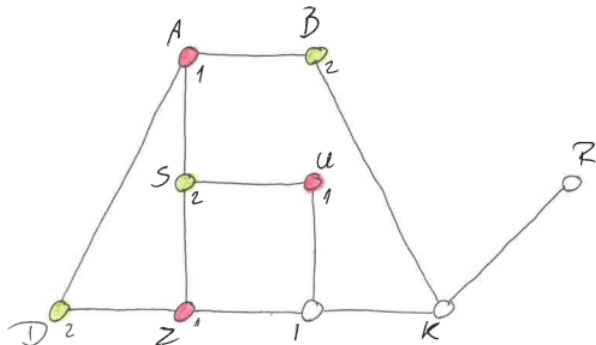


Przykładowe kolorowanie first fit (3)

Graf G.

Ciąg wierzchołków: (A, B, S, D, U, Z, K, R, I).

Ciąg kolorów: (red_1 , green_2 , blue_3 , purple_4 , yellow_5 , darkred_6 , orange_7 , black_8 , $\text{white}_9, \dots$).

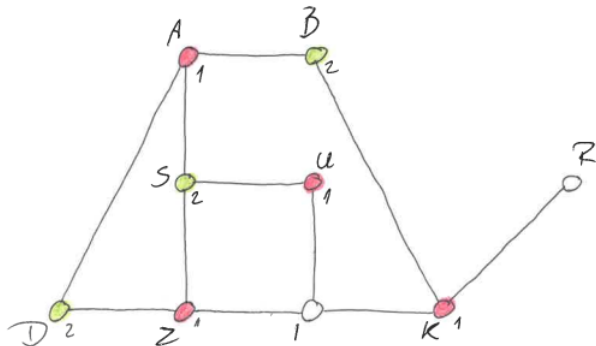


Przykładowe kolorowanie first fit (3)

Graf G.

Ciąg wierzchołków: (A, B, S, D, U, Z, K, R, I).

Ciąg kolorów: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...).

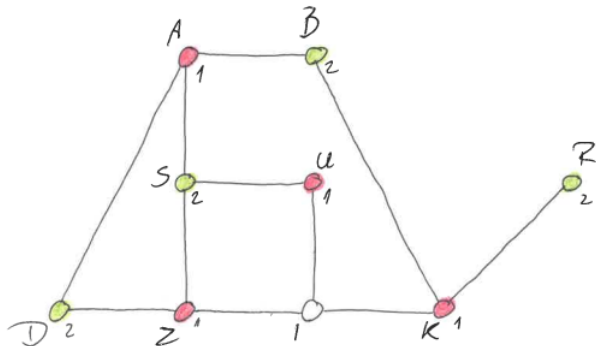


Przykładowe kolorowanie first fit (3)

Graf G.

Ciąg wierzchołków: (A, B, S, D, U, Z, K, R, I).

Ciąg kolorów: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...).

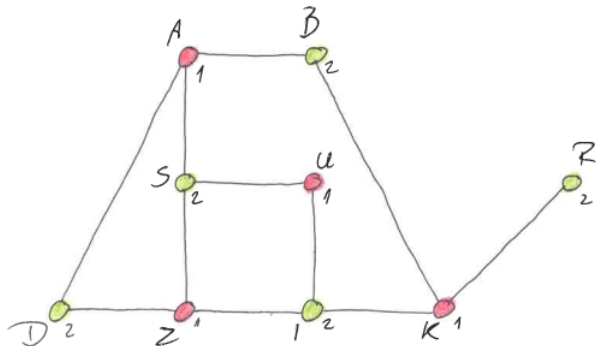


Przykładowe kolorowanie first fit (3)

Graf G.

Ciąg wierzchołków: (A, B, S, D, U, Z, K, I).

Ciąg kolorów: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...).

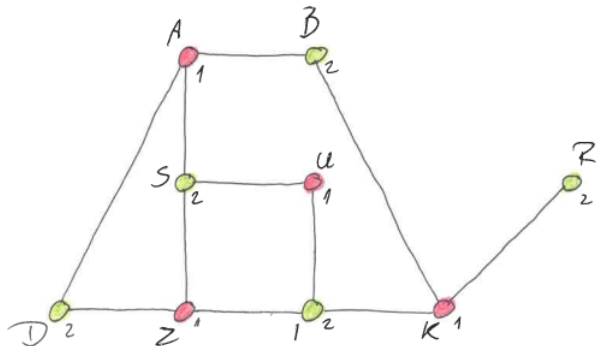


Przykładowe kolorowanie first fit (3)

Graf G.

Ciąg wierzchołków: (A, B, S, D, U, Z, K, I).

Ciąg kolorów: (red_1 , green_2 , blue_3 , purple_4 , yellow_5 , red_6 , orange_7 , black_8 , $\text{white}_9, \dots$).



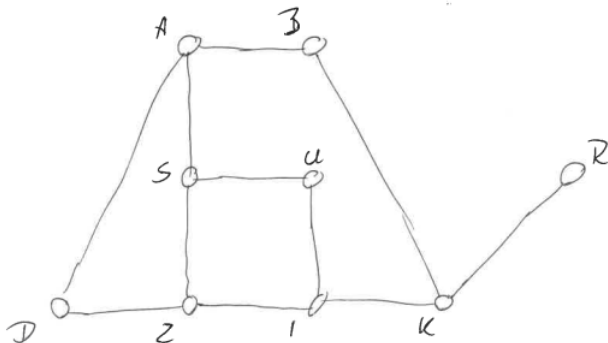
$$C = \{\text{red}_1, \text{green}_2\}$$

Przykładowe kolorowanie first fit (4)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, I, U, D, Z, S, B, K, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

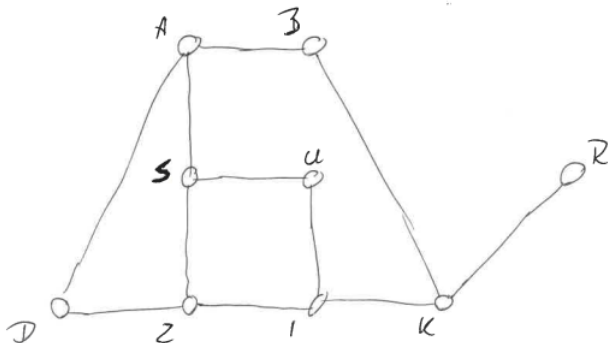


Przykładowe kolorowanie first fit (4)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, I, U, D, Z, S, B, K, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

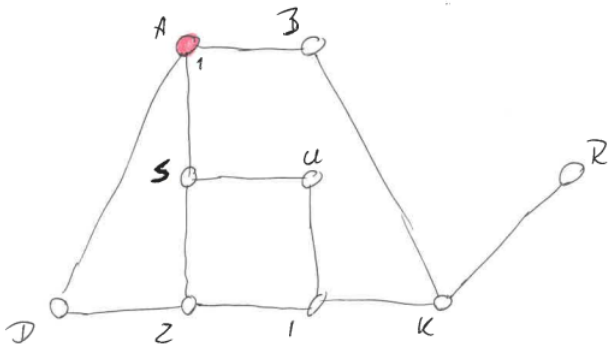


Przykładowe kolorowanie first fit (4)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, I, U, D, Z, S, B, K, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

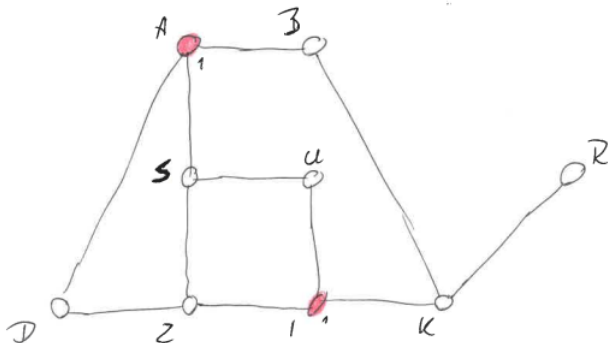


Przykładowe kolorowanie first fit (4)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, I, U, D, Z, S, B, K, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

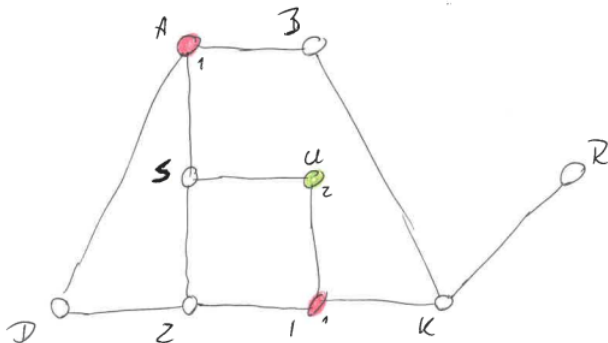


Przykładowe kolorowanie first fit (4)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, I, U, D, Z, S, B, K, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

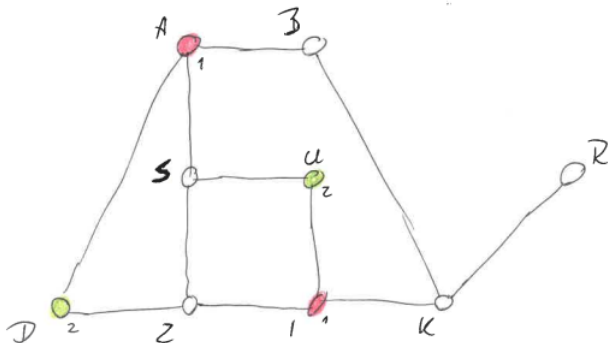


Przykładowe kolorowanie first fit (4)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, I, U, D, Z, S, B, K, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

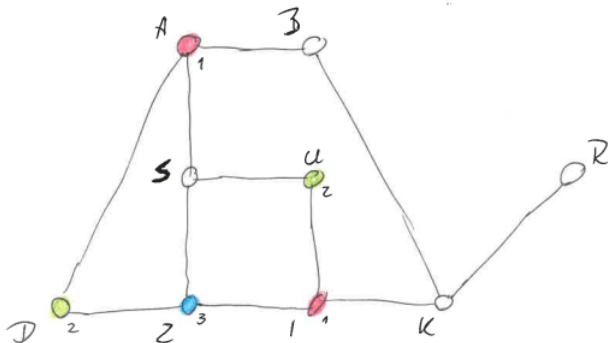


Przykładowe kolorowanie first fit (4)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, I, U, D, Z, S, B, K, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{dark red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

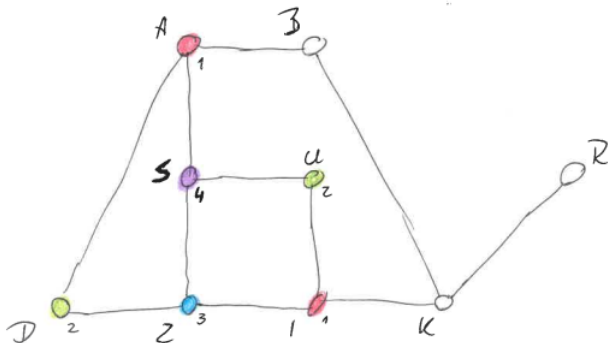


Przykładowe kolorowanie first fit (4)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, I, U, D, Z, S, B, K, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

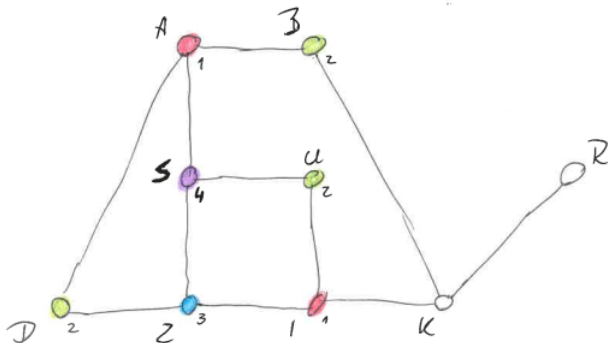


Przykładowe kolorowanie first fit (4)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, I, U, D, Z, S, B, K, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

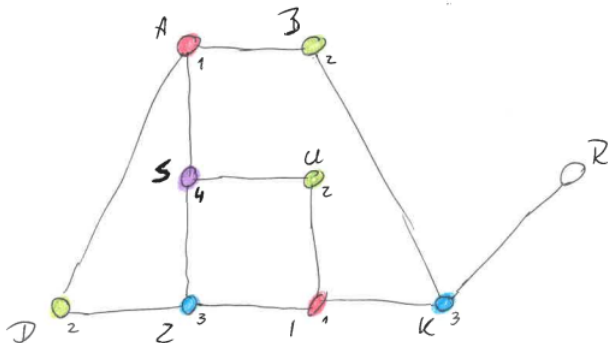


Przykładowe kolorowanie first fit (4)

Graf G .

Ciąg wierzchołków: $(A, I, U, D, Z, S, B, K, R)$.

Ciąg kolorów: $(\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$.

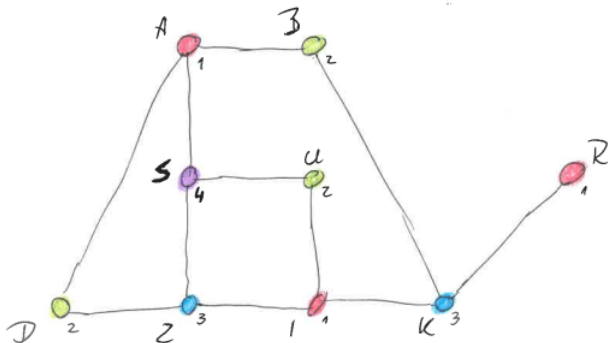


Przykładowe kolorowanie first fit (4)

Graf G.

Ciąg wierzchołków: (A, I, U, D, Z, S, B, K, R).

Ciąg kolorów: (red_1 , green_2 , blue_3 , purple_4 , yellow_5 , red_6 , orange_7 , black_8 , $\text{white}_9, \dots$).

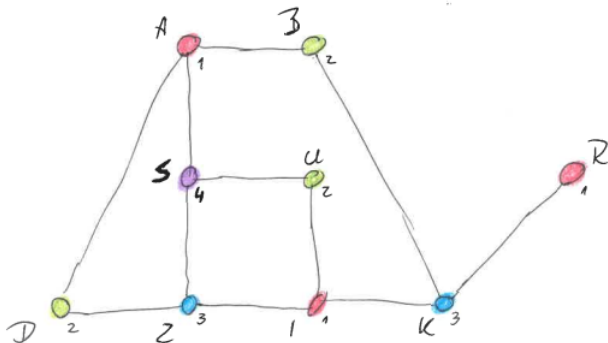


Przykładowe kolorowanie first fit (4)

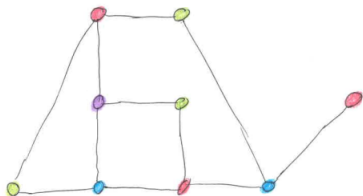
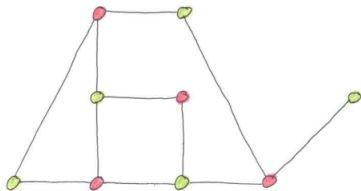
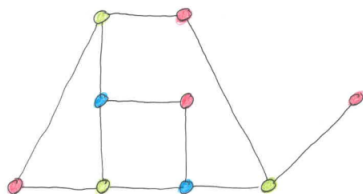
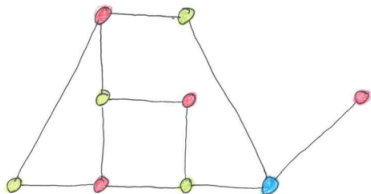
Graf G.

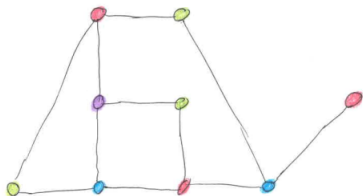
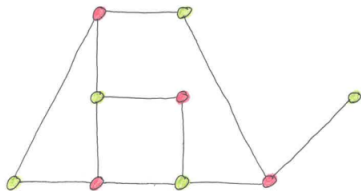
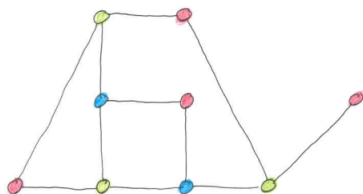
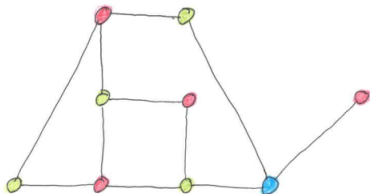
Ciąg wierzchołków: (A, I, U, D, Z, S, B, K, R).

Ciąg kolorów: (red_1 , green_2 , blue_3 , purple_4 , yellow_5 , red_6 , orange_7 , black_8 , $\text{white}_9, \dots$).

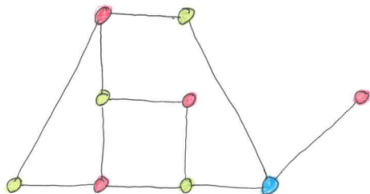


$$C = \{\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4\}$$

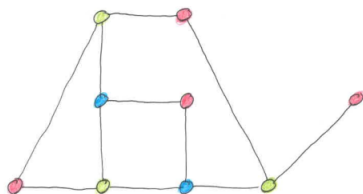




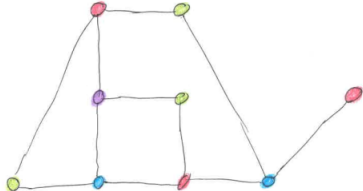
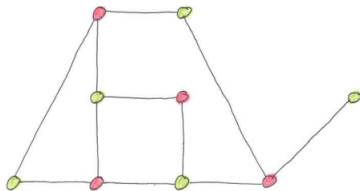
$$\chi(G) = 2$$

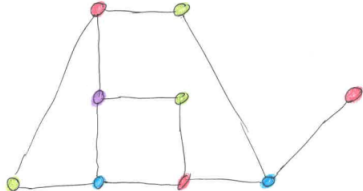
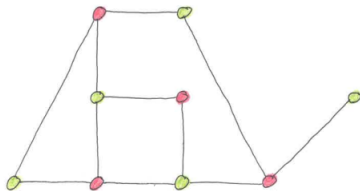
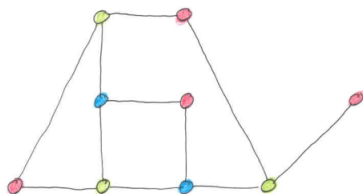
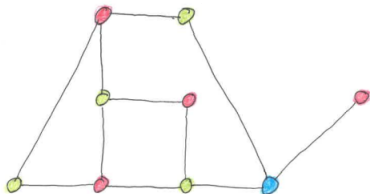


$$\chi(G) = 2$$



$$\Gamma(G) = 4$$





$$\chi(G) = 2$$

$$\Gamma(G) = 4$$

$\chi(G)$ - liczba chromatyczna grafu G

$\Gamma(G)$ - liczba chromatyczna Grundy'ego grafu G

Liczba chromatyczna

- Nie większa niż $\Delta + 1$.

Liczba chromatyczna

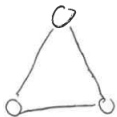
- Nie większa niż $\Delta + 1$.
- Na ogół bardzo trudna do wyznaczenia: wersja decyzyjna to problem *NP*-zupełny, wyznaczenie dokładniej wartości to problem *NP*-trudny.

Liczba chromatyczna

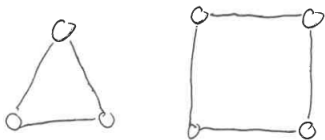
- Nie większa niż $\Delta + 1$.
- Na ogół bardzo trudna do wyznaczenia: wersja decyzyjna to problem *NP*-zupełny, wyznaczenie dokładniej wartości to problem *NP*-trudny.
- Ważna! (zewnątrznie: np. optymalizacja, wewnątrznie: np. twierdzenie o czterech barwach.)

$$\chi(G) = \Delta + 1$$

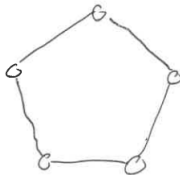
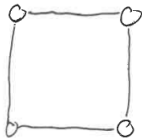
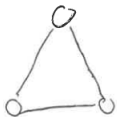
$$\chi(G) = \Delta + 1$$



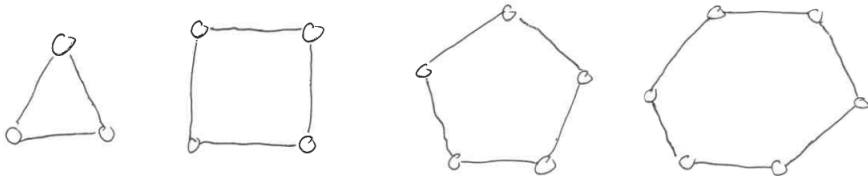
$$\chi(G) = \Delta + 1$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

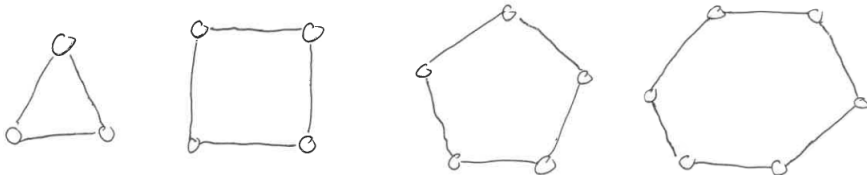


$$\chi(G) = \Delta + 1$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

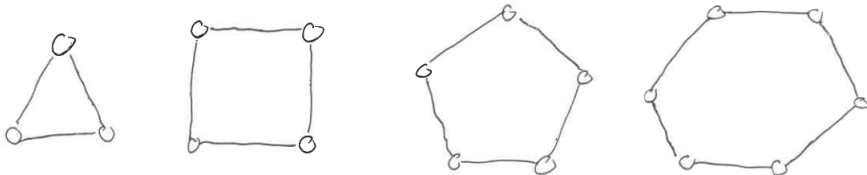
C_n — cykl mający n wierzchołków



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

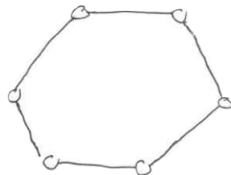
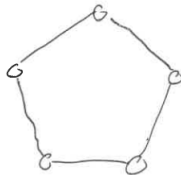
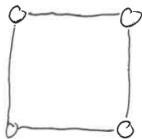
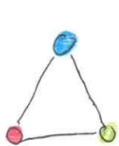
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

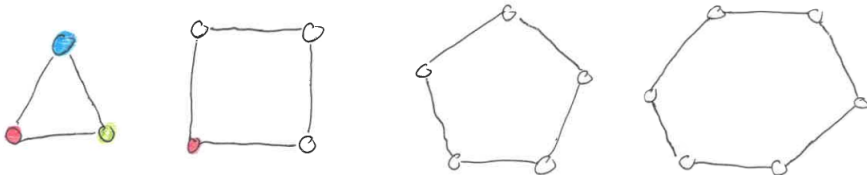
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

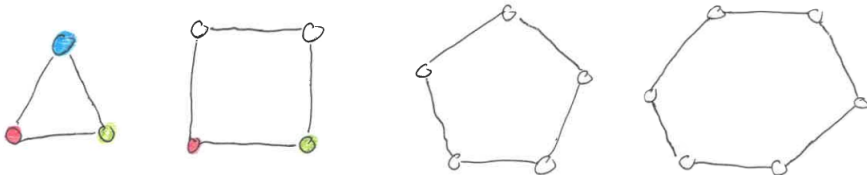
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

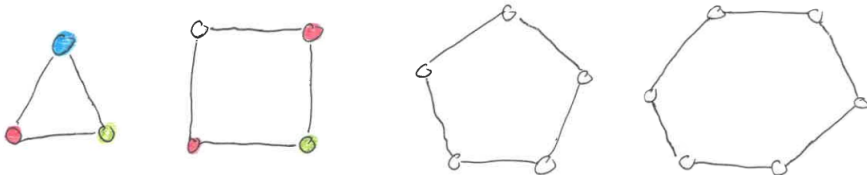
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

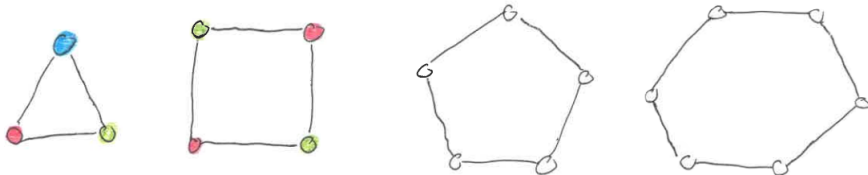
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

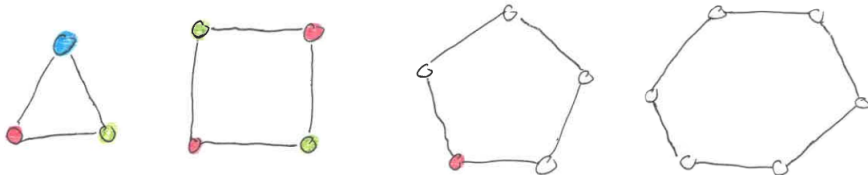
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

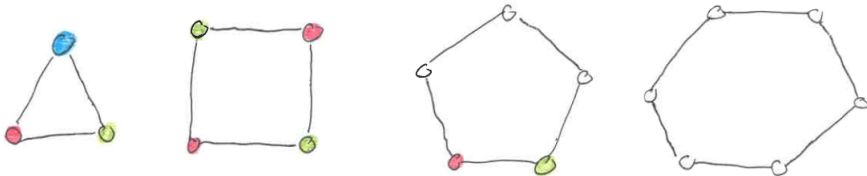
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

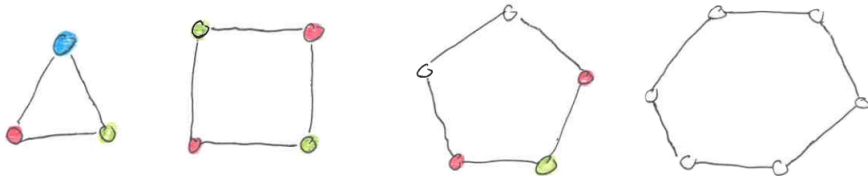
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

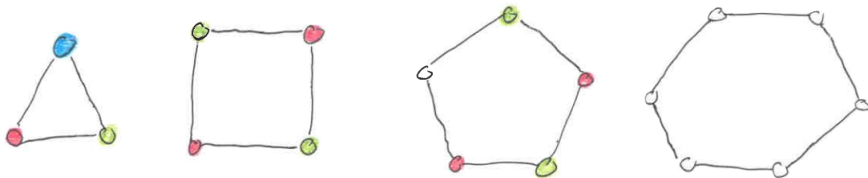
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

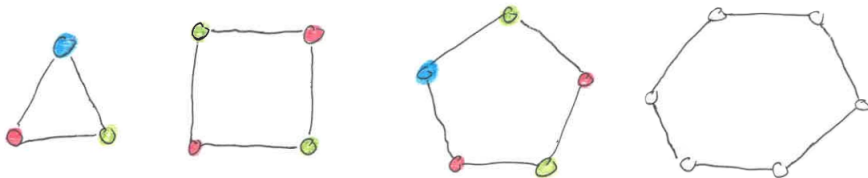
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

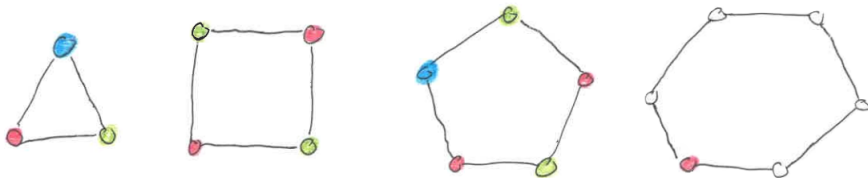
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

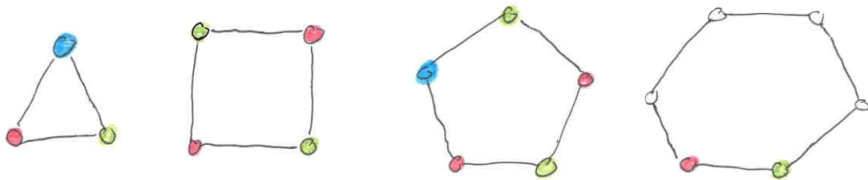
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

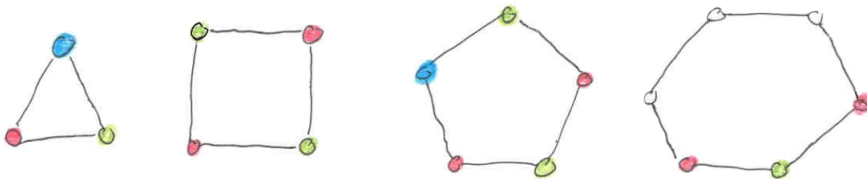
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

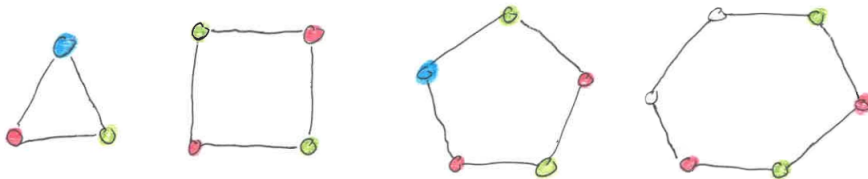
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

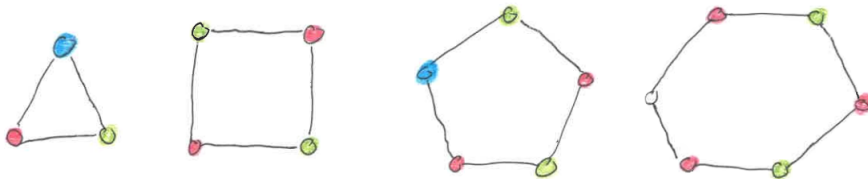
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

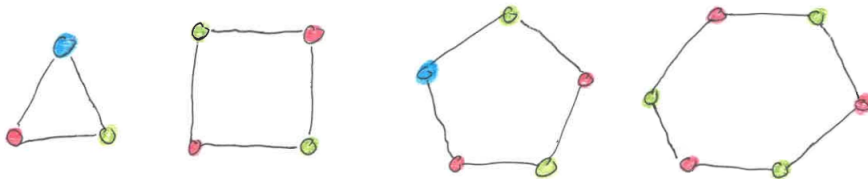
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

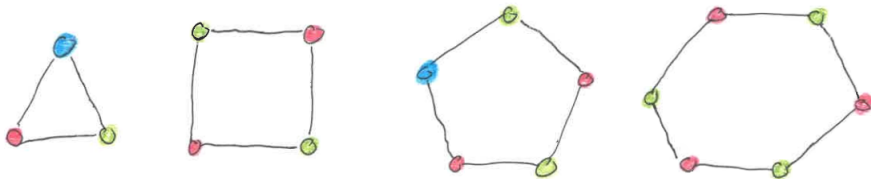
$$\Delta(C_n) = 2.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

C_n — cykl mający n wierzchołków

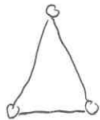
$$\Delta(C_n) = 2.$$



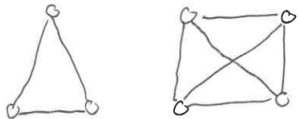
$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą} \\ 3, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$$

$$\chi(G) = \Delta + 1$$

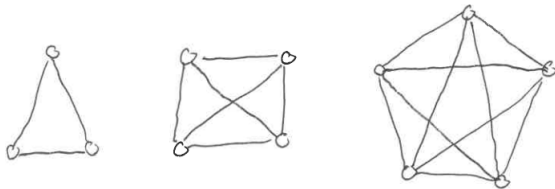
$$\chi(G) = \Delta + 1$$



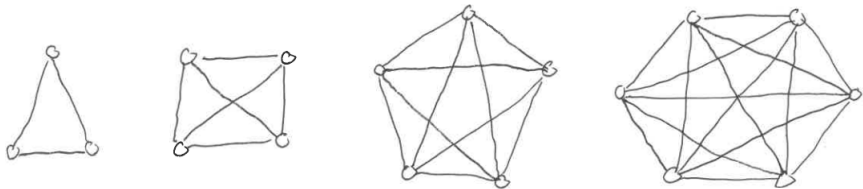
$$\chi(G) = \Delta + 1$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

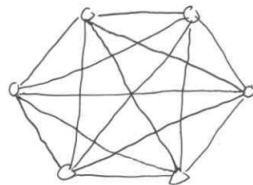
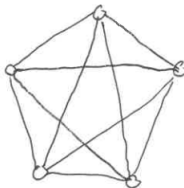
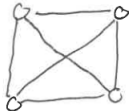


$$\chi(G) = \Delta + 1$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

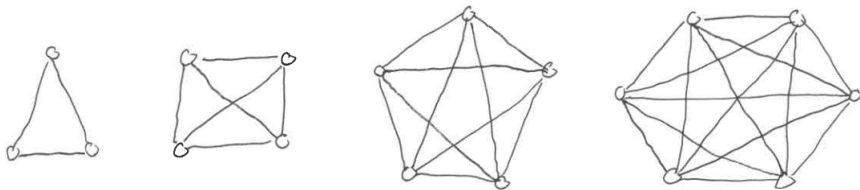
K_n — graf pełny mający n wierzchołków



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

K_n — graf pełny mający n wierzchołków

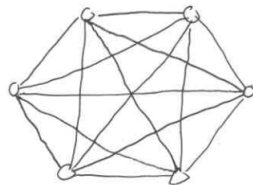
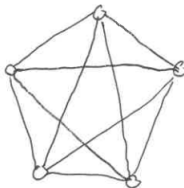
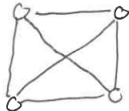
$$\Delta(K_n) = n - 1.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

K_n — graf pełny mający n wierzchołków

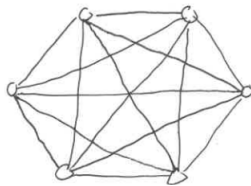
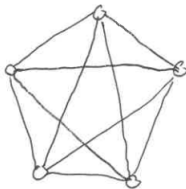
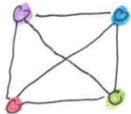
$$\Delta(K_n) = n - 1.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

K_n — graf pełny mający n wierzchołków

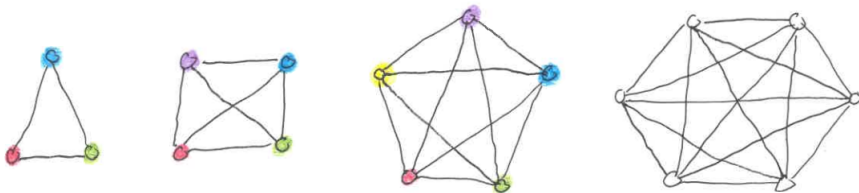
$$\Delta(K_n) = n - 1.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

K_n — graf pełny mający n wierzchołków

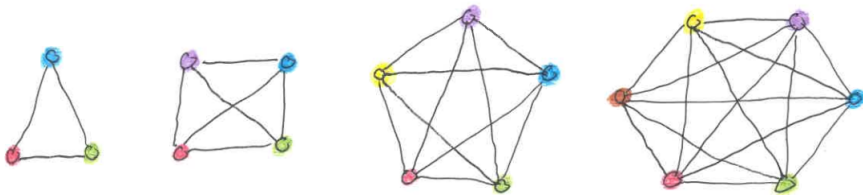
$$\Delta(K_n) = n - 1.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

K_n — graf pełny mający n wierzchołków

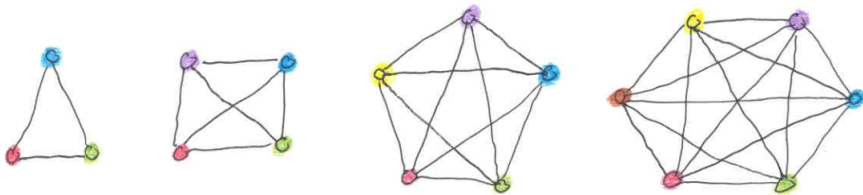
$$\Delta(K_n) = n - 1.$$



$$\chi(G) = \Delta + 1$$

K_n — graf pełny mający n wierzchołków

$$\Delta(K_n) = n - 1.$$



$$\chi(K_n) = n.$$

$$\chi(G) = \Delta + 1$$

$\chi(G) = \Delta + 1$, gdy:

- G jest nieparzystym cyklem,
- G jest grafem pełnym,
- ... ?

$$\chi(G) = \Delta + 1$$

$\chi(G) = \Delta + 1$, gdy:

- G jest nieparzystym cyklem,
- G jest grafem pełnym,
- ... ?

Twierdzenie Brooksa

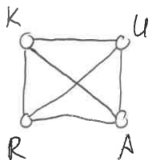
Jeżeli spójny graf G nie jest grafem pełnym ani nieparzystym cyklem, to

$$\chi(G) \leq \Delta.$$

Grafem planarnym nazywamy graf, który można narysować na płaszczyźnie w taki sposób, że żadne dwie krawędzie się nie przecinają.

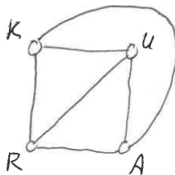
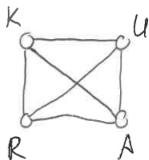
Grafem planarnym nazywamy graf, który można narysować na płaszczyźnie w taki sposób, że żadne dwie krawędzie się nie przecinają.

Przykładowy graf planarny:



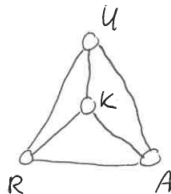
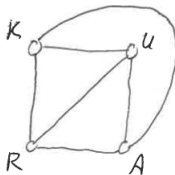
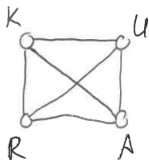
Grafem planarnym nazywamy graf, który można narysować na płaszczyźnie w taki sposób, że żadne dwie krawędzie się nie przecinają.

Przykładowy graf planarny:



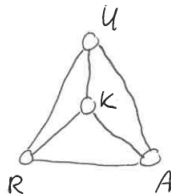
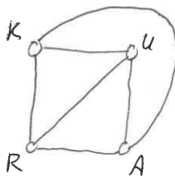
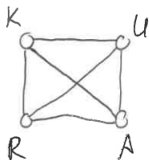
Grafem planarnym nazywamy graf, który można narysować na płaszczyźnie w taki sposób, że żadne dwie krawędzie się nie przecinają.

Przykładowy graf planarny:

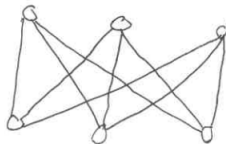
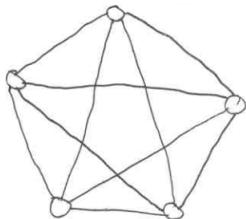


Grafem planarnym nazywamy graf, który można narysować na płaszczyźnie w taki sposób, że żadne dwie krawędzie się nie przecinają.

Przykładowy graf planarny:



Przykładowe grafy nieplanarne:



Liczba chromatyczna

Twierdzenie o czterech barwach

Jeżeli G jest grafem planarnym, to $\chi(G) \leq 4$.

Liczba chromatyczna

Twierdzenie o czterech barwach

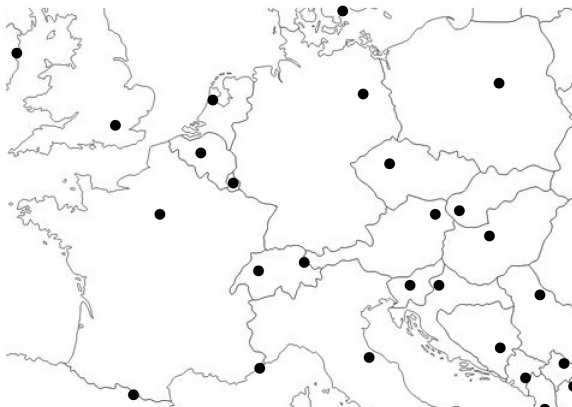
Jeżeli G jest grafem planarnym, to $\chi(G) \leq 4$.



Liczba chromatyczna

Twierdzenie o czterech barwach

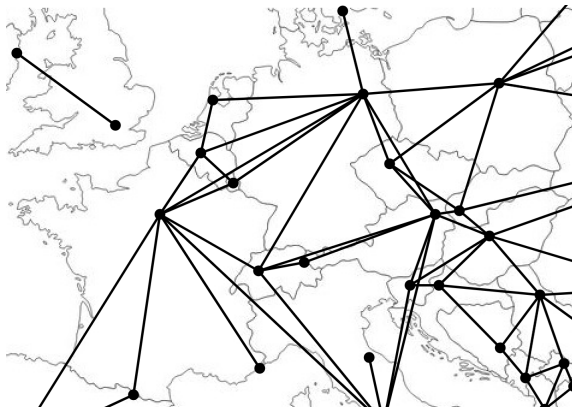
Jeżeli G jest grafem planarnym, to $\chi(G) \leq 4$.



Liczba chromatyczna

Twierdzenie o czterech barwach

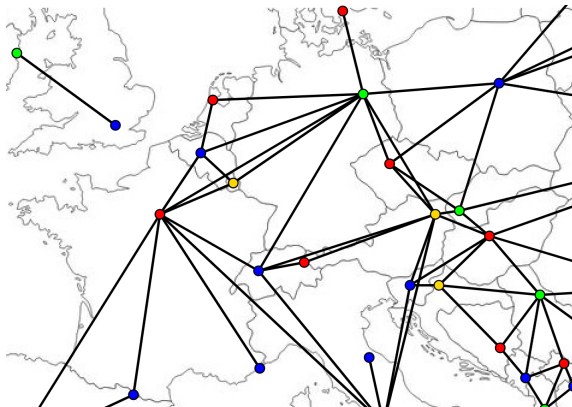
Jeżeli G jest grafem planarnym, to $\chi(G) \leq 4$.



Liczba chromatyczna

Twierdzenie o czterech barwach

Jeżeli G jest grafem planarnym, to $\chi(G) \leq 4$.



Liczba chromatyczna

Twierdzenie o czterech barwach

Jeżeli G jest grafem planarnym, to $\chi(G) \leq 4$.



Liczba chromatyczna Grundy'ego

Liczba chromatyczna Grundy'ego

Oczywiście dla każdego grafu G mamy

$$\chi(G) \leq \Gamma(G) \leq \Delta + 1.$$

Liczba chromatyczna Grundy'ego

Oczywiście dla każdego grafu G mamy

$$\chi(G) \leq \Gamma(G) \leq \Delta + 1.$$

P
Y
T
A
N
I
A



Liczba chromatyczna Grundy'ego

Oczywiście dla każdego grafu G mamy

$$\chi(G) \leq \Gamma(G) \leq \Delta + 1.$$

P
Y
T
A
N
I
A

- Czy istnieje nietrywialny graf G taki, że $\Gamma(G) = \Delta + 1$?
- Czy istnieje nietrywialny graf G taki, że $\chi(G) = \Gamma(G)$?
- Czy dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf G taki, że $\Gamma(G) - \chi(G) = k$?
- Czy istnieje odpowiednik tw. Brooksa dla liczby chromatycznej Grundy'ego?
- Co ja tu robię?
- Czy istnieje odpowiednik twierdzenia o czterech barwach dla liczby chromatycznej Grundy'ego?
- Czy wyznaczanie $\Gamma(G)$ jest (na ogół) tak trudne jak wyznaczanie $\chi(G)$?

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...)



$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

$(\text{red } 1, \text{green } 2, \text{blue } 3, \text{purple } 4, \text{yellow } 5, \text{brown } 6, \text{orange } 7, \text{black } 8, \text{white } 9, \dots)$

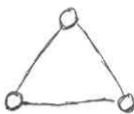


$$\Delta(K_3) = 2$$

$$\Gamma(K_3) = 3$$

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

$(\text{red } 1, \text{green } 2, \text{blue } 3, \text{purple } 4, \text{yellow } 5, \text{brown } 6, \text{orange } 7, \text{black } 8, \text{white } 9, \dots)$

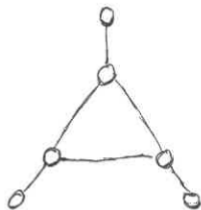


$$\Delta(K_3) = 2$$

$$\Gamma(K_3) = 3$$

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...)

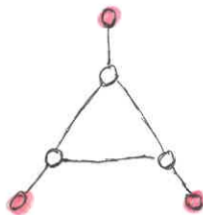


$$\Delta(K_3) = 2$$

$$\Gamma(K_3) = 3$$

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...)

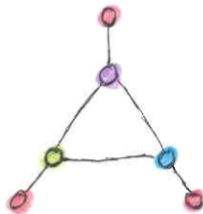


$$\Delta(K_3) = 2$$

$$\Gamma(K_3) = 3$$

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...)



$$\Delta(K_3) = 2$$

$$\Gamma(K_3) = 3$$

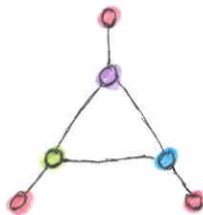
$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(, , , , , , , , , ...)



$$\Delta(K_3) = 2$$

$$\Gamma(K_3) = 3$$



$$\Delta(K'_3) = 3$$

$$\Gamma(K'_3) = 4$$

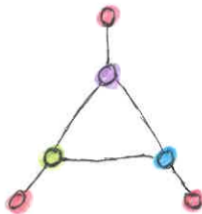
$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)



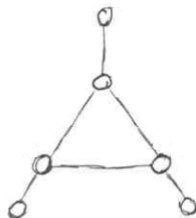
$$\Delta(K_3) = 2$$

$$\Gamma(K_3) = 3$$



$$\Delta(K'_3) = 3$$

$$\Gamma(K'_3) = 4$$



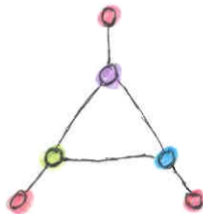
$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)



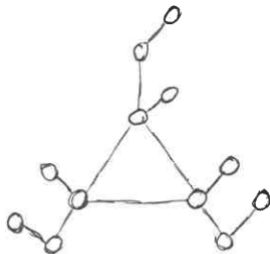
$$\Delta(K_3) = 2$$

$$\Gamma(K_3) = 3$$



$$\Delta(K'_3) = 3$$

$$\Gamma(K'_3) = 4$$



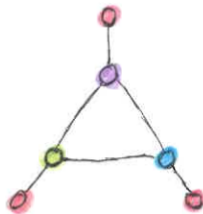
$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)



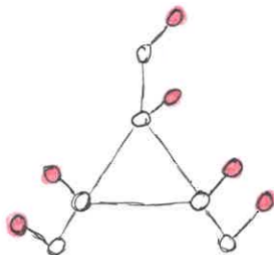
$$\Delta(K_3) = 2$$

$$\Gamma(K_3) = 3$$



$$\Delta(K'_3) = 3$$

$$\Gamma(K'_3) = 4$$



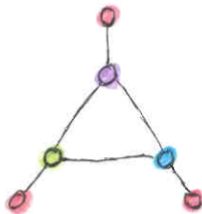
$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)



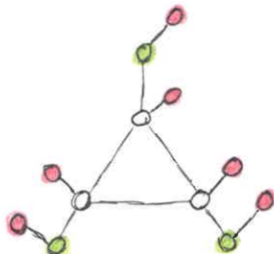
$$\Delta(K_3) = 2$$

$$\Gamma(K_3) = 3$$



$$\Delta(K'_3) = 3$$

$$\Gamma(K'_3) = 4$$



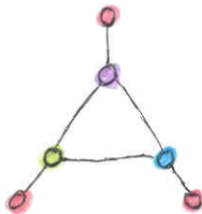
$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)



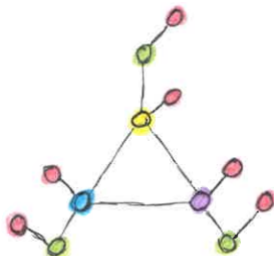
$$\Delta(K_3) = 2$$

$$\Gamma(K_3) = 3$$



$$\Delta(K'_3) = 3$$

$$\Gamma(K'_3) = 4$$



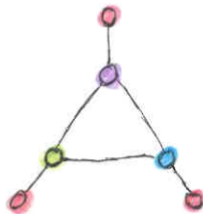
$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)



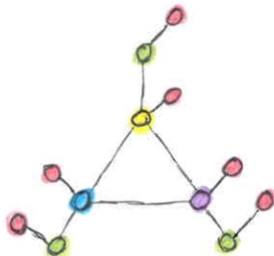
$$\Delta(K_3) = 2$$

$$\Gamma(K_3) = 3$$



$$\Delta(K'_3) = 3$$

$$\Gamma(K'_3) = 4$$

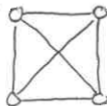
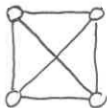
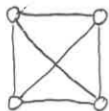


$$\Delta(K''_3) = 4$$

$$\Gamma(K''_3) = 5$$

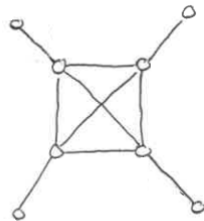
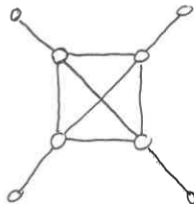
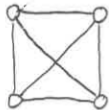
$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...)



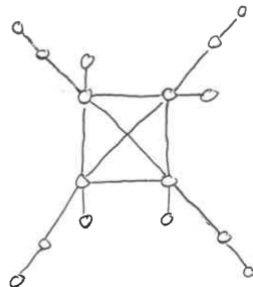
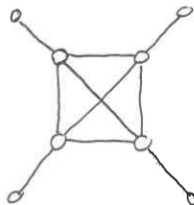
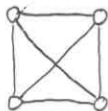
$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)



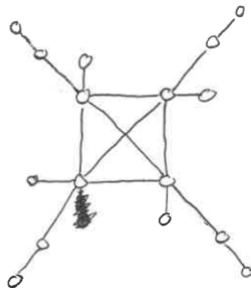
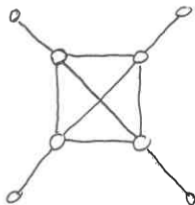
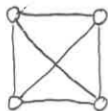
$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)



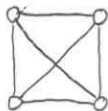
$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)

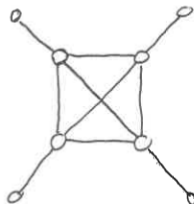


$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

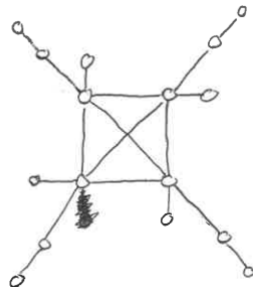
(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)



$$\Delta(K_4) = 3$$



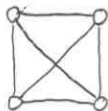
$$\Delta(K'_4) = 4$$



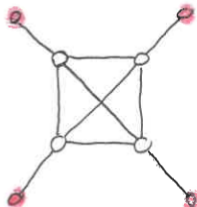
$$\Delta(K''_4) = 5$$

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

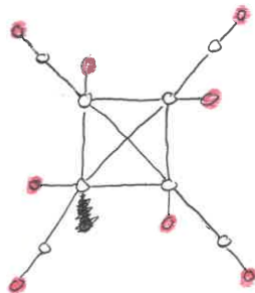
(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)



$$\Delta(K_4) = 3$$



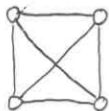
$$\Delta(K'_4) = 4$$



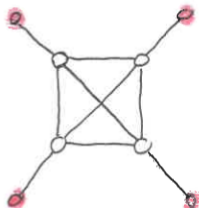
$$\Delta(K''_4) = 5$$

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

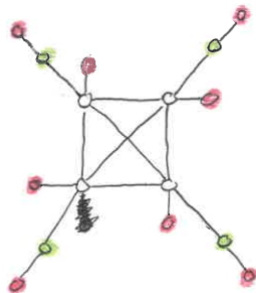
(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)



$$\Delta(K_4) = 3$$



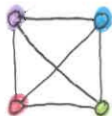
$$\Delta(K'_4) = 4$$



$$\Delta(K''_4) = 5$$

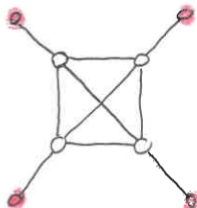
$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)

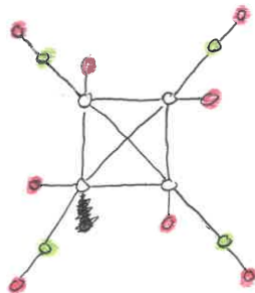


$$\Delta(K_4) = 3$$

$$\Gamma(K_4) = 4$$



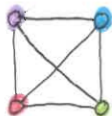
$$\Delta(K'_4) = 4$$



$$\Delta(K''_4) = 5$$

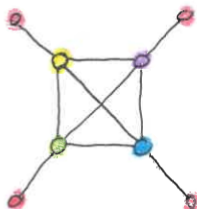
$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)



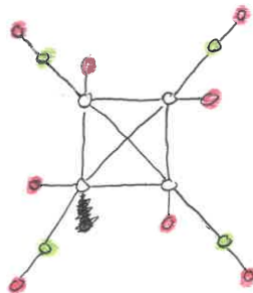
$$\Delta(K_4) = 3$$

$$\Gamma(K_4) = 4$$



$$\Delta(K'_4) = 4$$

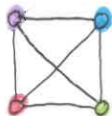
$$\Gamma(K'_4) = 5$$



$$\Delta(K''_4) = 5$$

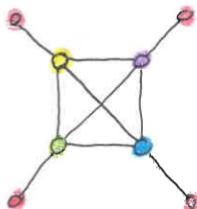
$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)



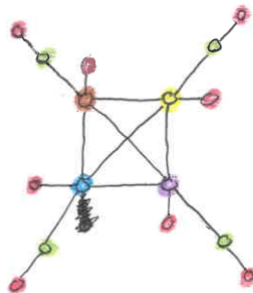
$$\Delta(K_4) = 3$$

$$\Gamma(K_4) = 4$$



$$\Delta(K'_4) = 4$$

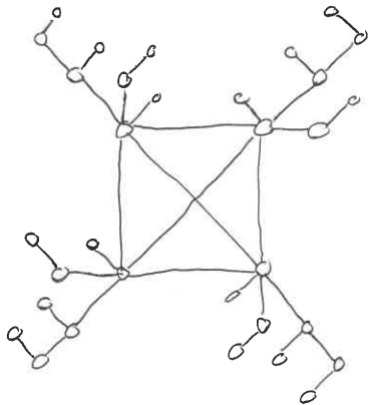
$$\Gamma(K'_4) = 5$$



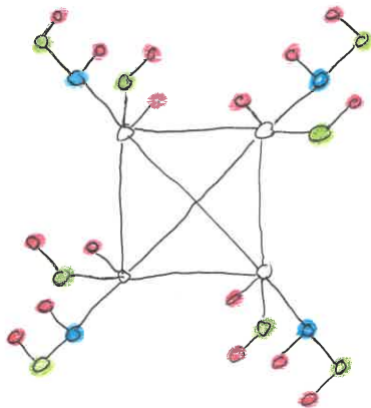
$$\Delta(K''_4) = 5$$

$$\Gamma(K''_4) = 6$$

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

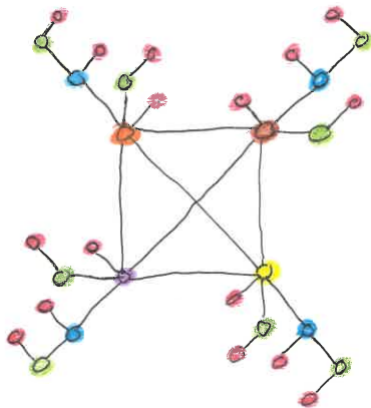


$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$



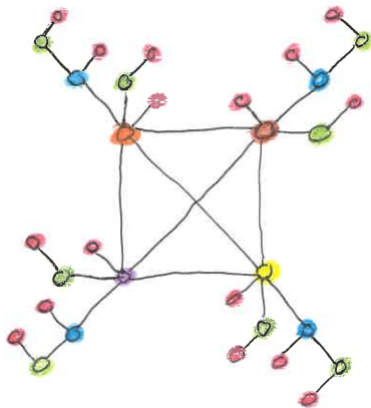
(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ●₉, ...)

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$



(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$



(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)

$$\Delta(K_4''') = 6$$

$$\Gamma(K_4''') = 7$$

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

Grafy, których liczba Grundy'ego wynosi $\Delta + 1$:

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

Grafy, których liczba Grundy'ego wynosi $\Delta + 1$:

- cykle C_n dla $n \neq 4$,

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

Grafy, których liczba Grundy'ego wynosi $\Delta + 1$:

- cykle C_n dla $n \neq 4$,
- grafy pełne K_n ,

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

Grafy, których liczba Grundy'ego wynosi $\Delta + 1$:

- cykle C_n dla $n \neq 4$,
- grafy pełne K_n ,
- jeżeli graf G ma tę własność, to $G \odot K_1$ też

$$\Gamma(G) = \Delta + 1$$

Grafy, których liczba Grundy'ego wynosi $\Delta + 1$:

- cykle C_n dla $n \neq 4$,
- grafy pełne K_n ,
- jeżeli graf G ma tę własność, to $G \odot K_1$ też
- ... ?

$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

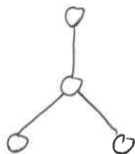
Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:

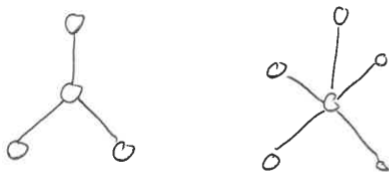


$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:

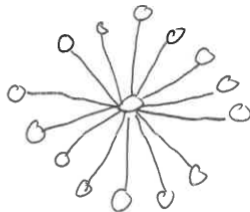
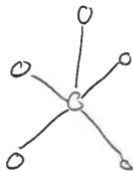
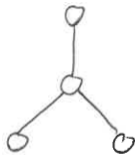


$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:

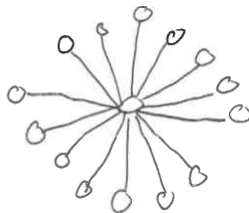
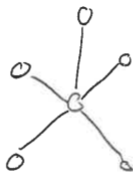
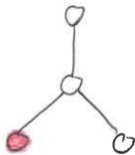


$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:

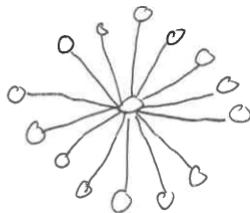
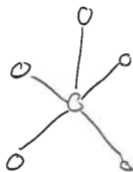
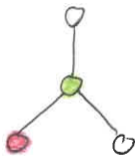


$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:

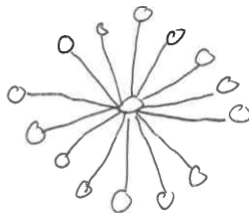
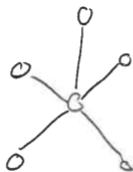
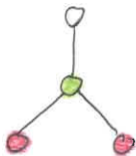


$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:

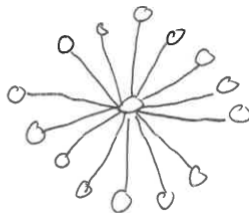
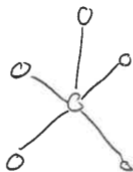
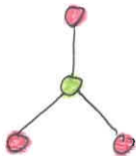


$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:

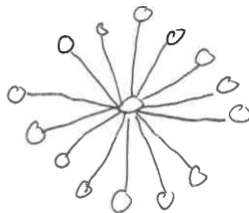
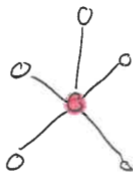
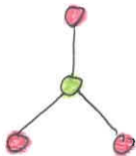


$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:

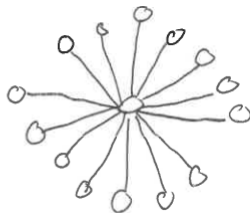
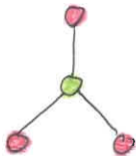


$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:

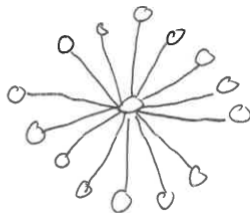
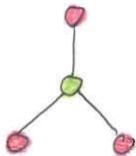


$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:

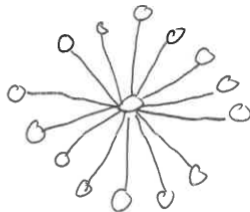
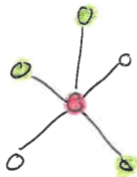
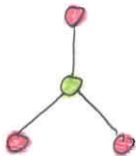


$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:

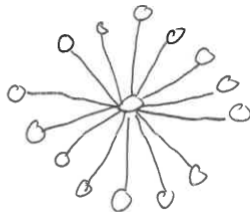
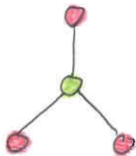


$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:

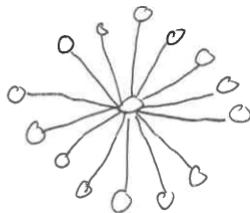
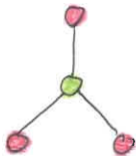


$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:

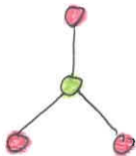


$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:

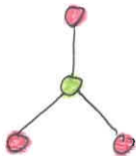


$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:

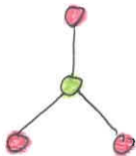


$$\chi(G) = \Gamma(G)$$

Jeżeli $\chi(G) = \Gamma(G)$, to graf G nazywamy *dobrze kolorowanym* (well-colored).

Przykładami grafów dobrze kolorowanych są oczywiście grafy pełne i cykle długości nieparzystej.

Inne przykłady stanowią np. gwiazdy:



$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromatyczną?

$\Gamma(G) - \chi(G) = k$ i grafy dwudziennie

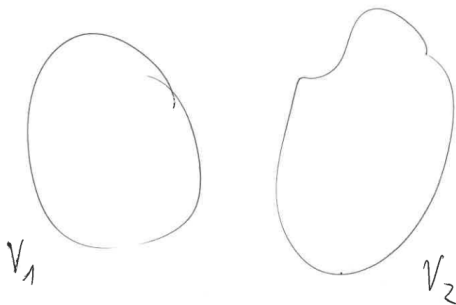
Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromatyczną?

Graf G nazywamy *grafem dwudzielnym*, jeżeli $V(G) = V_1 \cup V_2$, gdzie $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i $E(G) \subset \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$.

$\Gamma(G) - \chi(G) = k$ i grafy dwudziennie

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromatyczną?

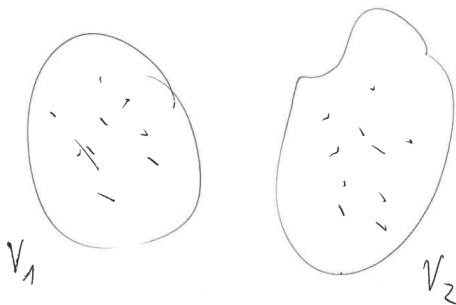
Graf G nazywamy *grafem dwudzielnym*, jeżeli $V(G) = V_1 \cup V_2$, gdzie $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i $E(G) \subset \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$.



$\Gamma(G) - \chi(G) = k$ i grafy dwudzielnienie

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromatyczną?

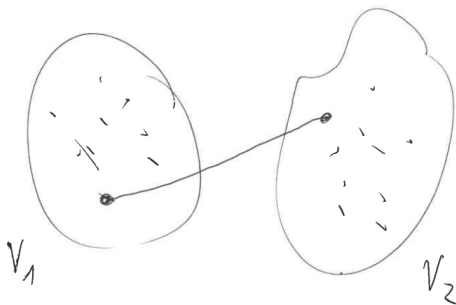
Graf G nazywamy *grafem dwudzielnym*, jeżeli $V(G) = V_1 \cup V_2$, gdzie $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i $E(G) \subset \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$.



$\Gamma(G) - \chi(G) = k$ i grafy dwudziennie

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromatyczną?

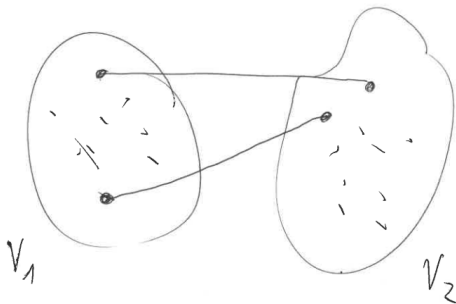
Graf G nazywamy *grafem dwudzielnym*, jeżeli $V(G) = V_1 \cup V_2$, gdzie $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i $E(G) \subset \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$.



$\Gamma(G) - \chi(G) = k$ i grafy dwudziennie

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromatyczną?

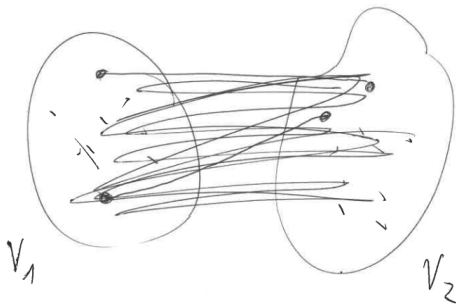
Graf G nazywamy *grafem dwudzielnym*, jeżeli $V(G) = V_1 \cup V_2$, gdzie $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i $E(G) \subset \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$.



$\Gamma(G) - \chi(G) = k$ i grafy dwudzielnienie

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromatyczną?

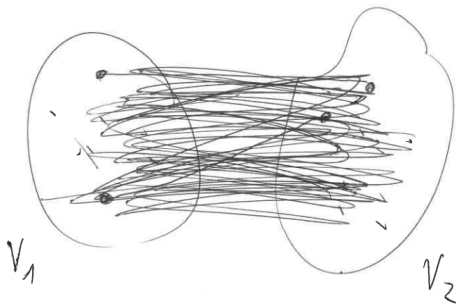
Graf G nazywamy *grafem dwudzielnym*, jeżeli $V(G) = V_1 \cup V_2$, gdzie $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i $E(G) \subset \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$.



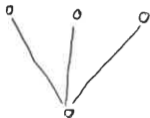
$\Gamma(G) - \chi(G) = k$ i grafy dwudziennie

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromatyczną?

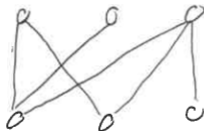
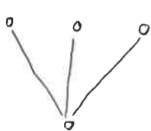
Graf G nazywamy *grafem dwudzielnym*, jeżeli $V(G) = V_1 \cup V_2$, gdzie $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i $E(G) \subset \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$.



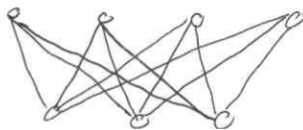
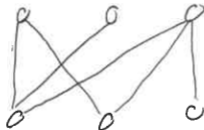
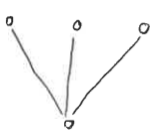
Grafy dwudzielne



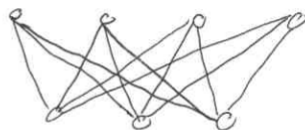
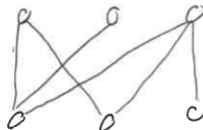
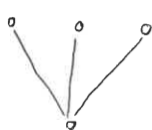
Grafy dwudzielne



Grafy dwudzielne



Grafy dwudzielne



Jeżeli G jest grafem dwudzielnym, to $\chi(G) \leq 2$.

Grafy dwudzielne



Jeżeli G jest grafem dwudzielnym, to $\chi(G) \leq 2$.

Grafy dwudzielne



Jeżeli G jest grafem dwudzielnym, to $\chi(G) \leq 2$.

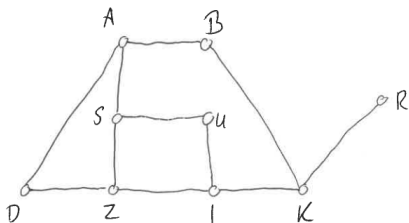
Graf G jest grafem dwudzielnym z niepustym zbiorem krawędzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi(G) = 2$.

Grafy dwudzielne



Jeżeli G jest grafem dwudzielnym, to $\chi(G) \leq 2$.

Graf G jest grafem dwudzielnym z niepustym zbiorem krawędzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi(G) = 2$.

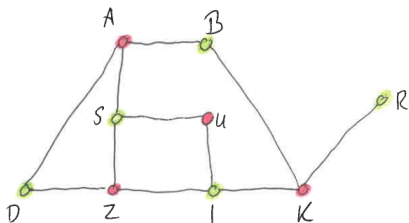


Grafy dwudzielne

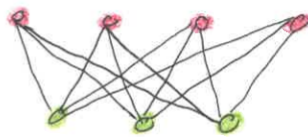
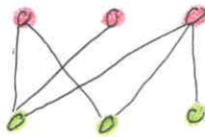
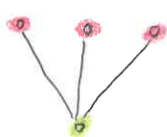


Jeżeli G jest grafem dwudzielnym, to $\chi(G) \leq 2$.

Graf G jest grafem dwudzielnym z niepustym zbiorem krawędzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi(G) = 2$.

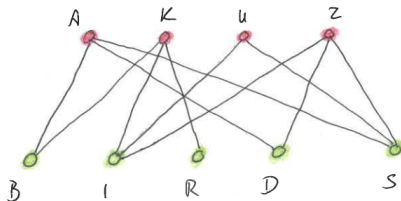
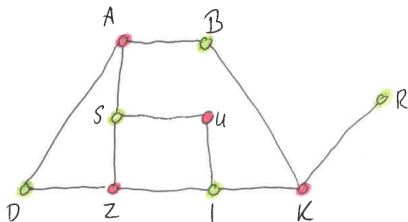


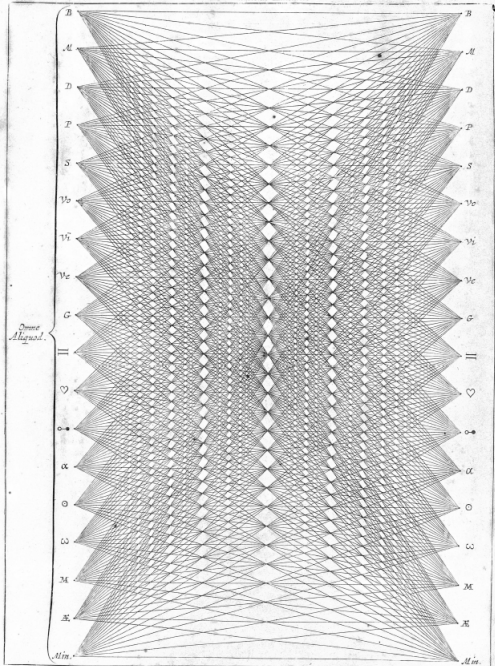
Grafy dwudzielne

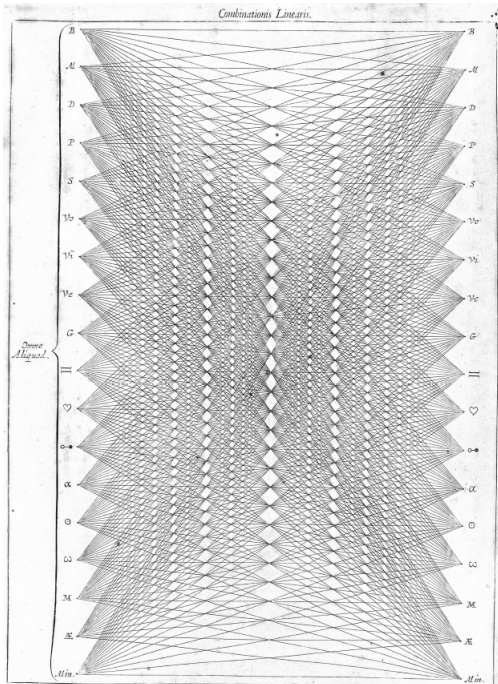


Jeżeli G jest grafem dwudzielnym, to $\chi(G) \leq 2$.

Graf G jest grafem dwudzielnym z niepustym zbiorem krawędzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi(G) = 2$.







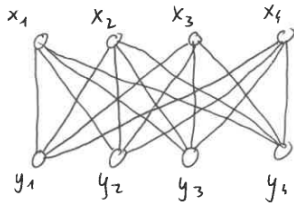
$K_{18,18}$
A. Kircher (1669)
Ars Magna Sciendi Sive
Combinatoria

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromatyczną?

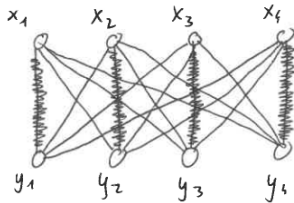
$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromatyczną?



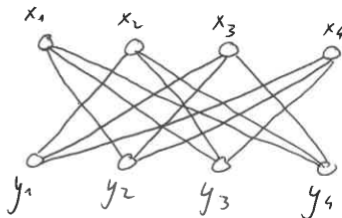
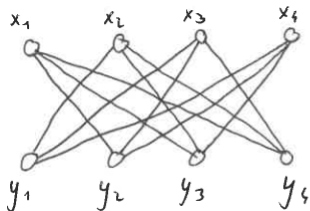
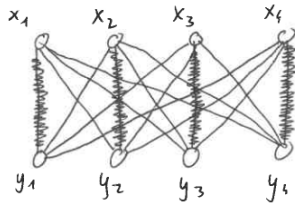
$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromatyczną?



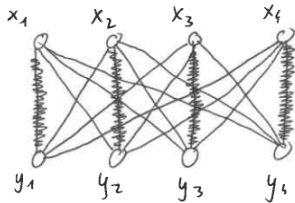
$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?

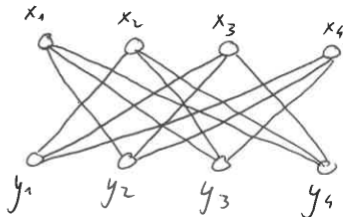
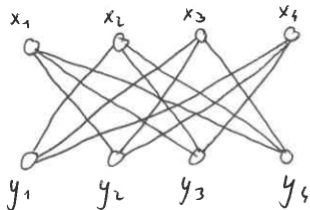


$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



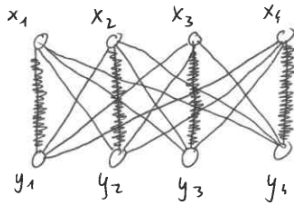
$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



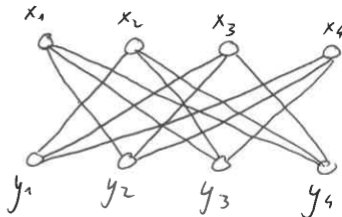
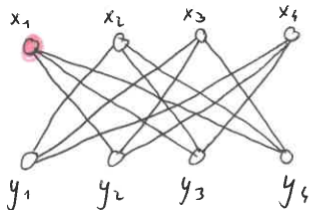
$(\text{red } 1, \text{green } 2, \text{blue } 3, \text{purple } 4, \text{yellow } 5, \text{dark red } 6, \text{orange } 7, \text{black } 8, \text{white } 9, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



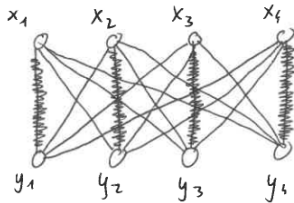
$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



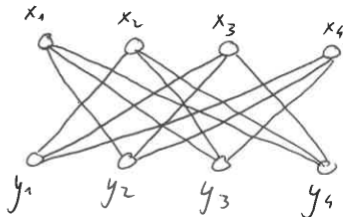
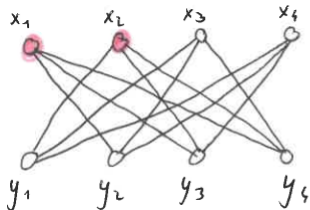
$(\text{red circle } 1, \text{green circle } 2, \text{blue circle } 3, \text{purple circle } 4, \text{yellow circle } 5, \text{orange circle } 6, \text{red circle } 7, \text{black circle } 8, \text{white circle } 9, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



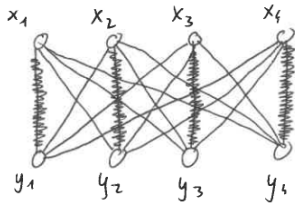
$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



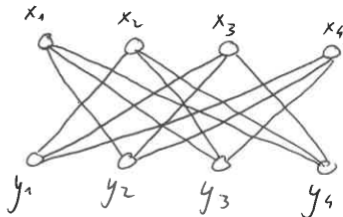
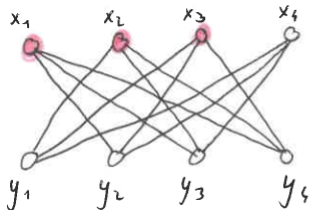
$(\text{red}, \text{green}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}, \text{orange}, \text{red}, \text{black}, \text{white}, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



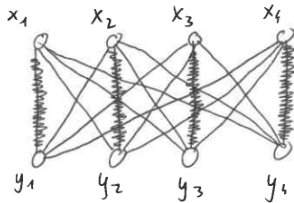
$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



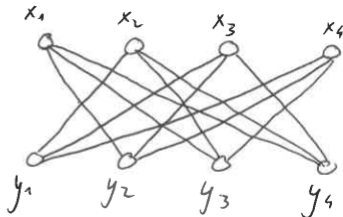
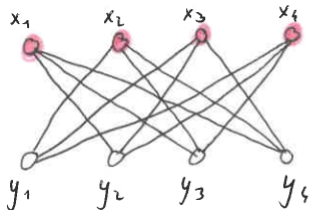
$(\text{red } 1, \text{green } 2, \text{blue } 3, \text{purple } 4, \text{yellow } 5, \text{orange } 6, \text{red } 7, \text{black } 8, \text{white } 9, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



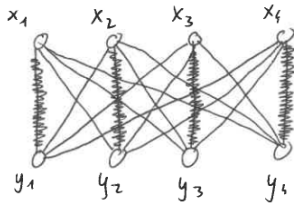
$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



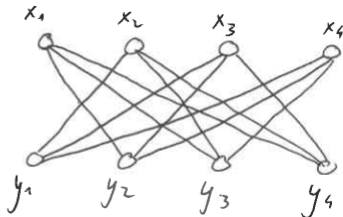
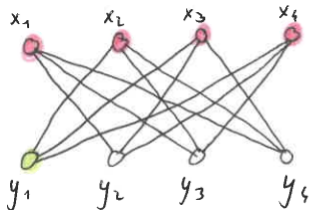
$(\text{red circle } 1, \text{green circle } 2, \text{blue circle } 3, \text{purple circle } 4, \text{yellow circle } 5, \text{orange circle } 6, \text{red circle } 7, \text{black circle } 8, \text{white circle } 9, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



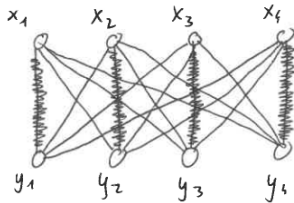
$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



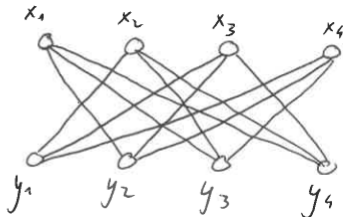
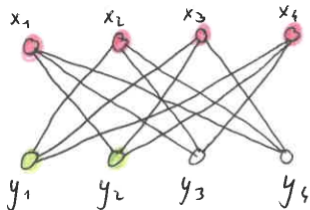
$(\text{pink}, \text{green}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}, \text{red}, \text{orange}, \text{black}, \text{white}, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



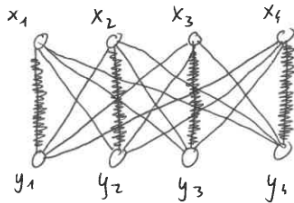
$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



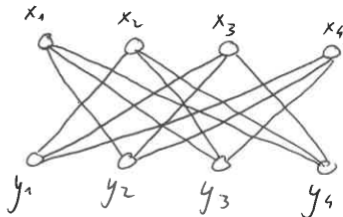
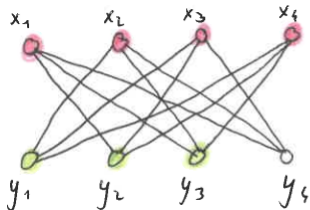
$(\text{pink}, \text{yellow}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}, \text{red}, \text{orange}, \text{black}, \text{white}, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



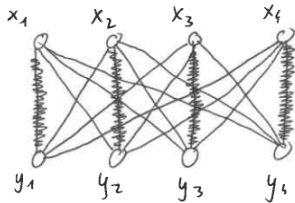
$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



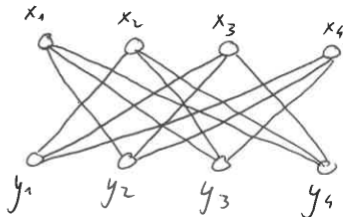
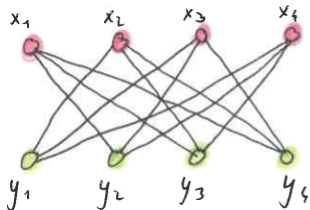
$(\text{pink}, \text{yellow}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}, \text{red}, \text{orange}, \text{black}, \text{white}, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



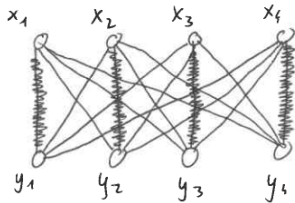
$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



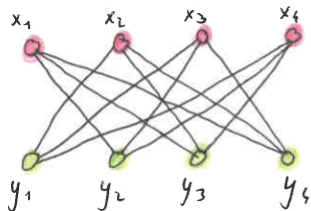
$(\text{red}, \text{green}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}, \text{orange}, \text{red}, \text{black}, \text{white}, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

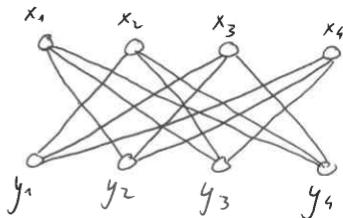
Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



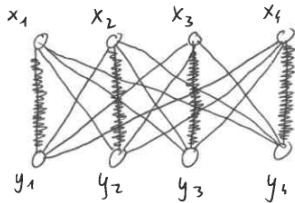
$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$:



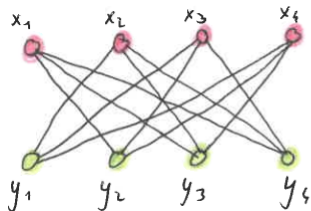
$(\text{red}, \text{green}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}, \text{orange}, \text{red}, \text{black}, \text{white}, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

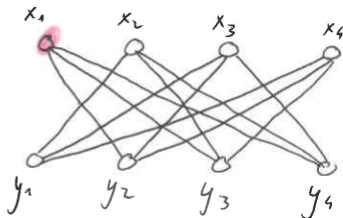
Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



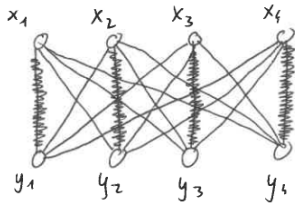
$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$:



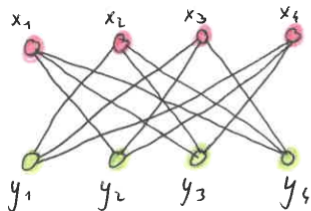
$(\text{pink}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{red}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

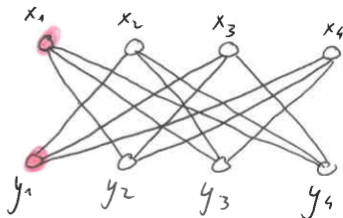
Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



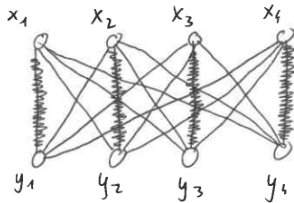
$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$:



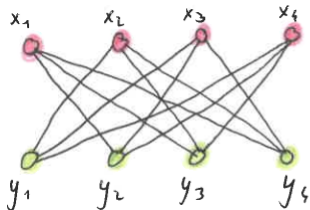
$(\text{pink}, \text{yellow}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}, \text{red}, \text{orange}, \text{black}, \text{white}, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

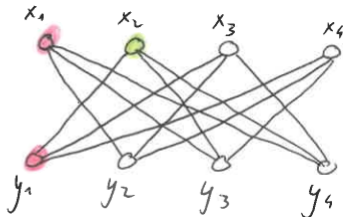
Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



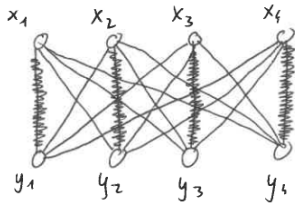
$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$:



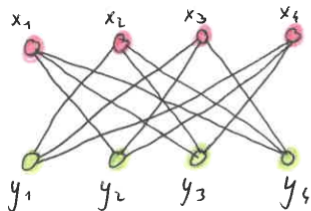
$(\text{pink}, \text{yellow}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}, \text{red}, \text{orange}, \text{black}, \text{white}, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

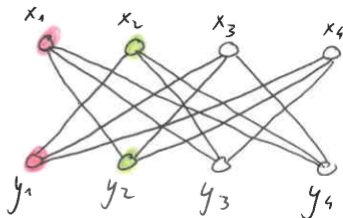
Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromatyczną?



$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



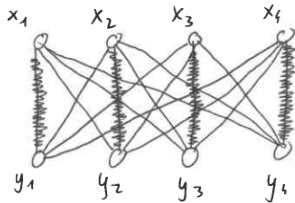
$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$:



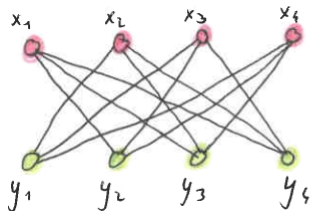
$(\text{pink}, \text{yellow}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}, \text{red}, \text{orange}, \text{black}, \text{white}, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

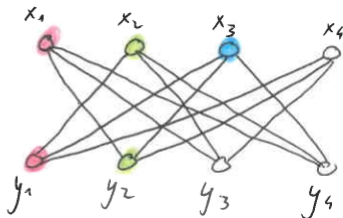
Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



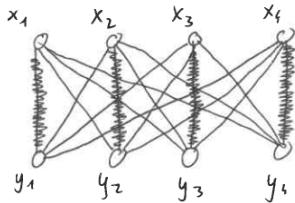
$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$:



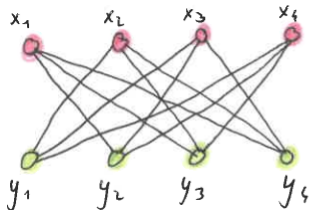
$(\text{pink}, \text{yellow}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}, \text{red}, \text{orange}, \text{black}, \text{white}, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

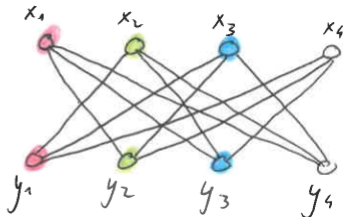
Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



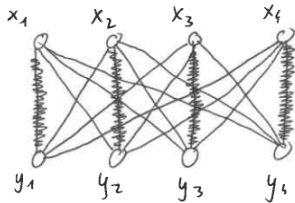
$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$:



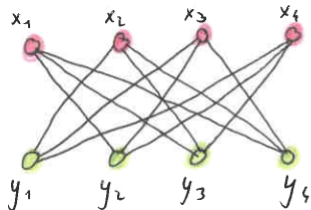
$(\text{pink}, \text{yellow}, \text{blue}, \text{white}, \text{pink}, \text{yellow}, \text{blue}, \text{white}, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

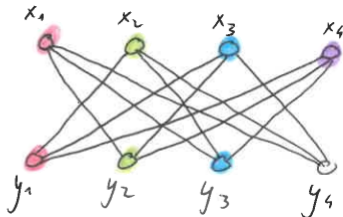
Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



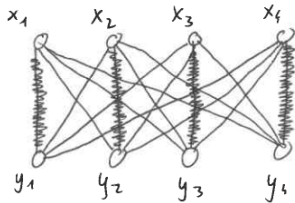
$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$:



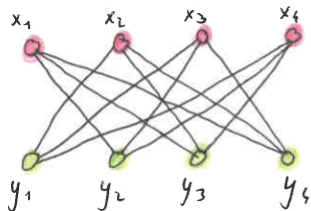
$(\text{pink}, \text{green}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}, \text{red}, \text{orange}, \text{black}, \text{white}, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

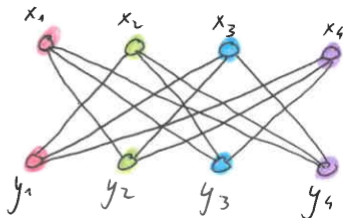
Jak duża może być różnica między liczbą chromatyczną Grundy'ego, a liczbą chromaticzną?



$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$:



$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$:



$(\text{pink}, \text{yellow-green}, \text{blue}, \text{purple}, \text{yellow}, \text{red}, \text{orange}, \text{black}, \text{white}, \dots)$

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak dla ustalonej liczby k stworzyć graf G taki, że $\Gamma(G) - \chi(G) = k$?

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak dla ustalonej liczby k stworzyć graf G taki, że $\Gamma(G) - \chi(G) = k$?

Przepis:

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak dla ustalonej liczby k stworzyć graf G taki, że $\Gamma(G) - \chi(G) = k$?

Przepis:

- Weź graf pełny dwudzielny $K_{k+2,k+2}$ ze zbiorami wierzchołków $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{k+2}\}$ i $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{k+2}\}$.

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak dla ustalonej liczby k stworzyć graf G taki, że $\Gamma(G) - \chi(G) = k$?

Przepis:

- Weź graf pełny dwudzielny $K_{k+2,k+2}$ ze zbiorami wierzchołków $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{k+2}\}$ i $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{k+2}\}$.
- Usuń z tego grafu idealne skojarzenia: $x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_{k+2}y_{k+2}$.

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak dla ustalonej liczby k stworzyć graf G taki, że $\Gamma(G) - \chi(G) = k$?

Przepis:

- Weź graf pełny dwudzielny $K_{k+2,k+2}$ ze zbiorami wierzchołków $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{k+2}\}$ i $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{k+2}\}$.
- Usuń z tego grafu idealne skojarzenia: $x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_{k+2}y_{k+2}$.
- Koloruj naprzemiennie: $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{k+2}, y_{k+2}$.

$$\Gamma(G) - \chi(G) = k$$

Jak dla ustalonej liczby k stworzyć graf G taki, że $\Gamma(G) - \chi(G) = k$?

Przepis:

- Weź graf pełny dwudzielny $K_{k+2,k+2}$ ze zbiorami wierzchołków $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{k+2}\}$ i $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{k+2}\}$.
- Usuń z tego grafu idealne skojarzenia: $x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_{k+2}y_{k+2}$.
- Koloruj naprzemiennie: $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{k+2}, y_{k+2}$.

Bonus! Otrzymałeś graf z największą możliwą liczbą Grundy'ego względem Δ .

Twierdzenie Brooksa względem liczby chromatycznej Grundy'ego

Twierdzenie Brooksa względem liczby chromatycznej Grundy'ego

Grafy, których liczba Grundy'ego wynosi $\Delta + 1$:

Twierdzenie Brooksa względem liczby chromatycznej Grundy'ego

Grafy, których liczba Grundy'ego wynosi $\Delta + 1$:

- cykle C_n dla $n \neq 4$,

Twierdzenie Brooksa względem liczby chromatycznej Grundy'ego

Grafy, których liczba Grundy'ego wynosi $\Delta + 1$:

- cykle C_n dla $n \neq 4$,
- grafy pełne K_n ,

Twierdzenie Brooksa względem liczby chromatycznej Grundy'ego

Grafy, których liczba Grundy'ego wynosi $\Delta + 1$:

- cykle C_n dla $n \neq 4$,
- grafy pełne K_n ,
- jeżeli graf G ma tę własność, to $G \odot K_1$ też

Twierdzenie Brooksa względem liczby chromatycznej Grundy'ego

Grafy, których liczba Grundy'ego wynosi $\Delta + 1$:

- cykle C_n dla $n \neq 4$,
- grafy pełne K_n ,
- jeżeli graf G ma tę własność, to $G \odot K_1$ też
- pewne grafy dwudzielne

Twierdzenie Brooksa względem liczby chromatycznej Grundy'ego?

Grafy, których liczba Grundy'ego wynosi $\Delta + 1$:

- cykle C_n dla $n \neq 4$,
- grafy pełne K_n ,
- jeżeli graf G ma tę własność, to $G \odot K_1$ też
- pewne grafy dwudzielne (ale które?)

Twierdzenie Brooksa względem liczby chromatycznej Grundy'ego?

Grafy, których liczba Grundy'ego wynosi $\Delta + 1$:

- cykle C_n dla $n \neq 4$,
- grafy pełne K_n ,
- jeżeli graf G ma tę własność, to $G \odot K_1$ też
- pewne grafy dwudzielne (ale które?)
- ... ?

Twierdzenie Brooksa w względem liczby chromatycznej Grundy'ego?

Grafy, których liczba Grundy'ego wynosi $\Delta + 1$:

- cykle C_n dla $n \neq 4$,
- grafy pełne K_n ,
- jeżeli graf G ma tę własność, to $G \odot K_1$ też
- pewne grafy dwudzielne (ale które?)
- ... ?

Określenie, czy graf dwudzielny G spełnia $\Gamma(G) = \Delta + 1$ jest problemem *NP*-zupełnym!

Twierdzenie Brooksa względem liczby chromatycznej Grundy'ego?

Grafy, których liczba Grundy'ego wynosi $\Delta + 1$:

- cykle C_n dla $n \neq 4$,
- grafy pełne K_n ,
- jeżeli graf G ma tę własność, to $G \odot K_1$ też
- pewne grafy dwudzielne (ale które?)
- ... ?

Określenie, czy graf dwudzielny G spełnia $\Gamma(G) = \Delta + 1$ jest problemem *NP*-zupełnym!

Nie da się scharakteryzować grafów dwudzielnych o maksymalnej możliwej liczbie Grundy'ego, więc nie ma odpowiednika twierdzenia Brooksa względem liczby chromatycznej Grundy'ego.

twierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

twierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.

0

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



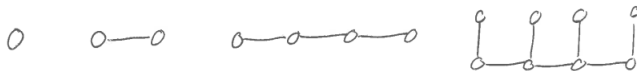
Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



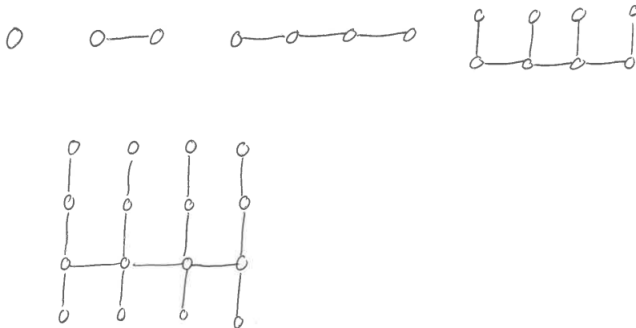
Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



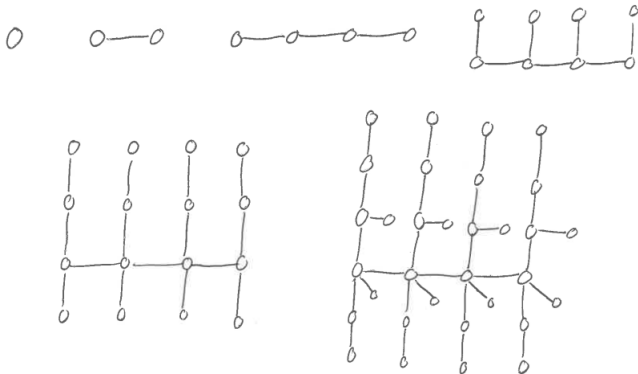
Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



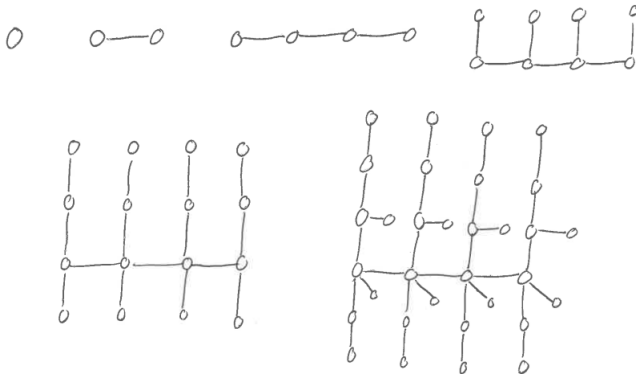
Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

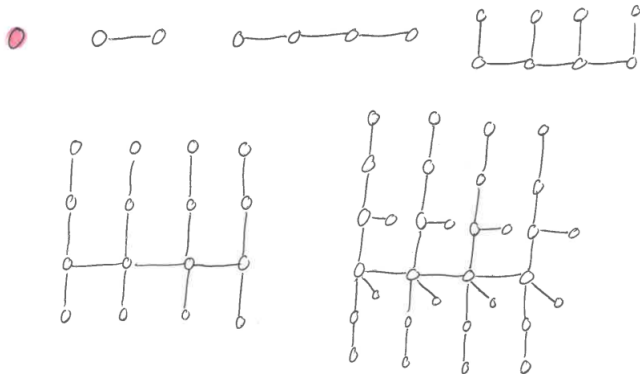
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(●₁, ●₂, ●₃, ●₄, ●₅, ●₆, ●₇, ●₈, ○₉, ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

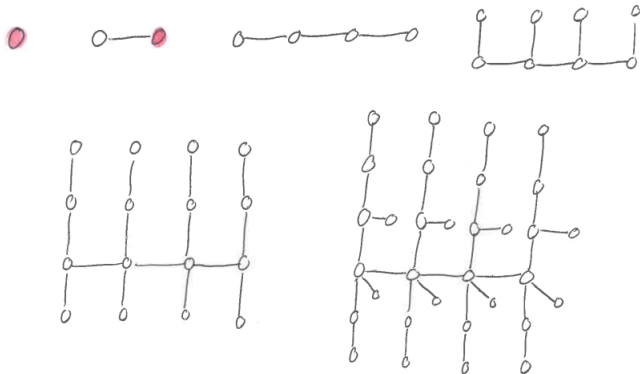
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(₁, ₂, ₃, ₄, ₅, ₆, ₇, ₈, ₉, ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

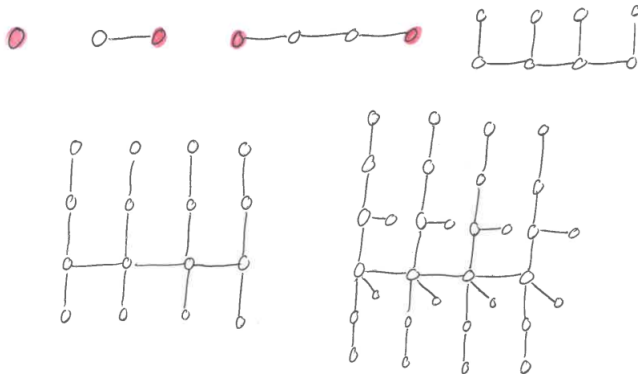
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(, , , , , , , , , ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

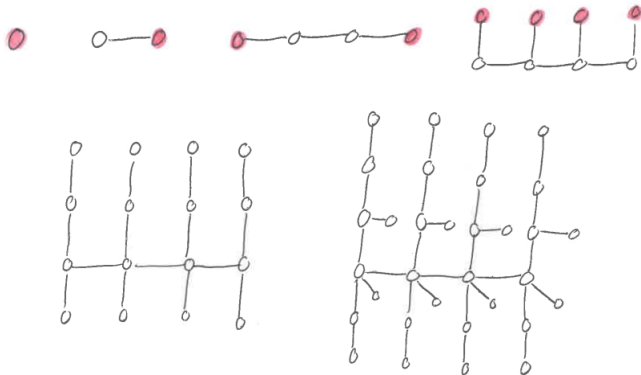
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

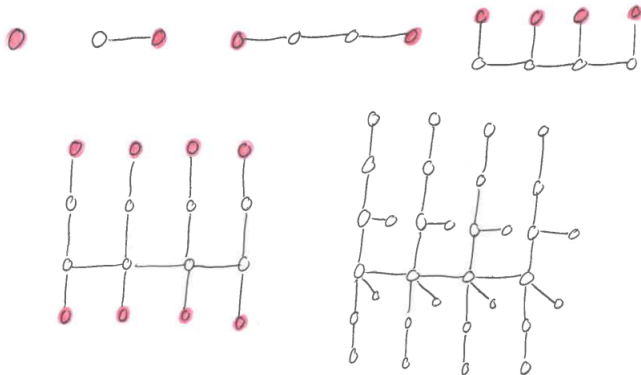
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(, , , , , , , , , ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

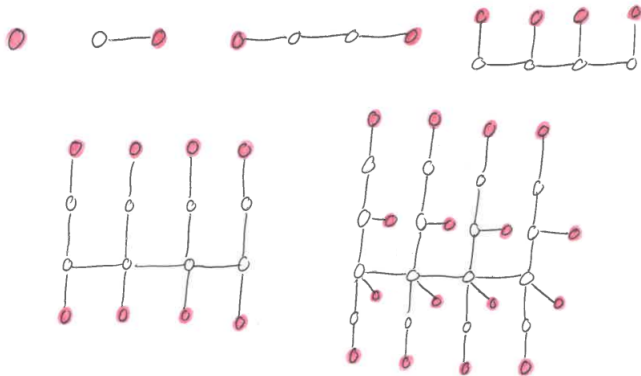
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(₁, ₂, ₃, ₄, ₅, ₆, ₇, ₈, ₉, ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

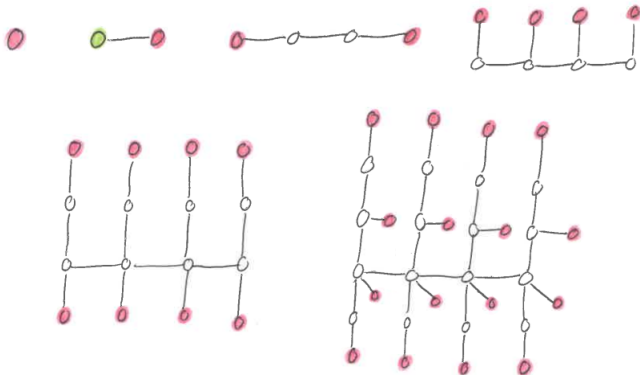
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(, , , , , , , , , ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

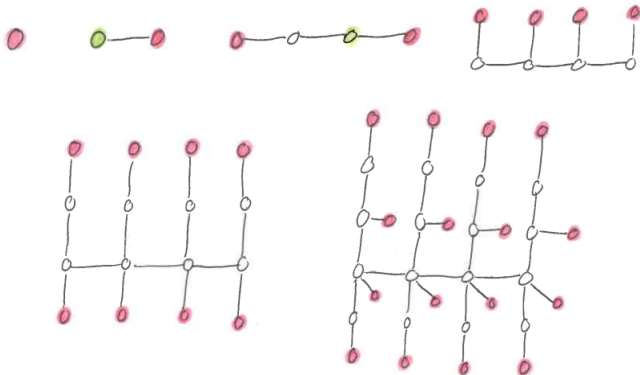
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



($\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{brown}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots$)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

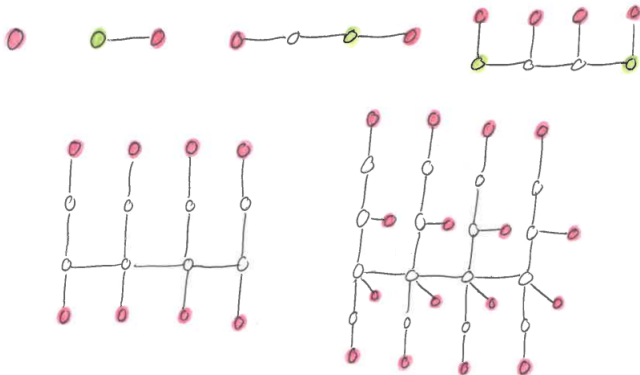
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(₁, ₂, ₃, ₄, ₅, ₆, ₇, ₈, ₉, ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

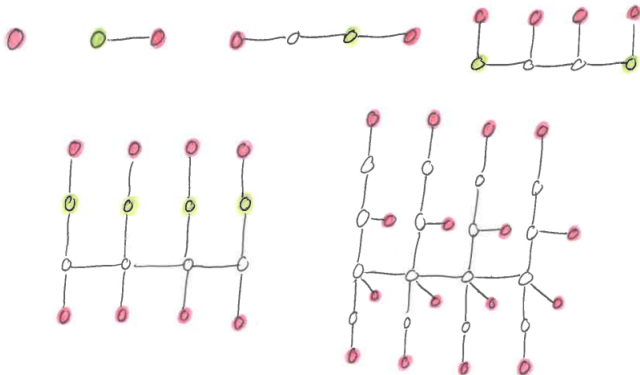
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



($\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{brown}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots$)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

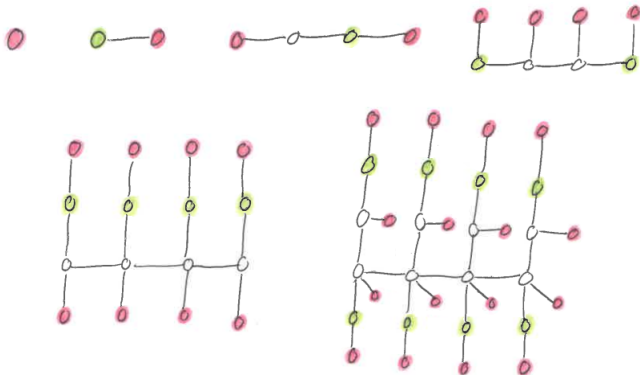
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



($\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{brown}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots$)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

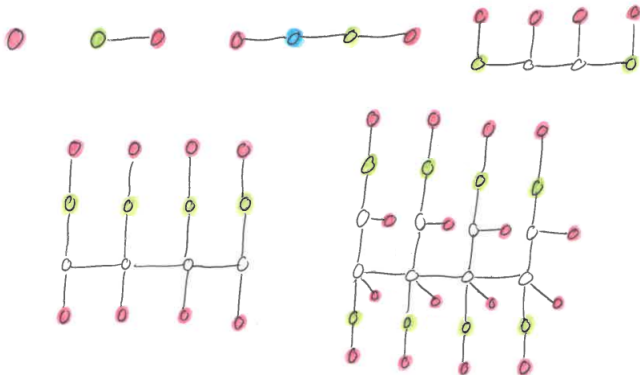
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



($\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{brown}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots$)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

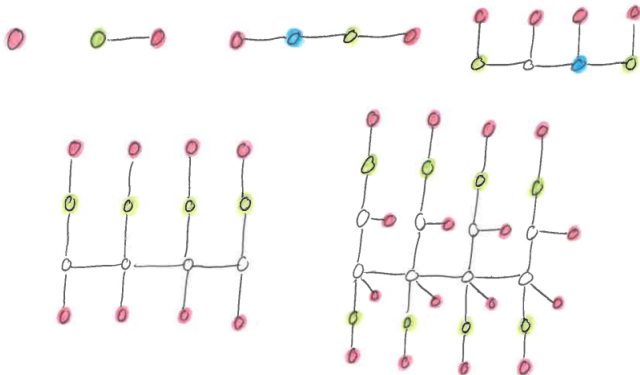
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(₁, ₂, ₃, ₄, ₅, ₆, ₇, ₈, ₉, ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

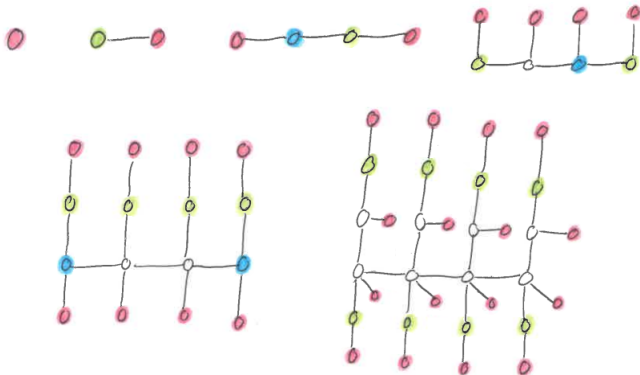
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



($\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{brown}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots$)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

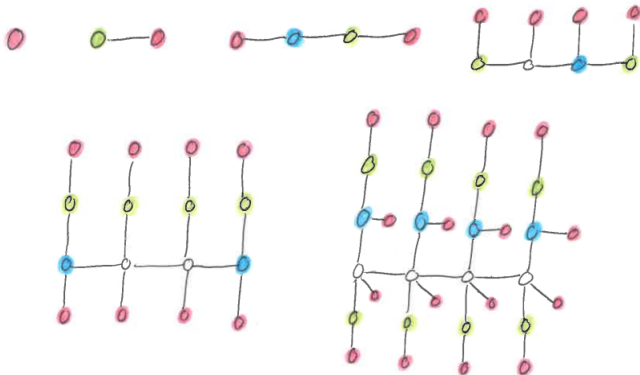
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(₁, ₂, ₃, ₄, ₅, ₆, ₇, ₈, ₉, ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

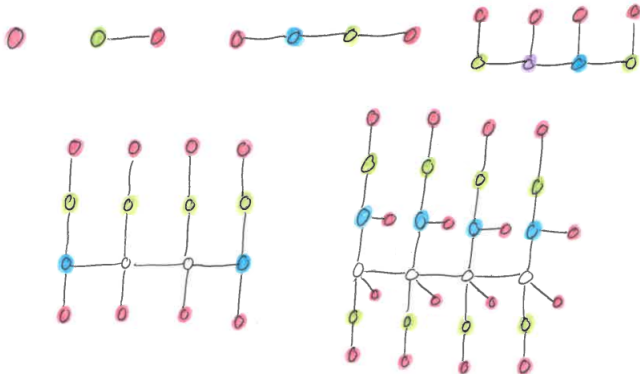
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(, , , , , , , , , ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

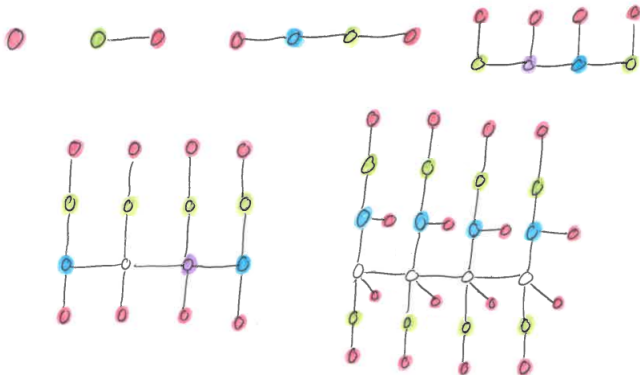
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(₁, ₂, ₃, ₄, ₅, ₆, ₇, ₈, ₉, ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

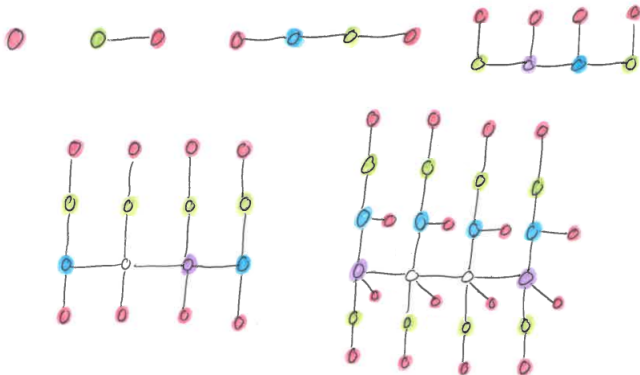
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(₁, ₂, ₃, ₄, ₅, ₆, ₇, ₈, ₉, ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

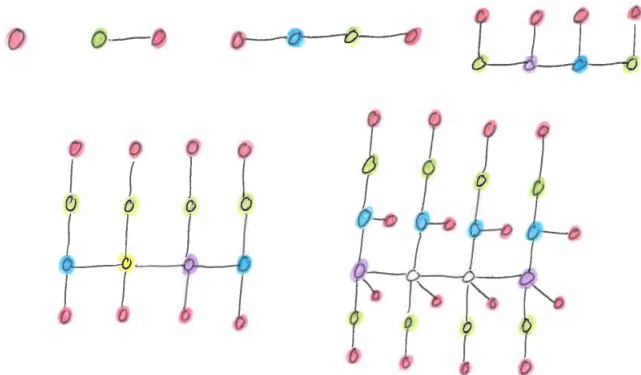
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(₁, ₂, ₃, ₄, ₅, ₆, ₇, ₈, ₉, ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

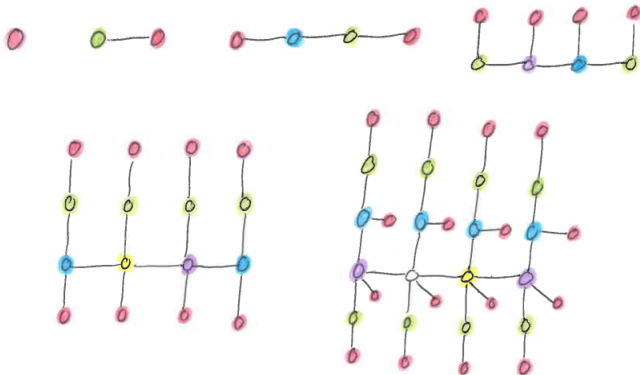
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(₁, ₂, ₃, ₄, ₅, ₆, ₇, ₈, ₉, ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

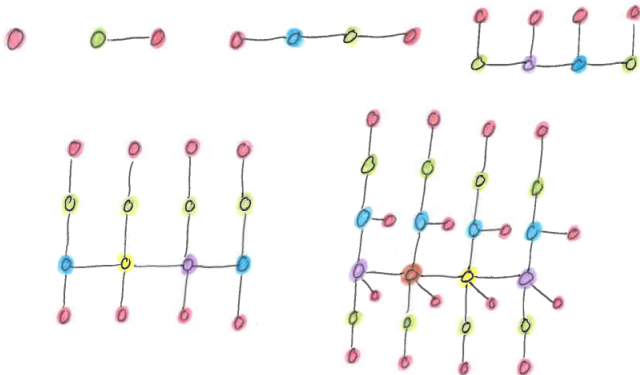
Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



(₁, ₂, ₃, ₄, ₅, ₆, ₇, ₈, ₉, ...)

Stwierdzenie o czterech barwach względem liczby chromatycznej Grundy'ego

Dla każdej liczby naturalnej k istnieje graf planarny G taki, że $\Gamma(G) = k$.



($\text{red}_1, \text{green}_2, \text{blue}_3, \text{purple}_4, \text{yellow}_5, \text{brown}_6, \text{orange}_7, \text{black}_8, \text{white}_9, \dots$)

Czy wyznaczanie $\Gamma(G)$ jest (na ogół) tak trudne jak wyznaczanie $\chi(G)$?

Dany jest graf G mający n wierzchołków i liczba k .

Określenie, czy $\Gamma(G) \geq k$ można wykonać przy pomocy algorytmu działającego w czasie $\mathcal{O}(n^{2^{k-1}})$.

Zatem określenie $\Gamma(G)$ jest “łatwiejsze parametrycznie” niż określenie $\chi(G)$.



Dziękuję
za uwagę!



$$3^3 + 4^4 + 3^3 + 7^7 + 8^8 + 3^3 + 3^3 + 8^8 = 34378339$$