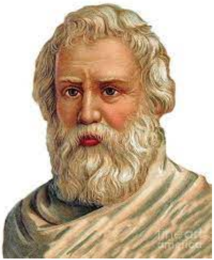
O pewnych elementarnych równaniach diofantycznych

Piotr Miska
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

p_{19}-ta Szkoła Matematyki Poglądowej
Ośrodek Kultury Matematycznej, Uniwersytet w Siedlcach
24 sierpnia 2024

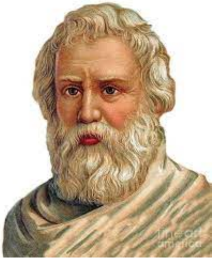
Przykłady problemów („pytań”) prowadzących do równań diofantycznych

Przykłady problemów („pytań”) prowadzących do równań diofantycznych



Archimedes z Syrakuz, ok. 287-212 p.n.e.

Przykłady problemów („pytań”) prowadzących do równań diofantycznych



Archimedes z Syrakuz, ok. 287-212 p.n.e.

Problem liczby bydła w stadzie Heliosa (problema bovinum, problema Archimedis)

Przykłady problemów („pytań”) prowadzących do równań diofantycznych

Problem liczby bydła w stadzie Heliosa

$$\begin{cases} B = \frac{5}{6}C + Z, & z = \frac{7}{12}(C + c), & B + C = k^2, \\ C = \frac{9}{20}L + Z, & c = \frac{9}{20}(L + l), & L + Z = \frac{t^2+t}{2}. \\ L = \frac{13}{42}B + Z, & l = \frac{11}{30}(B + b), & \\ & b = \frac{13}{42}(Z + z), & \end{cases}$$

Przykłady problemów („pytań”) prowadzących do równań diofantycznych

Problem liczby bydła w stadzie Heliosa

$$\begin{cases} B = \frac{5}{6}C + Z, & z = \frac{7}{12}(C + c), & B + C = k^2, \\ C = \frac{9}{20}L + Z, & c = \frac{9}{20}(L + l), & L + Z = \frac{t^2+t}{2}. \\ L = \frac{13}{42}B + Z, & l = \frac{11}{30}(B + b), & \\ & b = \frac{13}{42}(Z + z), & \end{cases}$$

Sprowadza się do równania Pella

$$x^2 - 2^4 \times 7 \times 11 \times 29 \times 353 \times 4657^2 y^2 = 1.$$

Przykłady problemów („pytań”) prowadzących do równań diofantycznych

Problem liczby bydła w stadzie Heliosa

$$\begin{cases} B = \frac{5}{6}C + Z, & z = \frac{7}{12}(C + c), & B + C = k^2, \\ C = \frac{9}{20}L + Z, & c = \frac{9}{20}(L + l), & L + Z = \frac{t^2+t}{2}. \\ L = \frac{13}{42}B + Z, & l = \frac{11}{30}(B + b), & \\ & b = \frac{13}{42}(Z + z), & \end{cases}$$

Sprowadza się do równania Pella

$$x^2 - 2^4 \times 7 \times 11 \times 29 \times 353 \times 4657^2 y^2 = 1.$$

Najmniejsze rozwiązanie (wartość $B + C + L + Z + b + c + l + z$) wynosi około $7,76 \times 10^{206544}$.

Przykłady problemów („pytań”) prowadzących do równań diofantycznych

Przykłady problemów („pytań”) prowadzących do równań diofantycznych

Diofantos z Aleksandrii, ok. 200/214-284/298 n.e.

Przykłady problemów („pytań”) prowadzących do równań diofantycznych

Diofantos z Aleksandrii, ok. 200/214-284/298 n.e.

Problem Diofantosa

Przedstawić zadaną liczbę jako sumę dwóch liczb, których iloczyn jest równy objętości sześcianu pomniejszonej o długość jego krawędzi.

Przykłady problemów („pytań”) prowadzących do równań diofantycznych

Diofantos z Aleksandrii, ok. 200/214-284/298 n.e.

Problem Diofantosa

Przedstawić zadaną liczbę jako sumę dwóch liczb, których iloczyn jest równy objętości sześcianu pomniejszonej o długość jego krawędzi.

Sprowadza się do równania

$$y(a-y) = x^3 - x$$

opisującego krzywą eliptyczną.

Pytanie numer 1

Pytanie numer 1

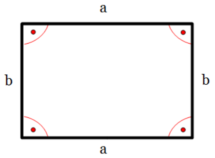
Pytanie 1

Jakie są wymiary prostokąta, którego boki mają długości całkowite i suma długości sąsiednich boków jest równa polu tego prostokąta?

Pytanie numer 1

Pytanie 1

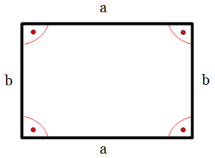
Jakie są wymiary prostokąta, którego boki mają długości całkowite i suma długości sąsiednich boków jest równa polu tego prostokąta?



Pytanie numer 1

Pytanie 1

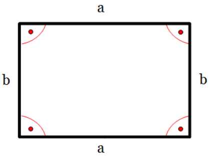
Jakie są wymiary prostokąta, którego boki mają długości całkowite i suma długości sąsiednich boków jest równa polu tego prostokąta?



$a + b = ab$

Pytanie 1

Jakie są wymiary prostokąta, którego boki mają długości całkowite i suma długości sąsiednich boków jest równa polu tego prostokąta?

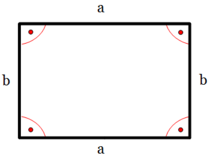


$a + b = ab$

$\Rightarrow ab - a - b = 0$

Pytanie 1

Jakie są wymiary prostokąta, którego boki mają długości całkowite i suma długości sąsiednich boków jest równa polu tego prostokąta?



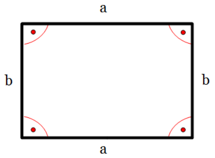
$a + b = ab$

$\Rightarrow ab - a - b = 0$

$\Rightarrow ab - a - b + 1 = 1$

Pytanie 1

Jakie są wymiary prostokąta, którego boki mają długości całkowite i suma długości sąsiednich boków jest równa polu tego prostokąta?



$a + b = ab$

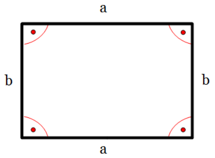
$\Rightarrow ab - a - b = 0$

$\Rightarrow ab - a - b + 1 = 1$

$\Rightarrow (a - 1)(b - 1) = 1$

Pytanie 1

Jakie są wymiary prostokąta, którego boki mają długości całkowite i suma długości sąsiednich boków jest równa polu tego prostokąta?



$a + b = ab$

$\Rightarrow ab - a - b = 0$

$\Rightarrow ab - a - b + 1 = 1$

$\Rightarrow (a-1)(b-1) = 1$

$\Rightarrow a = b = 2$

Pytanie numer 2

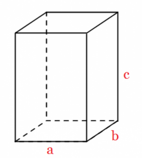
Pytanie numer 2

Pytanie 2

Jakie są wymiary prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma długości krawędzi schodzących się w jednym wierzchołku jest równa objętości tego prostopadłościanu?

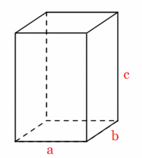
Pytanie 2

Jakie są wymiary prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma długości krawędzi schodzących się w jednym wierzchołku jest równa objętości tego prostopadłościanu?



Pytanie 2

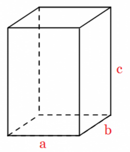
Jakie są wymiary prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma długości krawędzi schodzących się w jednym wierzchołku jest równa objętości tego prostopadłościanu?



$a + b + c = abc, a \leq b \leq c$

Pytanie 2

Jakie są wymiary prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma długości krawędzi schodzących się w jednym wierzchołku jest równa objętości tego prostopadłościanu?

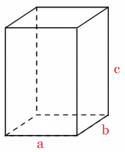


$a + b + c = abc, a \leq b \leq c$

Jeśli $a \geq 2$, to $abc \geq 2bc = bc + bc \geq 2b + 2c = b + b + c + c > b + 1 + c + a > a + b + c$.

Pytanie 2

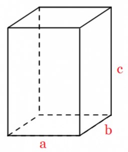
Jakie są wymiary prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma długości krawędzi schodzących się w jednym wierzchołku jest równa objętości tego prostopadłościanu?



$a + b + c = abc, a \leq b \leq c$
Jeśli $a \geq 2$, to $abc \geq 2bc = bc + bc \geq 2b + 2c = b + b + c + c >$
$b + 1 + c + a > a + b + c$.
Zatem $a = 1$ oraz $1 + b + c = bc \Rightarrow (b - 1)(c - 1) = 2$
$\Rightarrow (b, c) = (2, 3)$.

Pytanie 2

Jakie są wymiary prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma długości krawędzi schodzących się w jednym wierzchołku jest równa objętości tego prostopadłościanu?



$a+b+c=abc, a \leq b \leq c$

Jeśli $a \geq 2$, to $abc \geq 2bc = bc + bc \geq 2b + 2c = b + b + c + c > b + 1 + c + a > a + b + c$.

Zatem $a = 1$ oraz $1 + b + c = bc \Rightarrow (b-1)(c-1) = 2$

$\Rightarrow (b, c) = (2, 3)$.

Ostatecznie $(a, b, c) = (1, 2, 3)$.

Pytanie numer 3 - uogólnienie Pytań 1 i 2

Pytanie 3

Niech $n \geq 2$ będzie liczbą całkowitą. Jakie są wymiary n-wymiarowego prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma długości krawędzi schodzących się w jednym wierzchołku jest równa n-wymiarowej objętości tego prostopadłościanu?

Pytanie 3

Niech $n \geq 2$ będzie liczbą całkowitą. Jakie są wymiary n-wymiarowego prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma długości krawędzi schodzących się w jednym wierzchołku jest równa n-wymiarowej objętości tego prostopadłościanu?

Sprowadza się do rozwiązania równania

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n \qquad (*)$$

w liczbach całkowitych dodatnich $x_1, x_2, \ldots x_n$ (BSO $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$).

Pytania numer 4 i 5

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n \qquad (*)$$

Pytanie 4

Czy dla każdego $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma rozwiązanie?

Pytania numer 4 i 5

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n \qquad (*)$$

Pytanie 4

Czy dla każdego $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma rozwiązanie?

TAK: $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-2 \text{ razy}}, 2, n)$ jest rozwiązaniem.

Pytania numer 4 i 5

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n \qquad (*)$$

Pytanie 4

Czy dla każdego $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma rozwiązanie?

TAK: $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-2 \text{ razy}}, 2, n)$ jest rozwiązaniem.

Nazwijmy je rozwiązaniem podstawowym. Równanie $(*)$ ma tylko rozwiązanie podstawowe dla $n \in \{2, 3\}$.

Pytania numer 4 i 5

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n \qquad (*)$$

Pytanie 4

Czy dla każdego $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma rozwiązanie?

TAK: $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-2 \text{ razy}}, 2, n)$ jest rozwiązaniem.

Nazwijmy je rozwiązaniem podstawowym. Równanie $(*)$ ma tylko rozwiązanie podstawowe dla $n \in \{2, 3\}$.

Pytanie 5

Dla jakiego $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

Pytanie numer 5 - ciąg dalszy

Pytanie 5

Dla jakich $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

Pytanie 5

Dla jakich $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

TO JEST PYTANIE OTWARTE!

Pytanie 5

Dla jakich $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

TO JEST PYTANIE OTWARTE!

Fakt (Misiurewicz, 1966)

$(*)$ ma tylko jedno rozwiązanie dla $n \in \{2, 3, 4, 6, 24, 114, 174, 444\}$.

Fakt (Weingartner, 2012)

Jeśli $444 < n < 10^{11}$, to $(*)$ ma więcej niż jedno rozwiązanie.

Pytanie numer 5 - co można szybko udowodnić?

Pytanie 5

Dla jakich $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

Pytanie numer 5 - co można szybko udowodnić?

Pytanie 5

Dla jakich $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

Jeśli $n - 1 = d_1 d_2$, gdzie $1 < d_1 \leq d_2 < n - 1$, to
$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-2 \text{ razy}}, d_1 + 1, d_2 + 1)$ jest niepodstawowym rozwiązaniem $(*)$.

Pytanie numer 5 - co można szybko udowodnić?

Pytanie 5

Dla jakich $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

Jeśli $n-1 = d_1 d_2$, gdzie $1 < d_1 \leq d_2 < n-1$, to $(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2 \text{ razy}}, d_1+1, d_2+1)$ jest niepodstawowym rozwiązaniem $(*)$.

Jeśli $2n-1 = d_1 d_2$, gdzie $1 < d_1 \leq d_2 < 2n-1$, to

$$\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-3 \text{ razy}}, 2, \frac{d_1+1}{2}, \frac{d_2+1}{2}\right) \text{ jest niepodstawowym rozwiązaniem } (*).$$

Pytanie 5

Dla jakich $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

Jeśli $n-1 = d_1 d_2$, gdzie $1 < d_1 \leq d_2 < n-1$, to $(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2 \text{ razy}}, d_1+1, d_2+1)$ jest niepodstawowym rozwiązaniem $(*)$.

Jeśli $2n-1 = d_1 d_2$, gdzie $1 < d_1 \leq d_2 < 2n-1$, to

$$\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-3 \text{ razy}}, 2, \frac{d_1+1}{2}, \frac{d_2+1}{2}\right) \text{ jest niepodstawowym rozwiązaniem } (*).$$

Jeśli $n = 15k-3$, to $(\underbrace{1,\ldots,1}_{15k-8 \text{ razy}}, 2, 2, 2, 2, k)$ jest niepodstawowym rozwiązaniem $(*)$.

Pytanie numer 5 - co można szybko udowodnić?

Pytanie 5

Dla jakich $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

Jeśli $n-1 = d_1 d_2$, gdzie $1 < d_1 \leq d_2 < n-1$, to $(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2 \text{ razy}}, d_1+1, d_2+1)$ jest niepodstawowym rozwiązaniem $(*)$.

Jeśli $2n-1 = d_1 d_2$, gdzie $1 < d_1 \leq d_2 < 2n-1$, to

$$\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-3 \text{ razy}}, 2, \frac{d_1+1}{2}, \frac{d_2+1}{2}\right)$$ jest niepodstawowym rozwiązaniem $(*)$.

Jeśli $n = 15k-3$, to $(\underbrace{1,\ldots,1}_{15k-8 \text{ razy}}, 2, 2, 2, 2, k)$ jest niepodstawowym rozwiązaniem $(*)$.

Wniosek

Jeśli $n > 6$ i $(*)$ ma tylko jedno rozwiązanie, to $n \equiv 0 \pmod{30}$ lub $n \equiv 24 \pmod{30}$.

Pytanie numer 6

Pytanie 6

Czy dla każdego $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma skończenie wiele rozwiązań? Jeśli tak, to jakie jest ograniczenie górne na x_n lub $v = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n$?

Pytanie numer 6

Pytanie 6

Czy dla każdego $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma skończenie wiele rozwiązań? Jeśli tak, to jakie jest ograniczenie górne na x_n lub $v = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n$?

Lemat 1

Niech $m \geq 2$ i $a_1, a_2, \ldots, a_m \geq 1$. Wtedy $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_m + 1) \geq 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)$, gdzie równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $m = 2$ i jedna z liczb a_1, a_2 wynosi 1.

Pytanie 6

Czy dla każdego $n \geq 2$ równanie $(*)$ ma skończenie wiele rozwiązań? Jeśli tak, to jakie jest ograniczenie górne na x_n lub $v = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n$?

Lemat 1

Niech $m \geq 2$ i $a_1, a_2, \ldots, a_m \geq 1$. Wtedy $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_m + 1) \geq 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)$, gdzie równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $m = 2$ i jedna z liczb a_1, a_2 wynosi 1.

Lemat 2

Jeśli $(x_1, \ldots, x_n)$ jest rozwiązaniem równania $(*)$, to $x_{n-1} \geq 2$.

Pytanie numer 6 - odpowiedź

Twierdzenie 1

Jeśli $(x_1, \dots, x_n)$ jest rozwiązaniem równania $(*)$, to $v = x_1 x_2 \dots x_n \leq 2n$, gdzie równość zachodzi tylko dla rozwiązania podstawowego.

Pytanie numer 6 - odpowiedź

Twierdzenie 1

Jeśli $(x_1, \ldots, x_n)$ jest rozwiązaniem równania $(*)$, to $v = x_1 x_2 \ldots x_n \leq 2n$, gdzie równość zachodzi tylko dla rozwiązania podstawowego.

Dowód.

Niech $n = k + m$, gdzie $x_1 = \ldots = x_k = 1$, $x_{k+1} \geq 2$.

Pytanie numer 6 - odpowiedź

Twierdzenie 1

Jeśli $(x_1, \ldots, x_n)$ jest rozwiązaniem równania $(*)$, to $v = x_1 x_2 \ldots x_n \leq 2n$, gdzie równość zachodzi tylko dla rozwiązania podstawowego.

Dowód.

Niech $n = k + m$, gdzie $x_1 = \ldots = x_k = 1$, $x_{k+1} \geq 2$.Wtedy $v = x_1 x_2 \ldots x_n = x_{k+1} x_{k+2} \ldots x_n =$
$[(x_{k+1} - 1) + 1][(x_{k+2} - 1) + 1] \ldots [(x_n - 1) + 1] \overset{Lemat\,1}{\geq}$
$2(x_{k+1} - 1 + x_{k+2} - 1 + \ldots + x_n - 1) = 2(x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n - m) =$
$2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - k - m) = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n) = 2(v - n)$.
Stąd $v \geq 2v - 2n$, czyli $v \leq 2n$.

Pytanie numer 6 - odpowiedź

Twierdzenie 1

Jeśli $(x_1, \ldots, x_n)$ jest rozwiązaniem równania $(*)$, to $v = x_1 x_2 \ldots x_n \leq 2n$, gdzie równość zachodzi tylko dla rozwiązania podstawowego.

Dowód.

Niech $n = k + m$, gdzie $x_1 = \ldots = x_k = 1$, $x_{k+1} \geq 2$.Wtedy $v = x_1 x_2 \ldots x_n = x_{k+1} x_{k+2} \ldots x_n =$
$[(x_{k+1} - 1) + 1][(x_{k+2} - 1) + 1] \ldots [(x_n - 1) + 1] \overset{Lemat\, 1}{\geq}$
$2(x_{k+1} - 1 + x_{k+2} - 1 + \ldots + x_n - 1) = 2(x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n - m) =$
$2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - k - m) = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n) = 2(v - n)$.
Stąd $v \geq 2v - 2n$, czyli $v \leq 2n$.
Równość zachodzi dokładnie, gdy $m = 2$ i $x_{n-1} - 1 = 1$, czyli $x_{n-1} = 2$ i $x_n = n$. □

Twierdzenie 2

Jeśli $(x_1, \ldots, x_n)$ jest rozwiązaniem równania $(*)$, to $x_n \leq n$, gdzie równość zachodzi tylko dla rozwiązania podstawowego.

Pytanie numer 6 - druga odpowiedź

Twierdzenie 2

Jeśli $(x_1, \ldots, x_n)$ jest rozwiązaniem równania $(*)$, to $x_n \leq n$, gdzie równość zachodzi tylko dla rozwiązania podstawowego.

Dowód.

Niech $n = k + m$, gdzie $x_1 = \ldots = x_k = 1$, $x_{k+1} \geq 2$. Na mocy Lematu 2 mamy $m \geq 2$. Stąd i z Twierdzenia 1 mamy

$$2x_n \leq x_{k+1}x_n \leq x_1 \ldots x_n = v \leq 2n.$$

Z tego wynika, że $x_n \leq n$, gdzie równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy $m = 2$ i $x_{n-1} = 2$. □

Pytanie numer 7

Pytanie 7

Jakie liczby całkowite dodatnie dają się przedstawić jako $v = x_1 + \ldots + x_n = x_1 \ldots x_n$ dla pewnego $n \geq 2$ i pewnych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$?

Pytanie 7

Jakie liczby całkowite dodatnie dają się przedstawić jako $v = x_1 + \ldots + x_n = x_1 \ldots x_n$ dla pewnego $n \geq 2$ i pewnych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$?

SĄ TO LICZBY ZŁOŻONE I TYLKO ONE.

Pytanie numer 8 - wariacja na temat Pytania 3

Pytanie 3

Niech $n \geq 2$ będzie liczbą całkowitą. Jakie są wymiary n-wymiarowego prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma długości krawędzi schodzących się w jednym wierzchołku jest równa n-wymiarowej objętości tego prostopadłościanu?

Pytanie numer 8 - wariacja na temat Pytania 3

Pytanie 8

Niech $n \geq 3$ będzie liczbą całkowitą. Jakie są wymiary n-wymiarowego prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma pól (dwuwymiarowych) ścian schodzących się w jednym wierzchołku jest równa n-wymiarowej objętości tego prostopadłościanu?

Pytanie 8

Niech $n \geq 3$ będzie liczbą całkowitą. Jakie są wymiary n-wymiarowego prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma pól (dwuwymiarowych) ścian schodzących się w jednym wierzchołku jest równa n-wymiarowej objętości tego prostopadłościanu?

Sprowadza się do rozwiązania równania

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j = x_1 x_2 \dots x_n \qquad (**)$$

w liczbach całkowitych dodatnich $x_1, x_2, \dots x_n$ (BSO $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$).

Pytanie numer 9

Pytanie 9

Czy dla każdego $n \geq 3$ równanie $(**)$ ma rozwiązanie?

Pytanie 9

Czy dla każdego $n \geq 3$ równanie $(**)$ ma rozwiązanie?

TAK: $\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-3 \text{ razy}}, 2, n, \frac{1}{2}n(3n-5)\right)$ jest rozwiązaniem.

Pytanie 9

Czy dla każdego $n \geq 3$ równanie $(**)$ ma rozwiązanie?

TAK: $\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-3 \textit{ razy}}, 2, n, \frac{1}{2}n(3n-5)\right)$ jest rozwiązaniem.

Nazwijmy je rozwiązaniem podstawowym.

Pytanie 9

Czy dla każdego $n \geq 3$ równanie $(**)$ ma rozwiązanie?

TAK: $\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-3 \text{ razy}}, 2, n, \frac{1}{2}n(3n-5)\right)$ jest rozwiązaniem.

Nazwijmy je rozwiązaniem podstawowym.

Pytanie 10

Dla jakiego $n \geq 2$ równanie $(**)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

Pytanie numer 10

Pytanie 10

Dla jakiego $n \geq 3$ równanie $(**)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

Pytanie 10

Dla jakiego $n \geq 3$ równanie $(**)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

DLA ŻADNEGO n.

Pytanie numer 10

Pytanie 10

Dla jakiego $n \geq 3$ równanie $(**)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

DLA ŻADNEGO n.

Dla $n = 3$ mamy rozwiązania niepodstawowe $(2,4,4)$ i $(3,3,3)$.

Pytanie numer 10

Pytanie 10

Dla jakiego $n \geq 3$ równanie $(**)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

DLA ŻADNEGO n.

Dla $n = 3$ mamy rozwiązania niepodstawowe $(2, 4, 4)$ i $(3, 3, 3)$.

Dla $n = 4$ mamy rozwiązanie niepodstawowe $(2, 2, 2, 6)$.

Pytanie numer 10

Pytanie 10

Dla jakiego $n \geq 3$ równanie $(**)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

DLA ŻADNEGO n.

Dla $n = 3$ mamy rozwiązania niepodstawowe $(2, 4, 4)$ i $(3, 3, 3)$.

Dla $n = 4$ mamy rozwiązanie niepodstawowe $(2, 2, 2, 6)$.

Niech $n \geq 5$. Poszukajmy rozwiązań postaci $\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-3 \text{ razy}}, 2, y, z\right)$.

Pytanie numer 10

Pytanie 10

Dla jakiego $n \geq 3$ równanie $(**)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

DLA ŻADNEGO n.

Dla $n = 3$ mamy rozwiązania niepodstawowe $(2, 4, 4)$ i $(3, 3, 3)$.

Dla $n = 4$ mamy rozwiązanie niepodstawowe $(2, 2, 2, 6)$.

Niech $n \geq 5$. Poszukajmy rozwiązań postaci $\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-3 \text{ razy}}, 2, y, z\right)$.

$(**)$ przyjmuje postać

$\frac{1}{2}(n-3)(n-4) + (n-3)(2+y+z) + 2y + 2z + yz = 2yz$.

Pytanie 10

Dla jakiego $n \geq 3$ równanie $(**)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

DLA ŻADNEGO n.
Dla $n = 3$ mamy rozwiązania niepodstawowe $(2, 4, 4)$ i $(3, 3, 3)$.
Dla $n = 4$ mamy rozwiązanie niepodstawowe $(2, 2, 2, 6)$.

Niech $n \geq 5$. Poszukajmy rozwiązań postaci $\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-3 \text{ razy}}, 2, y, z\right)$.

$(**)$ przyjmuje postać
$\frac{1}{2}(n-3)(n-4) + (n-3)(2+y+z) + 2y + 2z + yz = 2yz$.
Po podstawowych przekształceniach:
$[y - (n-1)][z - (n-1)] = \frac{1}{2}(n-2)(3n-5)$.

Pytanie 10

Dla jakiego $n \geq 3$ równanie $(**)$ ma tylko jedno rozwiązanie?

DLA ŻADNEGO n.
Dla $n = 3$ mamy rozwiązania niepodstawowe $(2, 4, 4)$ i $(3, 3, 3)$.
Dla $n = 4$ mamy rozwiązanie niepodstawowe $(2, 2, 2, 6)$.

Niech $n \geq 5$. Poszukajmy rozwiązań postaci $\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-3 \text{ razy}}, 2, y, z\right)$.

$(**)$ przyjmuje postać
$\frac{1}{2}(n-3)(n-4) + (n-3)(2+y+z) + 2y + 2z + yz = 2yz$.
Po podstawowych przekształceniach:
$[y-(n-1)][z-(n-1)] = \frac{1}{2}(n-2)(3n-5)$.
Stąd $y = d_1 + n - 1$, $z = d_2 + n - 1$, gdzie
$d_1 d_2 = \frac{1}{2}(n-2)(3n-5)$ i $d_1 \leq d_2$. Parę (d_1, d_2) możemy wybrać na co najmniej 2 sposoby, bo $\frac{1}{2}(n-2)(3n-5)$ jest liczbą złożoną.

Pytanie numer 11

Pytanie numer 11

Pytanie 11

Czy dla każdego $n \geq 2$ równanie $(**)$ ma skończenie wiele rozwiązań? Jeśli tak, to jakie jest ograniczenie górne na x_n lub $v = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = x_1 x_2 \dots x_n$?

Pytanie 11

Czy dla każdego $n \geq 2$ równanie $(**)$ ma skończenie wiele rozwiązań? Jeśli tak, to jakie jest ograniczenie górne na x_n lub $v = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = x_1 x_2 \dots x_n$?

Twierdzenie 3 (M., Ulas, 2024)

Jeśli $(x_1, \dots, x_n)$ jest rozwiązaniem równania $(**)$, to $x_n \leq \frac{1}{2}n(3n-5)$ i $v = x_1 x_2 \dots x_n \leq n^2(3n-5)$, gdzie równości zachodzą tylko dla rozwiązania podstawowego.

Pytanie numer 12 - uogólnienie Pytań 3 i 8

Pytanie 3

Niech $n \geq 2$ będzie liczbą całkowitą. Jakie są wymiary n-wymiarowego prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma długości krawędzi schodzących się w jednym wierzchołku jest równa n-wymiarowej objętości tego prostopadłościanu?

Pytanie 8

Niech $n \geq 3$ będzie liczbą całkowitą. Jakie są wymiary n-wymiarowego prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma pól (dwuwymiarowych) ścian schodzących się w jednym wierzchołku jest równa n-wymiarowej objętości tego prostopadłościanu?

Pytanie numer 12 - uogólnienie Pytań 3 i 8

Pytanie 12

Niech $n \geq l$ będą liczbami całkowitymi. Jakie są wymiary n-wymiarowego prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma l-wymiarowych objętości l-wymiarowych ścian schodzących się w jednym wierzchołku jest równa n-wymiarowej objętości tego prostopadłościanu?

Pytanie numer 12 - uogólnienie Pytań 3 i 8

Pytanie 12

Niech $n \geq l$ będą liczbami całkowitymi. Jakie są wymiary n-wymiarowego prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma l-wymiarowych objętości l-wymiarowych ścian schodzących się w jednym wierzchołku jest równa n-wymiarowej objętości tego prostopadłościanu?

Sprowadza się do rozwiązania równania

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} x_{i_1} \ldots x_{i_l} = x_1 x_2 \ldots x_n$$

w liczbach całkowitych dodatnich $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Pytanie 12

Niech $n \geq l$ będą liczbami całkowitymi. Jakie są wymiary n-wymiarowego prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości całkowite i suma l-wymiarowych objętości l-wymiarowych ścian schodzących się w jednym wierzchołku jest równa n-wymiarowej objętości tego prostopadłościanu?

Sprowadza się do rozwiązania równania

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} x_{i_1} \ldots x_{i_l} = x_1 x_2 \ldots x_n$$

w liczbach całkowitych dodatnich $x_1, x_2, \ldots x_n$.
TO JEST ZADANIE DLA PAŃSTWA!

Bibliografia

- M. W. Ecker, *When Does a Sum of Positive Integers Equal Their Product?*, Math. Mag. 75(1) (2002), 41–47.
- T. L. Heath, L. Euler, *Diophantus of Alexandria; a study in the history of Greek algebra*, Cambridge: University Press (1910).
- M. Misiurewicz, *Ungelöste probleme*, Elem. Math. 21 (1966) 90.
- P. Miska, M. Ulas, *On the Diophantine equation* $\sigma_2(\bar{X}_n) = \sigma_n(\bar{X}_n)$, Int. J. Number Theory 20(5) (2024) 1287–1306.
- I. Vardi, *Archimedes' Cattle Problem*, Amer. Math. Monthly, 105(4) (1998), 305–319.
- A. Weingartner, *On the Diophantine equation* $\prod x_i = \sum x_i$, Integers 12 (2012), Paper No. A57, 8 pp.

Dziękuję! :)