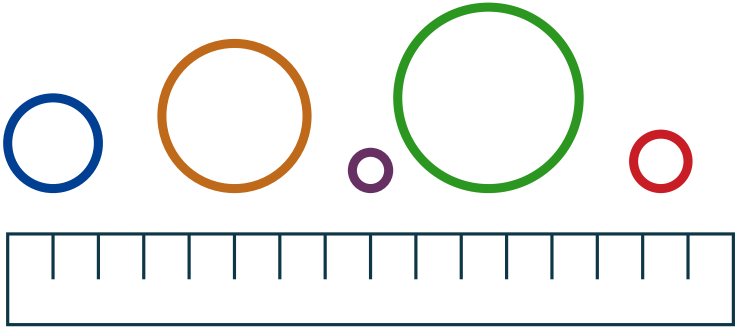


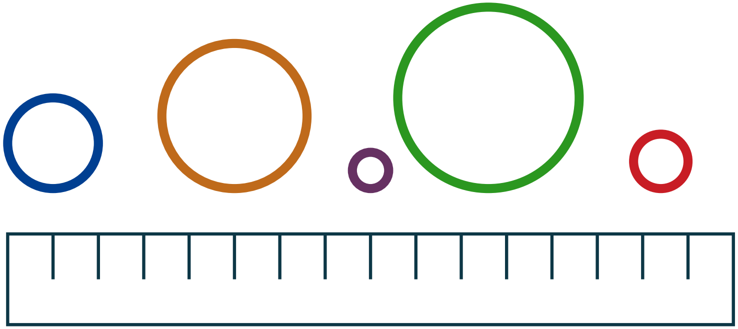
Geometria przestrzeni kół

Na początku było pytanie...

Jak mierzyć odległość
między dwoma kołami?

67. Szkoła Matematyki
Poglądowej
23 sierpnia 2024

Michał Miśkiewicz



Geometria przestrzeni kół

Na początku było pytanie...

~~Jak mierzyć odległość między dwoma kołami?~~

Do którego z czterech domów Hogwartu pasuję?

67. Szkoła Matematyki Poglądowej

23 sierpnia 2024

Michał Miśkiewicz

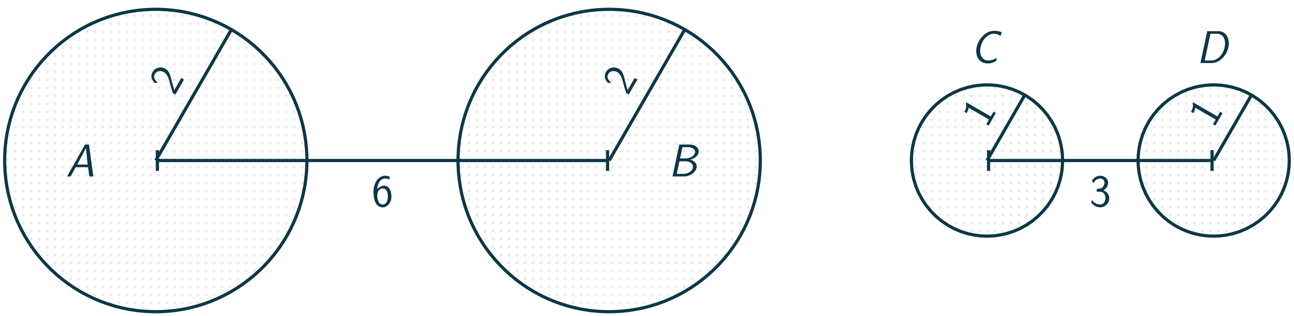
„Siedlce nocą”, 22 sierpnia 2024 r.

fot. Łukasz Rajkowski

QUIZ: Pytanie 1

Jak się ma odległość między A i B do odległości między C i D?

- $d(A, B) = d(C, D)$
- $d(A, B) = 2 \cdot d(C, D)$
- inna odpowiedź

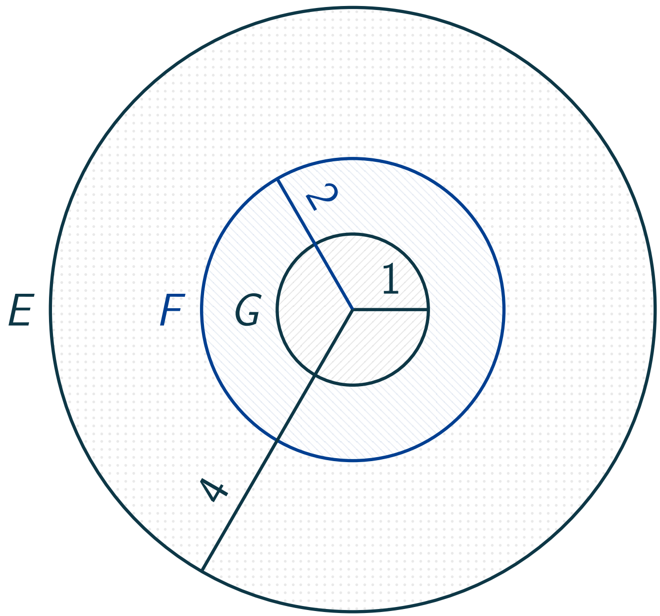


Przez $d(P, Q)$ oznaczamy odległość między kołami P i Q

QUIZ: Pytanie 2

Jak się ma odległość między E i F do odległości między F i G?

- $d(E, F) = d(F, G)$
- $d(E, F) = 2 \cdot d(F, G)$
- obie powyższe odpowiedzi, gdyż $d(E, F) = 0 = d(F, G)$
- inna odpowiedź



1. inna odpowiedź
2. inna odpowiedź

HUFFLEPUFF!

Trudno powiedzieć,

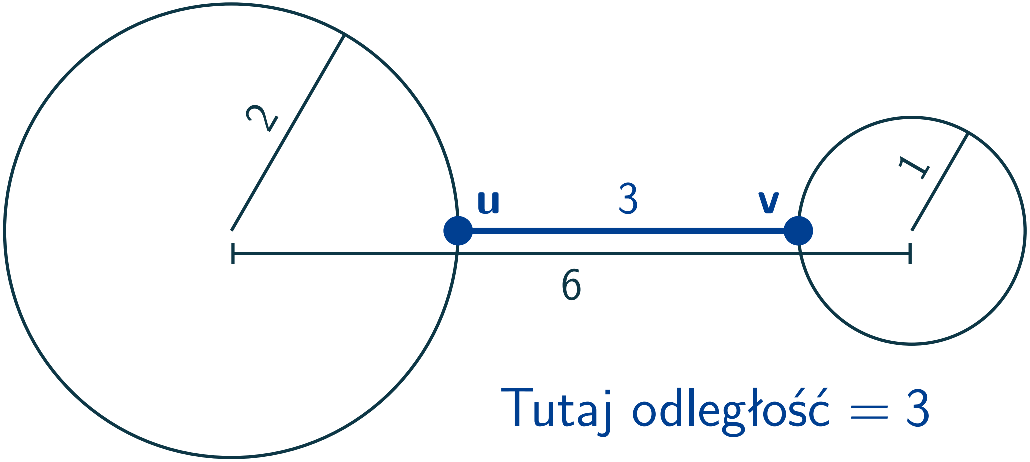
jak mierzysz odległość,

ale to też OK

1. $d(A, B) = 2 \cdot d(C, D)$
2. $d(E, F) = 0 = d(F, G)$

GRYFFINDOR!

Czy to jest Twój sposób?



Super! Tylko uważaj, bo $d(A, B) = 0$ nie oznacza $A = B$

1. $d(A, B) = 2 \cdot d(C, D)$
2. $d(E, F) = 2 \cdot d(F, G)$

RAVENCLAW!

Widocznie dwukrotne skalowanie

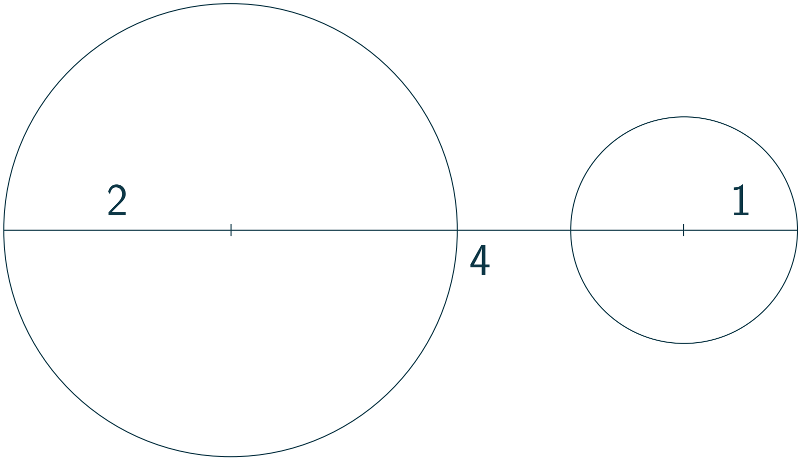
zwiększa odległość dwukrotnie

Ale jak taką odległość zdefiniować?

Odległość Hausdorffa:

O ile trzeba powiększyć jedno koło,

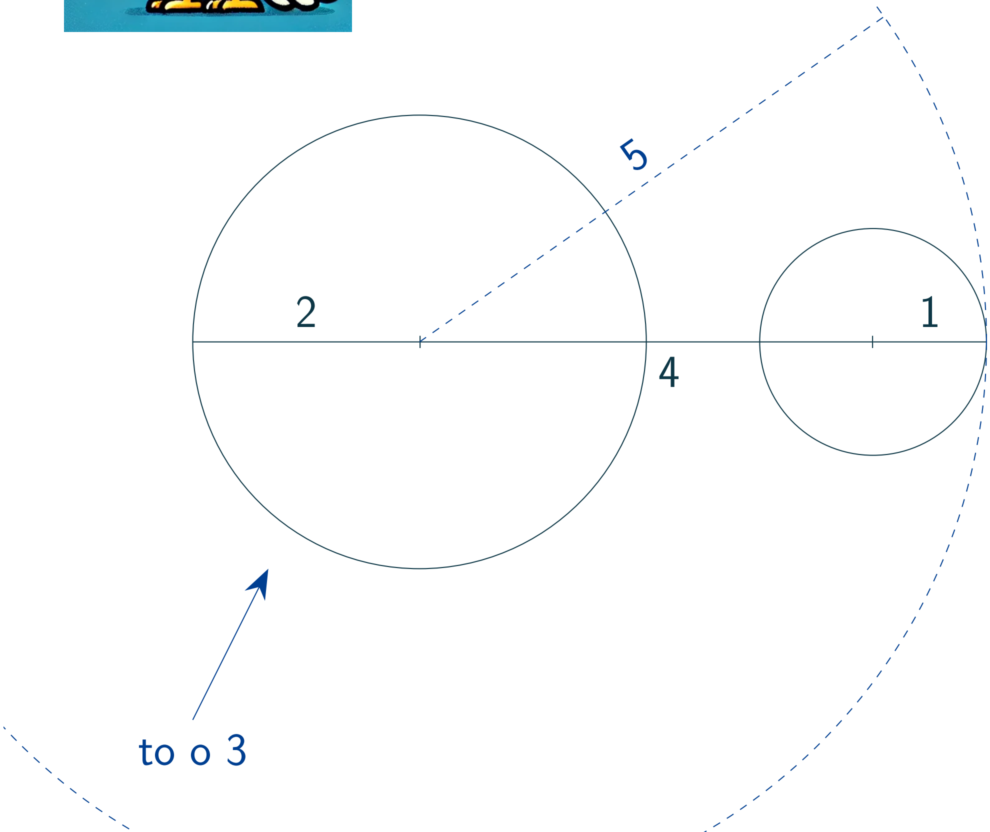
żeby pochłonęło drugie?



Odległość Hausdorffa:

O ile trzeba powiększyć jedno koło,

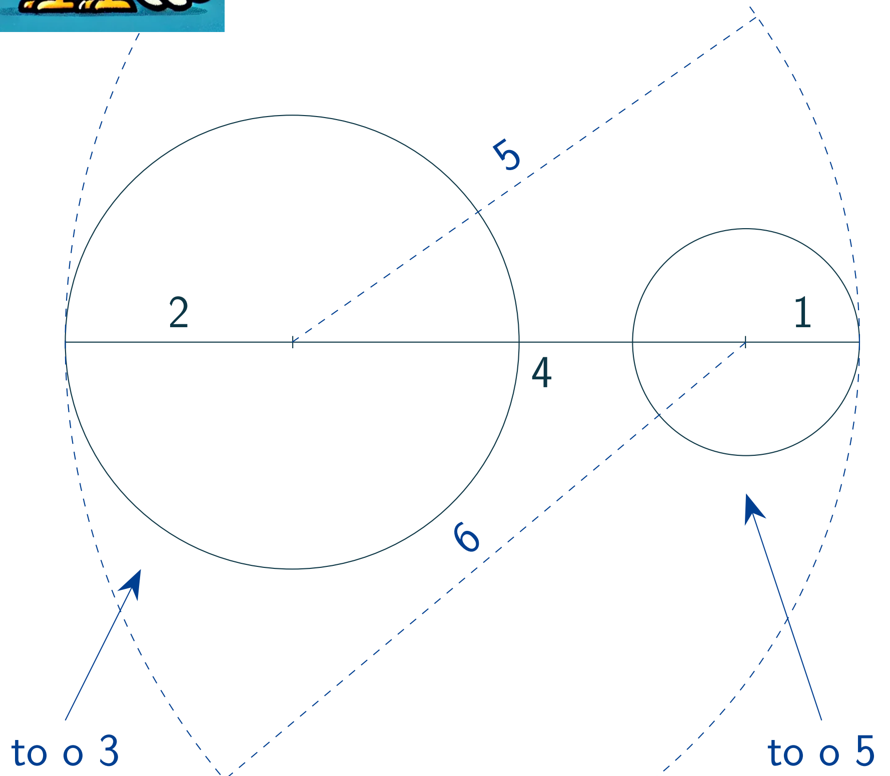
żeby pochłonęło drugie?



Odległość Hausdorffa:

O ile trzeba powiększyć jedno koło,

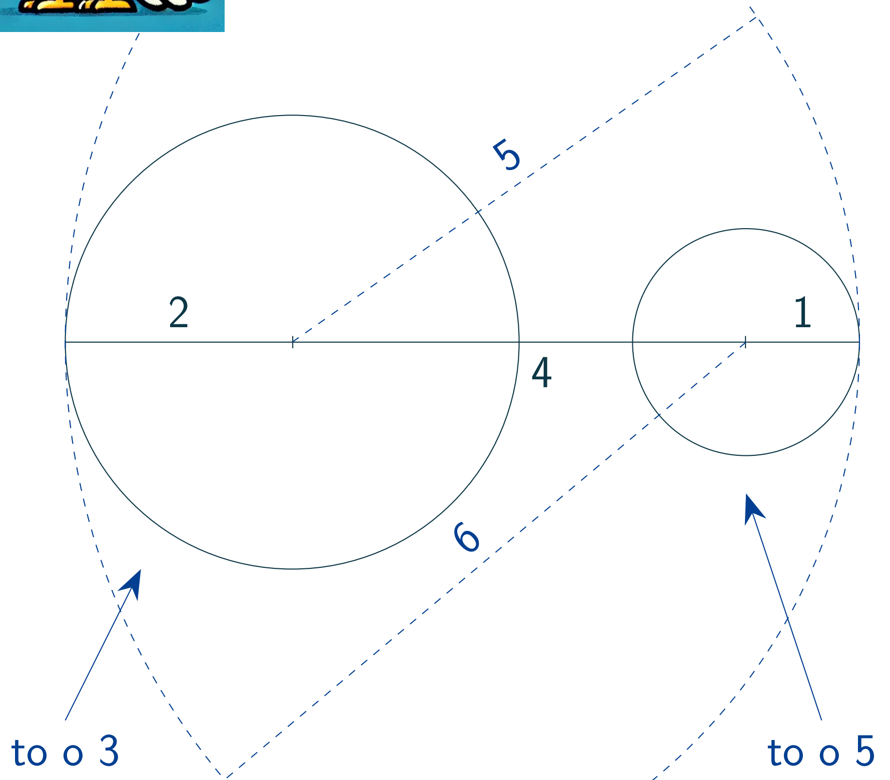
żeby pochłonęło drugie?



Odległość Hausdorffa:

O ile trzeba powiększyć jedno koło,

żeby pochłonęło drugie?

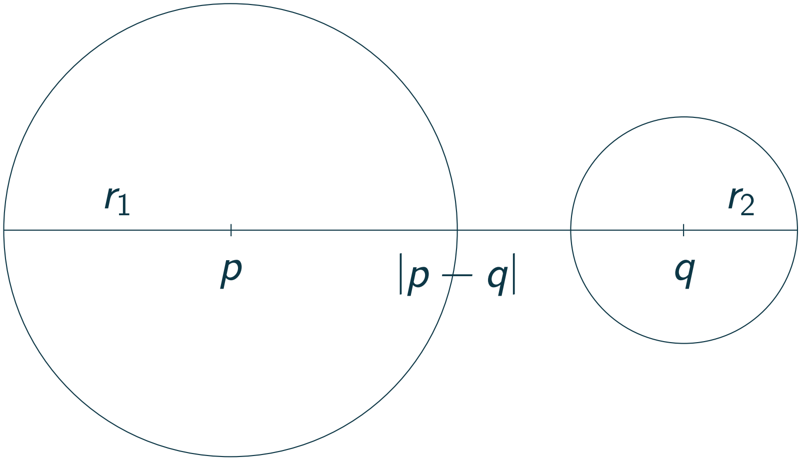


Tutaj odległość $= 5$

Odległość Hausdorffa:

O ile trzeba powiększyć jedno koło,

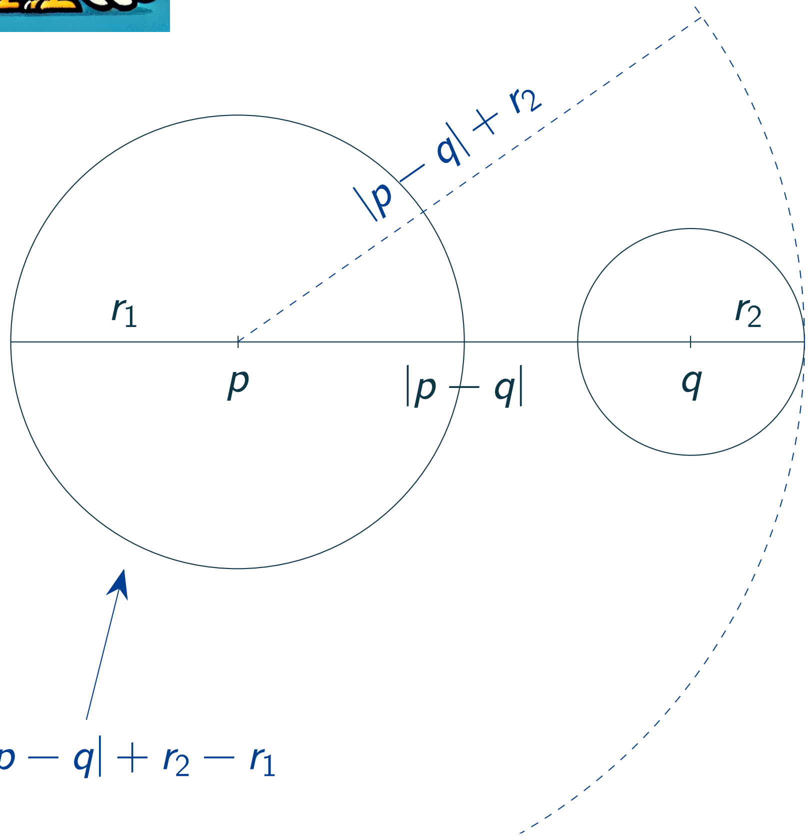
żeby pochłonęło drugie?



Odległość Hausdorffa:

O ile trzeba powiększyć jedno koło,

żeby pochłonęło drugie?

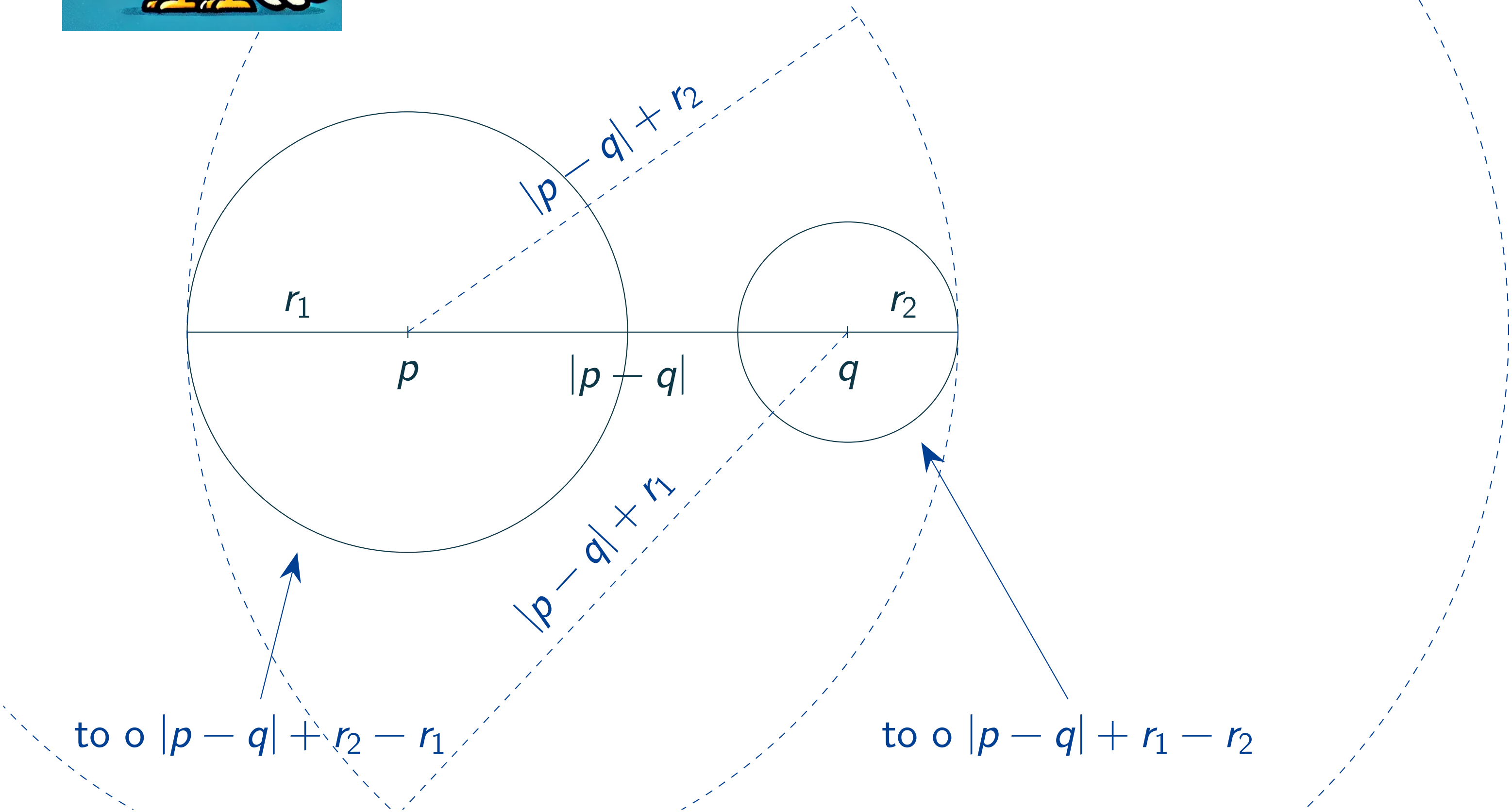


to o $|p-q|+r_2-r_1$

Odległość Hausdorffa:

O ile trzeba powiększyć jedno koło,

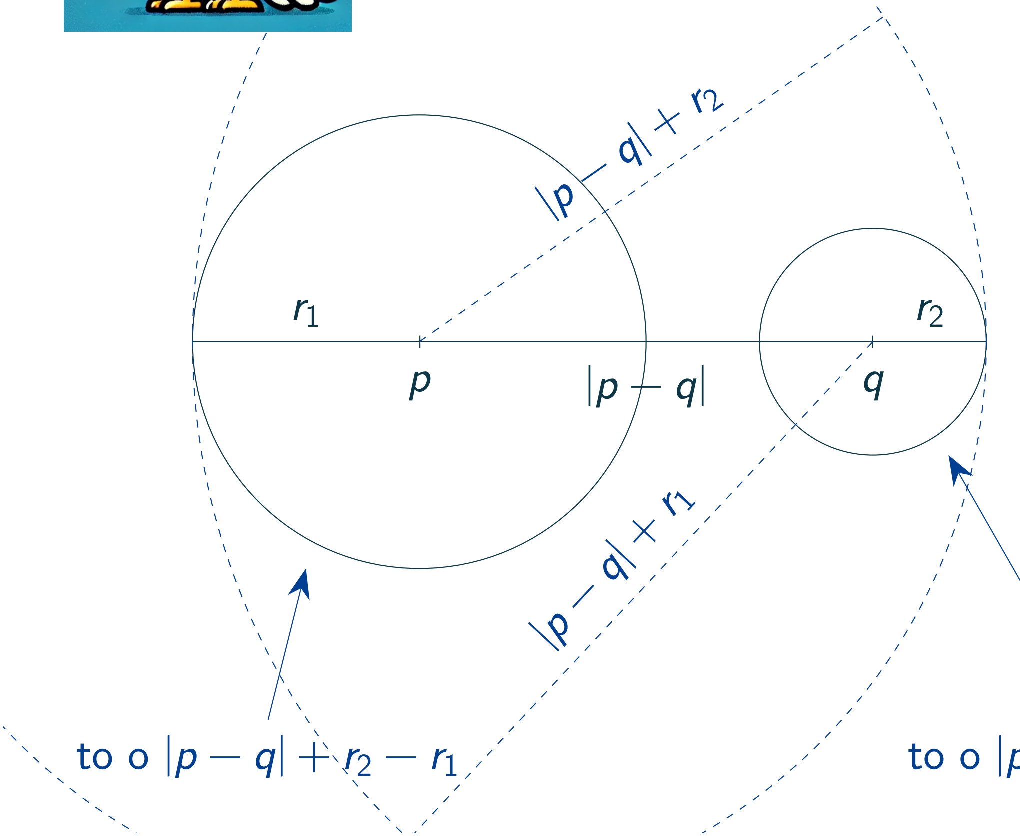
żeby pochłonęło drugie?



Odległość Hausdorffa:

O ile trzeba powiększyć jedno koło,

żeby pochłonęło drugie?



Ogólny wzór

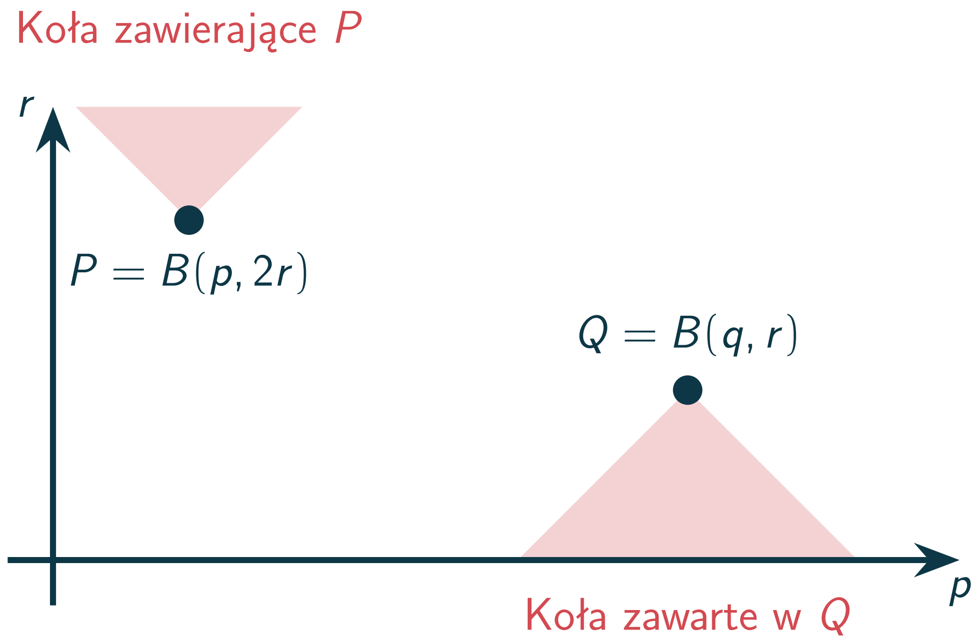
na odległość

kół $B(p, r_1)$ i $B(q, r_2)$:

$|p-q|+|r_1-r_2|$

Przestrzeń wszystkich kół na diagramie

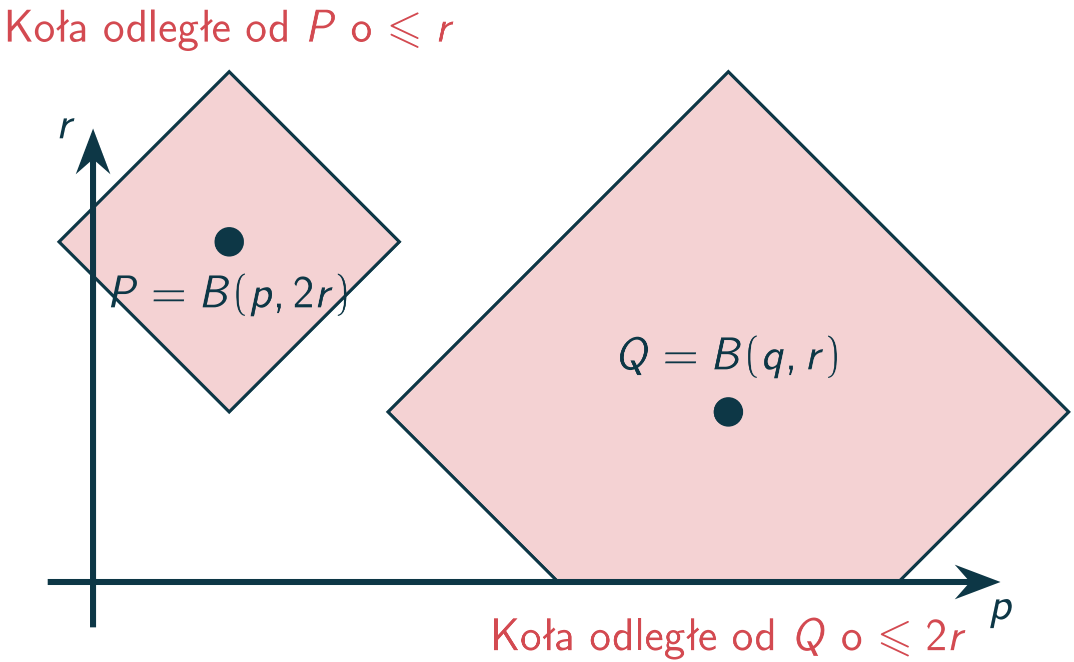
Pojęcie odległości pozwala myśleć o kołach jako o punktach!



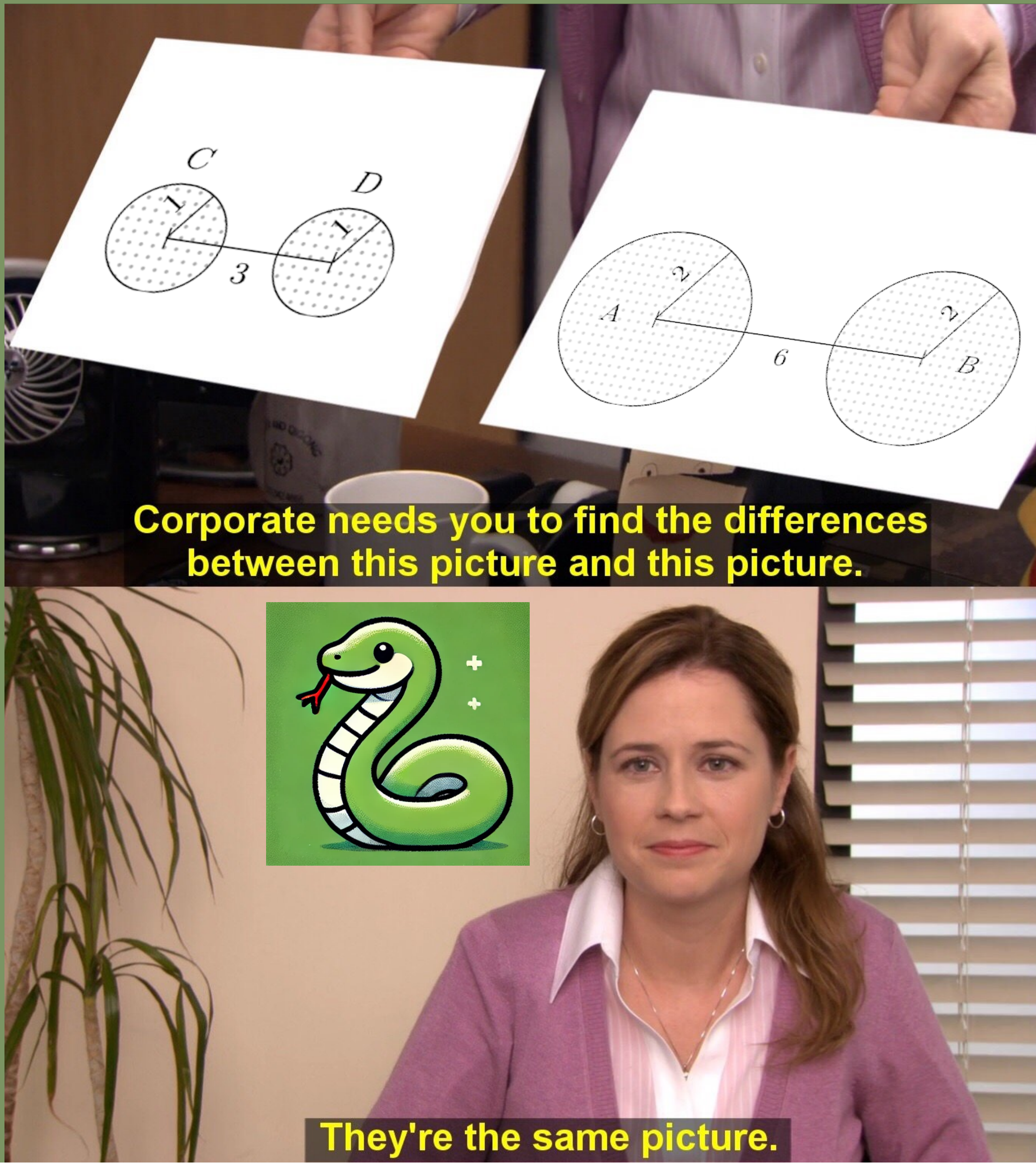
(oś p powinna być dwuwymiarowa, ale trudno)

Kule w przestrzeni kół (z odległością Hausdorffa)

$$d(P,Q) = |p-q| + |r_1 - r_2| \qquad \text{dla } P = B(p, r_1),\; Q = B(q, r_2)$$



(Euklidesowy wzór $d(P,Q) = \sqrt{|p-q|^2 + |r_1 - r_2|^2}$ *dawałby gładszy obraz)*



C
D
1
1
3
2
A
6
2
B
Corporate needs you to find the differences between this picture and this picture.
They're the same picture.

1. $d(A, B) = d(C, D)$
2. $d(E, F) = d(F, G)$

SLYTHERIN!

Widocznie skalowanie

nie zmienia odległości

- Jesteś w dobrym towarzystwie:

Stephen Semmes, *Metric Spaces and Mappings Seen at Many Scales*, str. 401-404 załącznika B w:

Michaił Gromow, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Birkhäuser 2007.

1. $d(A, B) = d(C, D)$
2. $d(E, F) = d(F, G)$

SLYTHERIN!

Widocznie skalowanie

nie zmienia odległości

- Jesteś w dobrym towarzystwie:

Stephen Semmes, *Metric Spaces and Mappings Seen at Many Scales*, str. 401-404 załącznika B w:

Michaił Gromow, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Birkhäuser 2007.

- Przed Tobą Komnata Tajemnic: **geometria hiperboliczna**

1. $d(A, B) = d(C, D)$
2. $d(E, F) = d(F, G)$

SLYTHERIN!

Widocznie skalowanie

nie zmienia odległości

- Jesteś w dobrym towarzystwie:

Stephen Semmes, *Metric Spaces and Mappings Seen at Many Scales*, str. 401-404 załącznika B w:

Michaił Gromow, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Birkhäuser 2007.

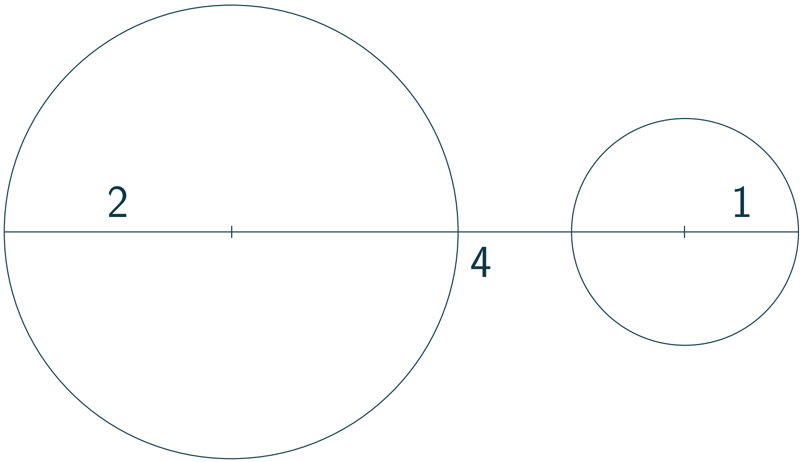
- Przed Tobą Komnata Tajemnic: **geometria hiperboliczna**

- *Tylko jak taką odległość zdefiniować?*

Odległość niezmiennicza na skalowanie:

Ile razy trzeba powiększyć jedno koło,

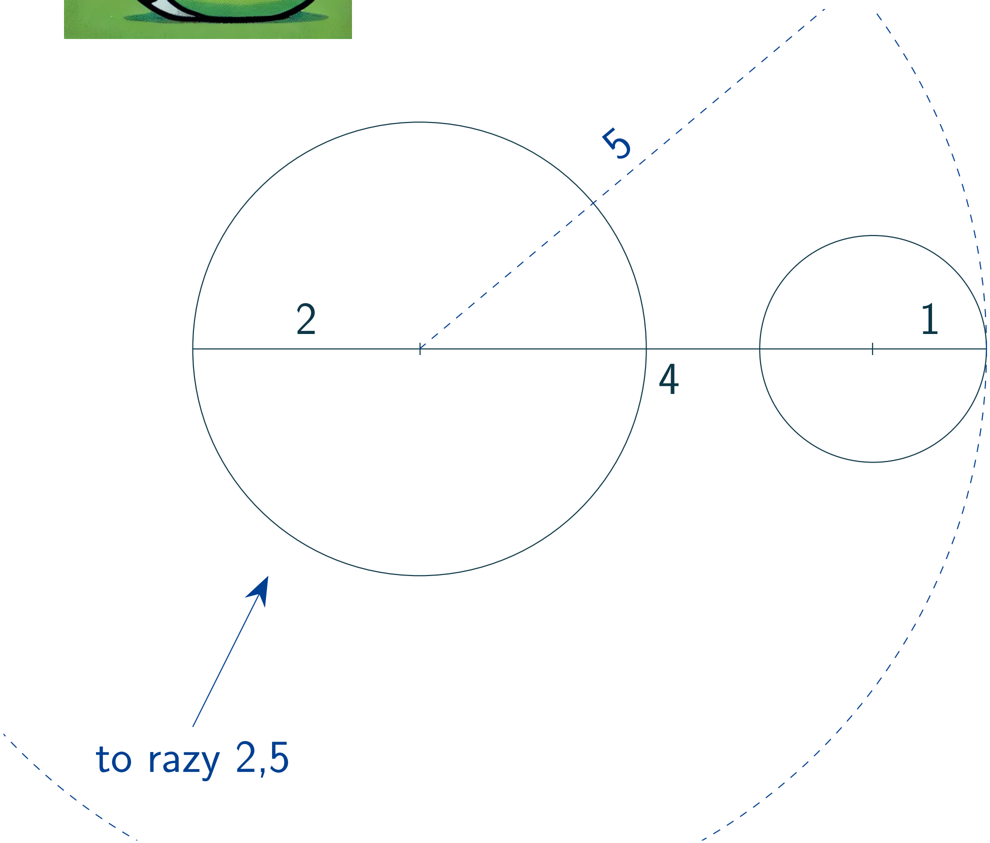
żeby pochłonęło drugie?



Odległość niezmiennicza na skalowanie:

Ile razy trzeba powiększyć jedno koło,

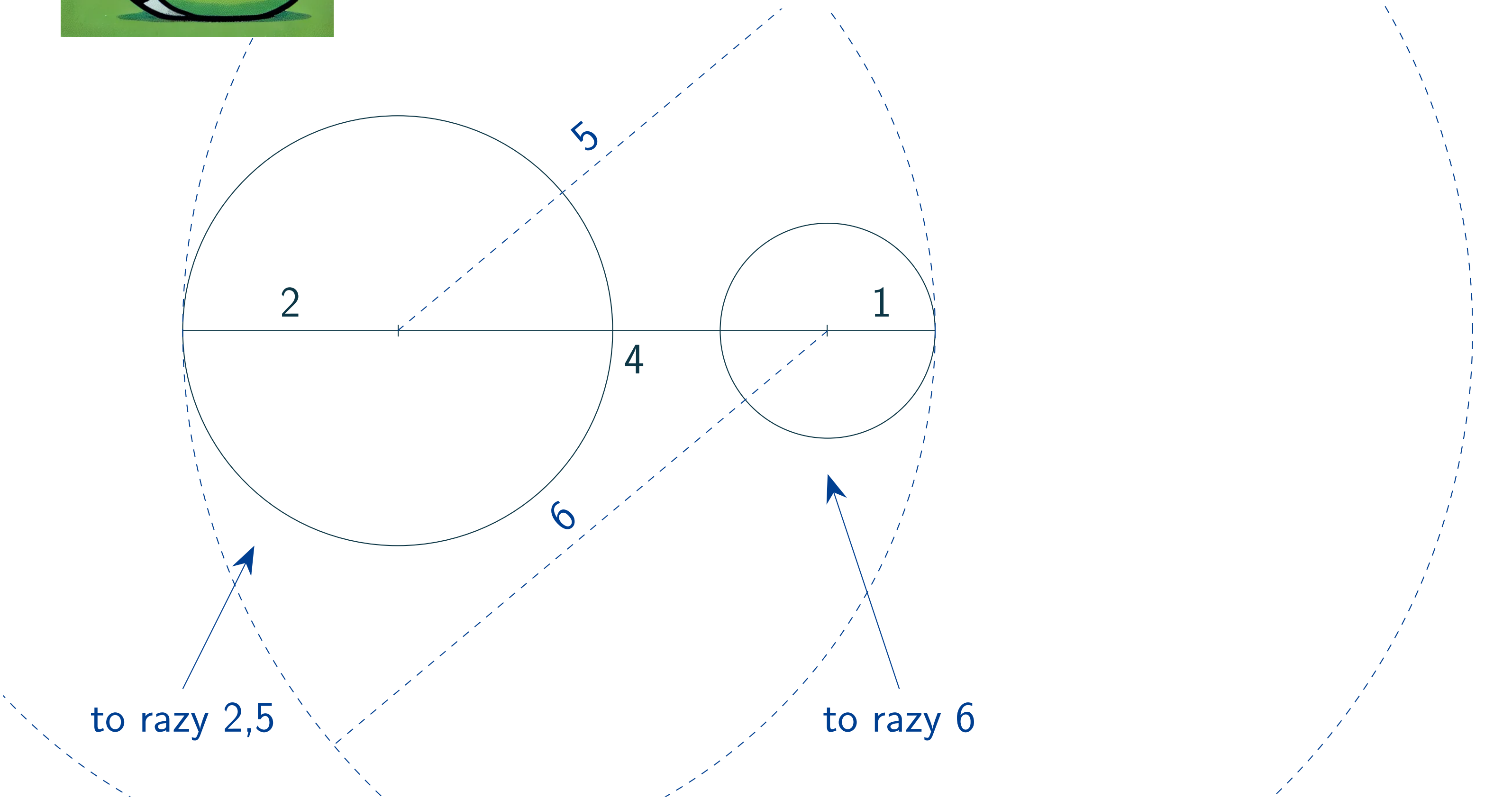
żeby pochłonęło drugie?



Odległość niezmiennicza na skalowanie:

Ile razy trzeba powiększyć jedno koło,

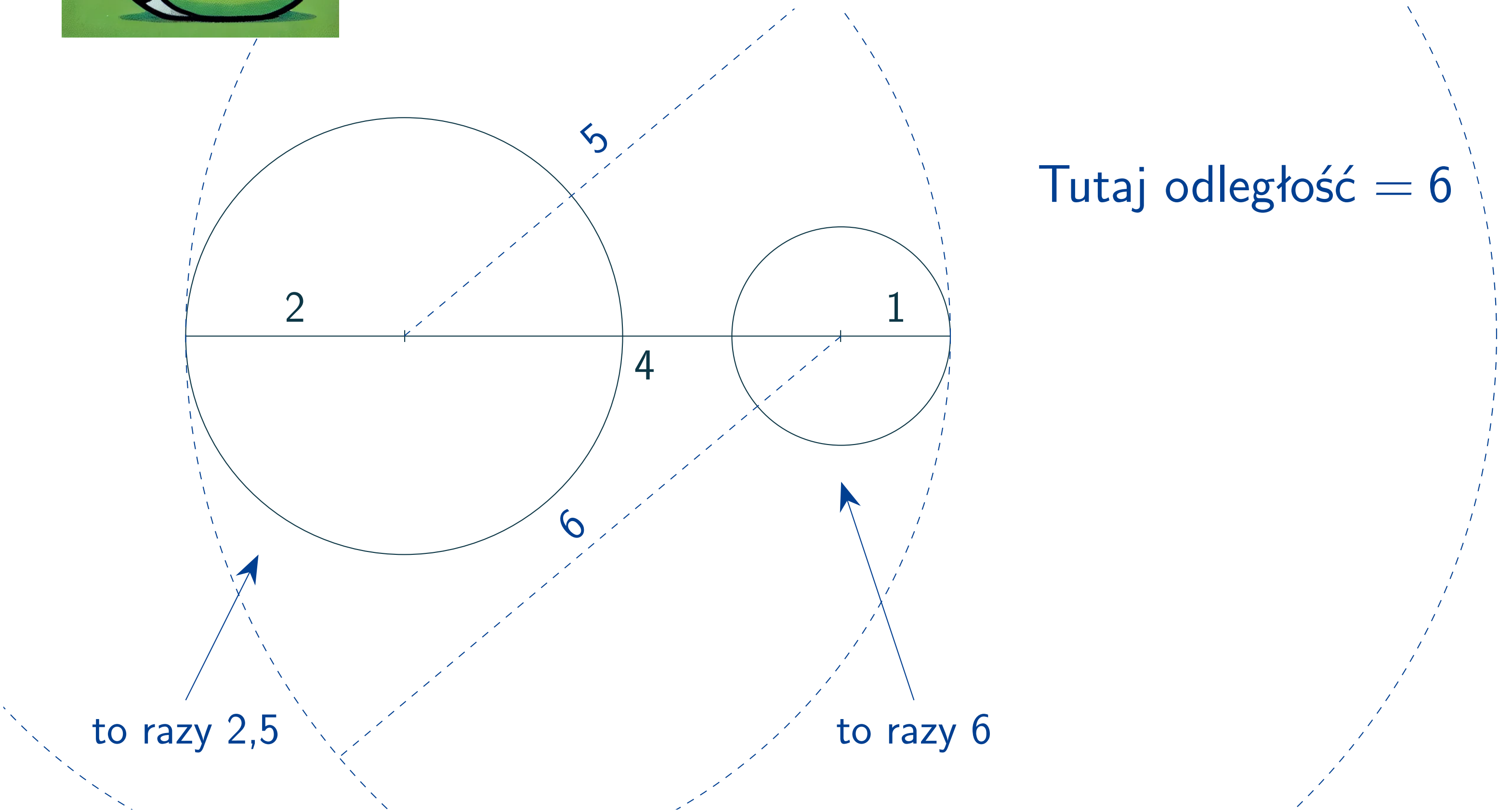
żeby pochłonęło drugie?



Odległość niezmiennicza na skalowanie:

Ile razy trzeba powiększyć jedno koło,

żeby pochłonęło drugie?

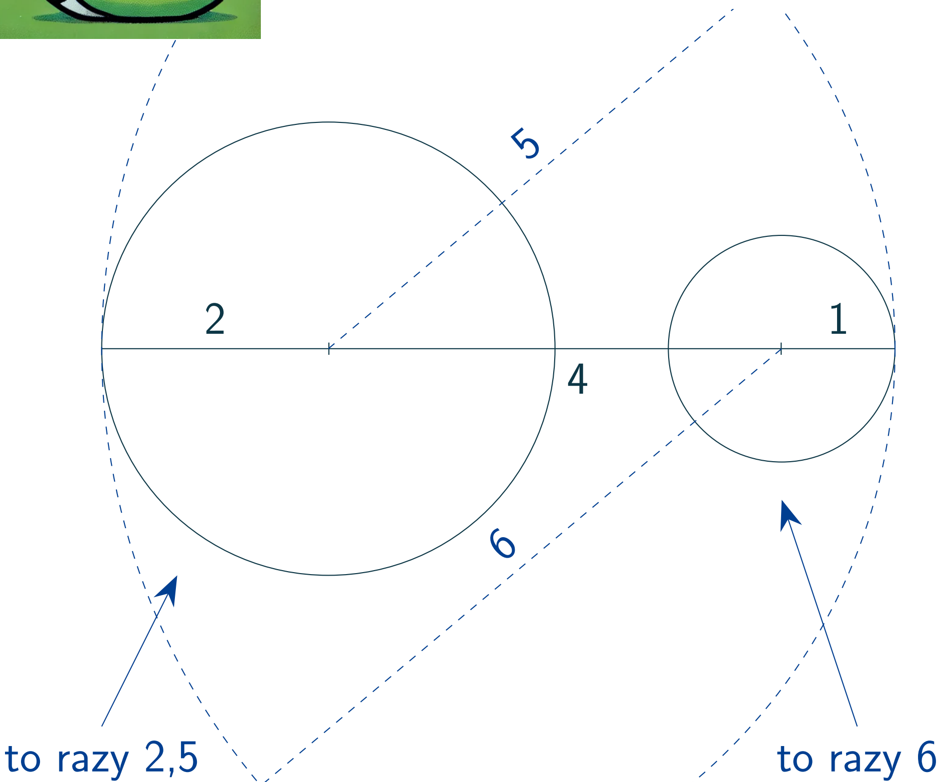


Tutaj odległość $= 6$

Odległość niezmiennicza na skalowanie:

Ile razy trzeba powiększyć jedno koło,

żeby pochłonęło drugie?



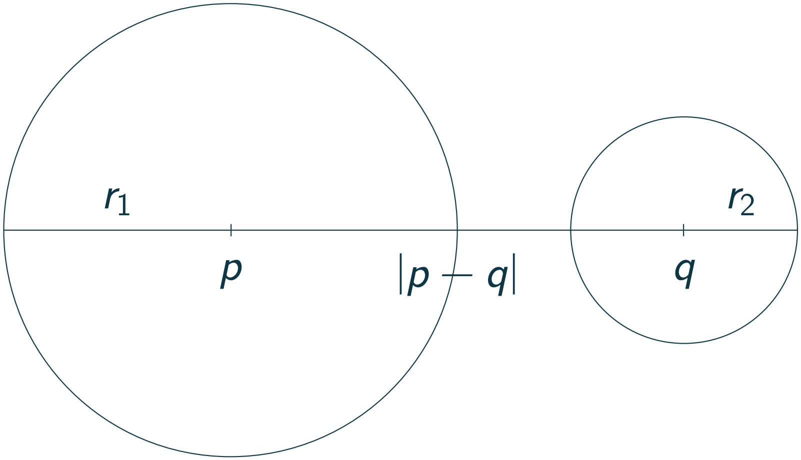
Tutaj odległość ~~= 6~~

$= \log(6)$

Odległość niezmiennicza na skalowanie:

Ile razy trzeba powiększyć jedno koło,

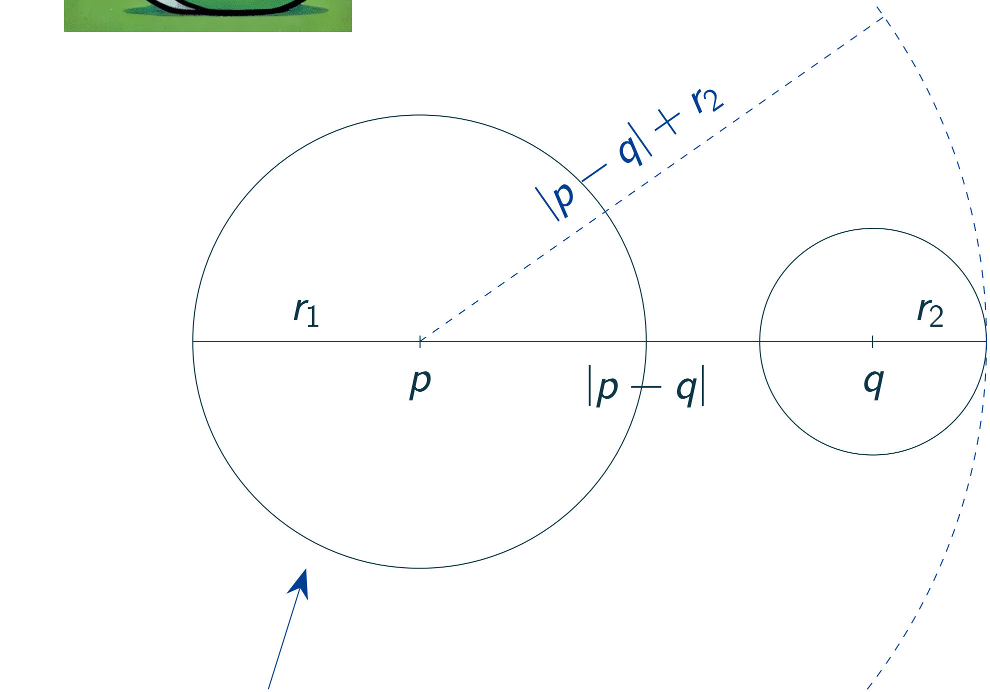
żeby pochłonęło drugie?



Odległość niezmiennicza na skalowanie:

Ile razy trzeba powiększyć jedno koło,

żeby pochłonęło drugie?

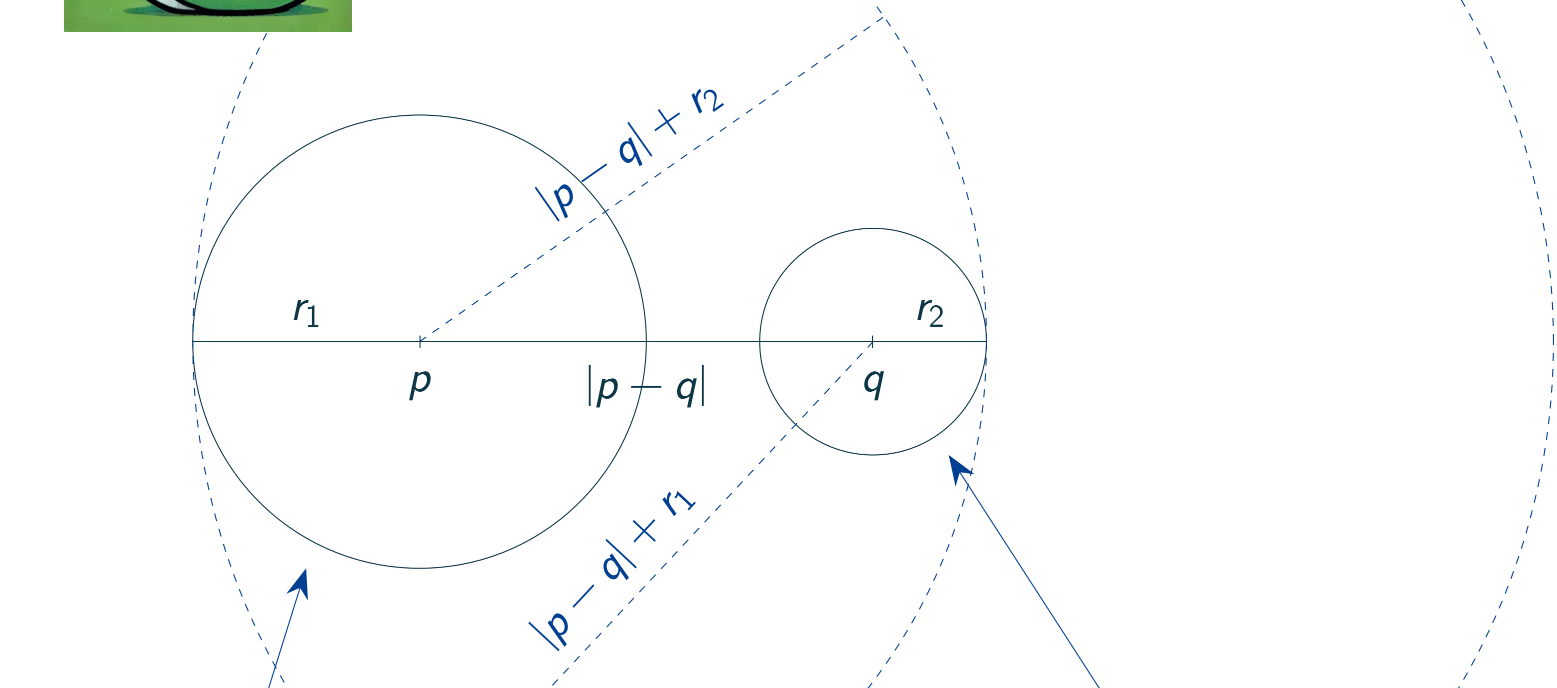


to razy $\dfrac{|p-q|+r_2}{r_1}$

Odległość niezmiennicza na skalowanie:

Ile razy trzeba powiększyć jedno koło,

żeby pochłonęło drugie?

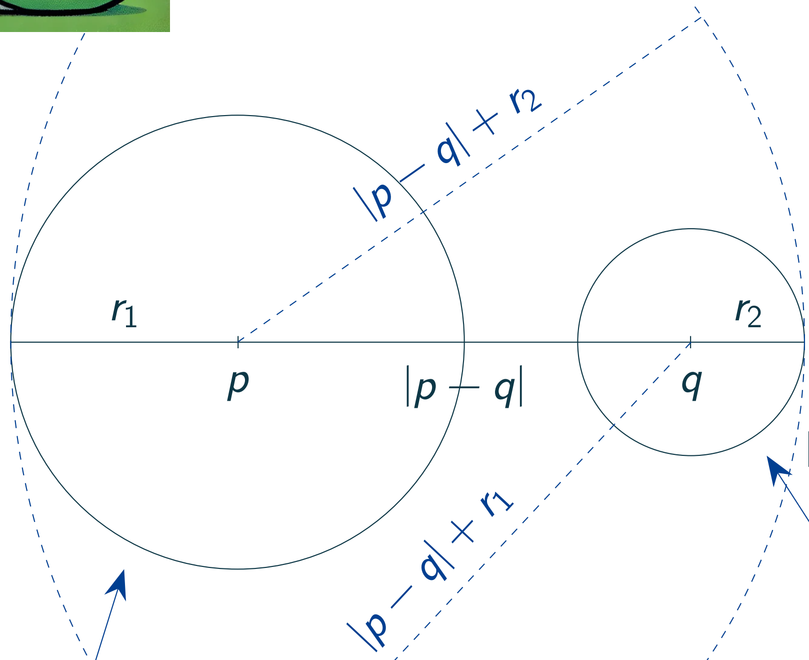


to razy $\dfrac{|p-q|+r_2}{r_1}$

to razy $\dfrac{|p-q|+r_1}{r_2}$

Odległość niezmiennicza na skalowanie:

Ile razy trzeba powiększyć jedno koło, żeby pochłonęło drugie?



Ogólny wzór na odległość kół $B(p, r_1)$ i $B(q, r_2)$:

$$\log\left(\frac{|p-q|+\max(r_1, r_2)}{\min(r_1, r_2)}\right)$$

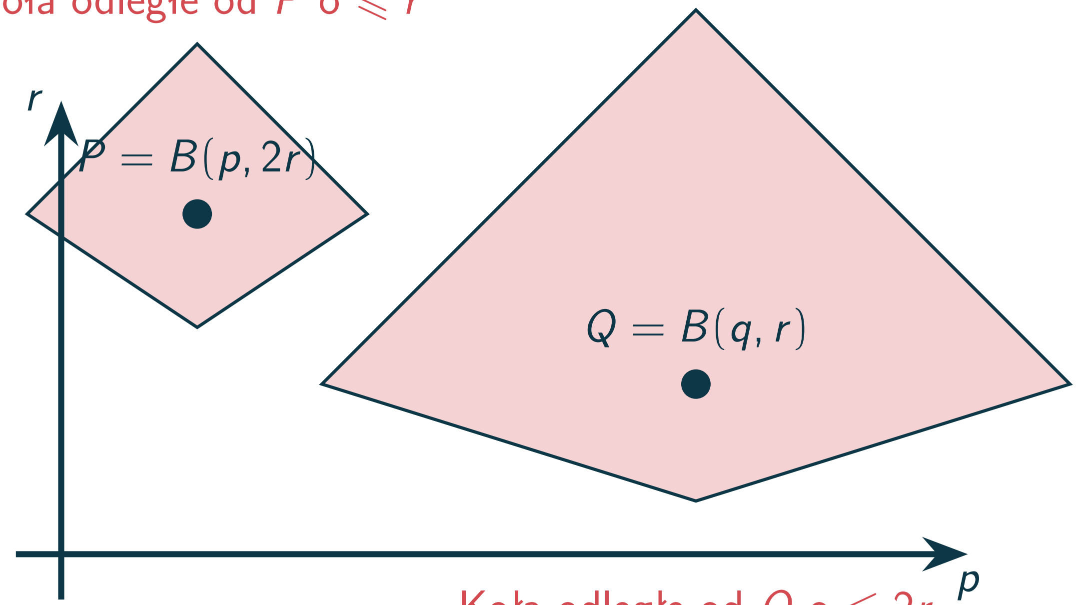
to razy $\dfrac{|p-q|+r_2}{r_1}$

to razy $\dfrac{|p-q|+r_1}{r_2}$

Kule w przestrzeni kół (z odległością niezm. na skalowanie)

$$d(P, Q) = \log\left(\frac{|p - q| + \max(r_1, r_2)}{\min(r_1, r_2)}\right) \qquad \text{dla } \begin{aligned} P &= B(p, r_1), \\ Q &= B(q, r_2) \end{aligned}$$

Koła odległe od P o $\leqslant r$



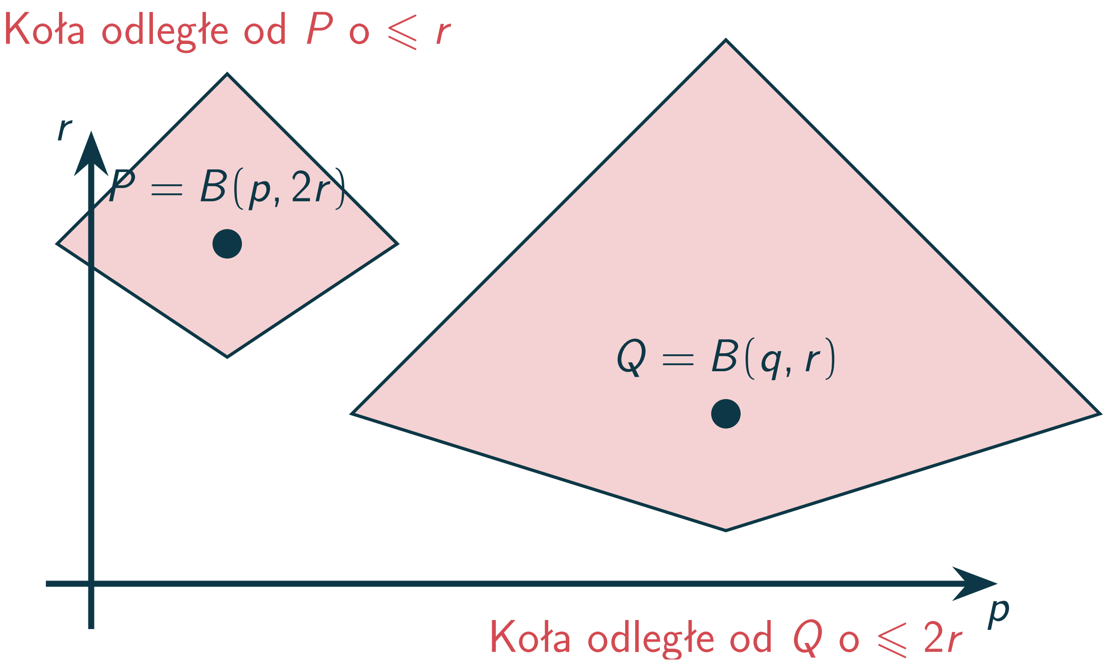
Koła odległe od Q o $\leqslant 2r$

Kule w przestrzeni kół (z odległością niezm. na skalowanie)

$$d(P,Q) = \log\left(\frac{|p-q| + \max(r_1,r_2)}{\min(r_1,r_2)}\right) \qquad \text{dla } P = B(p,r_1),\ Q = B(q,r_2)$$

$$= \log\left(1 + \frac{|p-q| + |r_1 - r_2|}{\min(r_1,r_2)}\right) \approx \frac{|p-q| + |r_1-r_2|}{r_1}$$

gdy $B(p,r_1) \approx B(q,r_2)$



Zagadka

Wskazać koła S_1, S_2 w taki sposób,

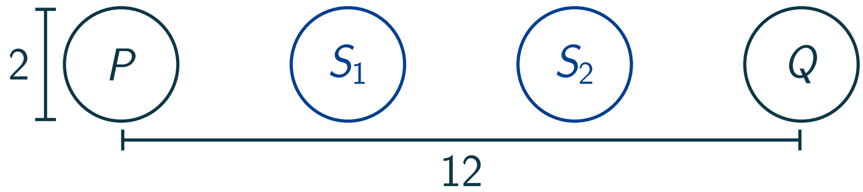
by długość łamanej $[P, S_1, S_2, Q]$ była najmniejsza

$$\log\left(\frac{|p-q|+\max(r_1,r_2)}{\min(r_1,r_2)}\right)$$

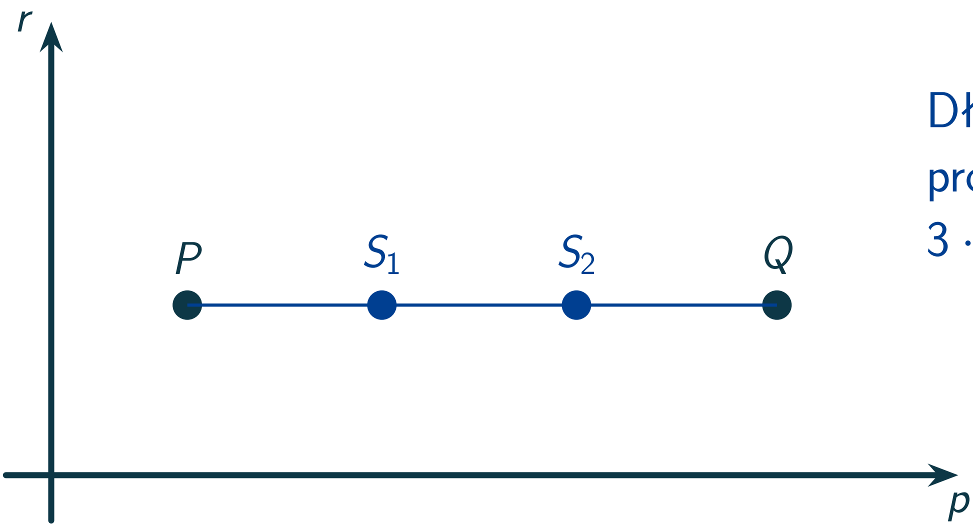
Zagadka

Wskazać koła S_1, S_2 w taki sposób,

by długość łamanej $[P, S_1, S_2, Q]$ była najmniejsza



$$\log\left(\frac{|p-q| + \max(r_1, r_2)}{\min(r_1, r_2)}\right)$$

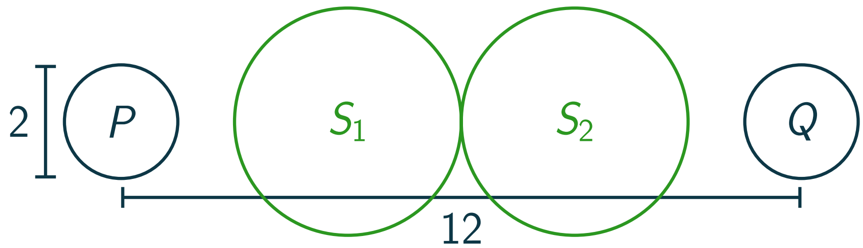


Długość proponowanej łamanej: $3 \cdot \log(1+4) = \log(125)$

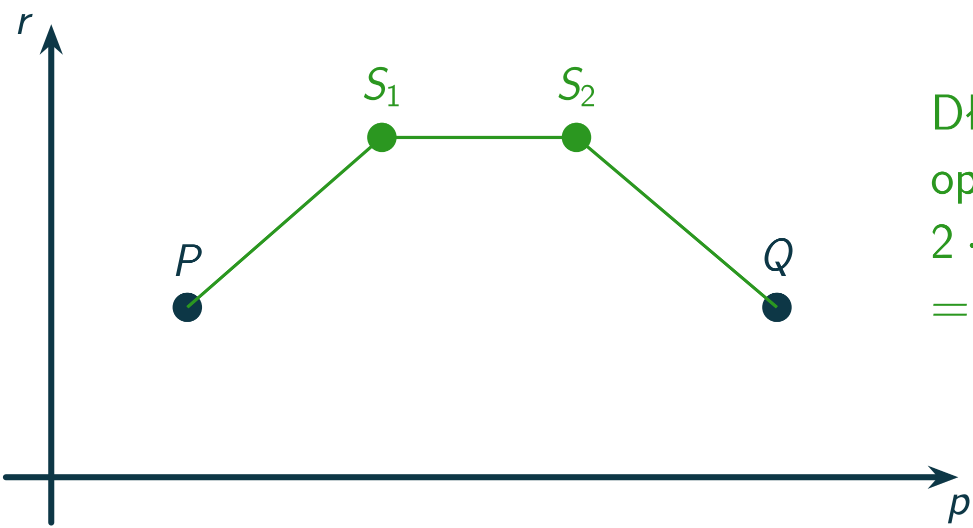
Rozwiązanie zagadki

Wskazać koła S_1, S_2 w taki sposób,

by długość łamanej $[P, S_1, S_2, Q]$ była najmniejsza



$$\log\left(\frac{|p-q| + \max(r_1, r_2)}{\min(r_1, r_2)}\right)$$

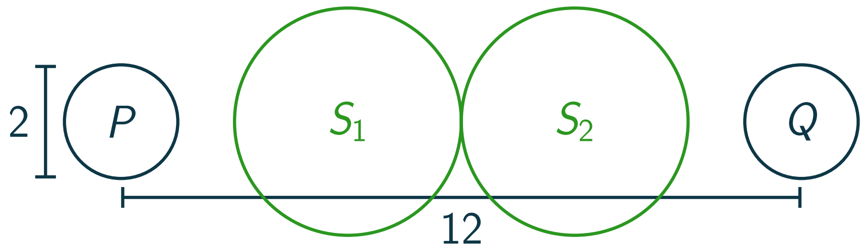


Długość optymalnej łamanej:
$2 \cdot \log(4+2) + \log(\frac{4+2}{2})$
$= \log(108)$

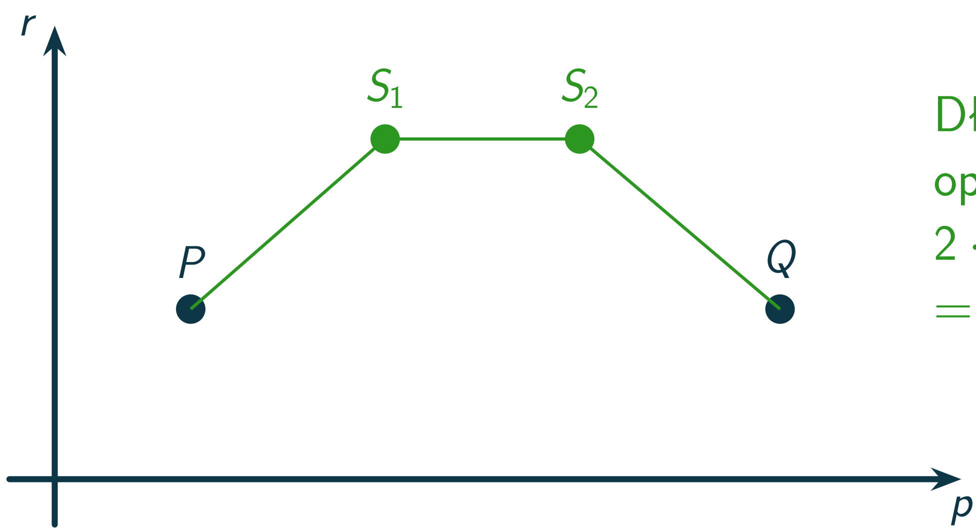
Rozwiązanie zagadki

Wskazać koła S_1, S_2 w taki sposób,

by długość łamanej $[P, S_1, S_2, Q]$ była najmniejsza



$$\log\left(1 + \frac{|p-q| + |r_1 - r_2|}{\min(r_1, r_2)}\right)$$



Długość

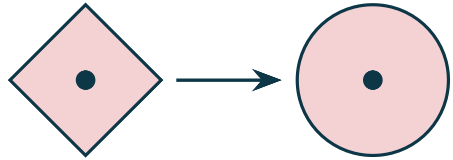
optymalnej łamanej:

$2 \cdot \log(4+2) + \log(\frac{4+2}{2})$

$= \log(108)$

W poszukiwaniu klasycznej geometrii hiperbolicznej

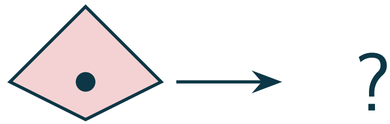
Przypomnienie: wzór na odległość $|p - q| + |r_1 - r_2|$



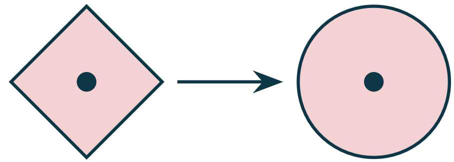
można (i warto) zastąpić przez $\sqrt{|p - q|^2 + |r_1 - r_2|^2}$

Co zrobić u nas?

$$d(P, Q) = \log \left(\frac{|p - q| + \max(r_1, r_2)}{\min(r_1, r_2)} \right) \rightsquigarrow ?$$



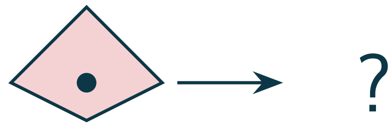
W poszukiwaniu klasycznej geometrii hiperbolicznej



Przypomnienie: wzór na odległość $|p-q|+|r_1-r_2|$

można (i warto) zastąpić przez $\sqrt{|p-q|^2+|r_1-r_2|^2}$

Co zrobić u nas?



$$d(P,Q)=\log\left(\frac{|p-q|+\max(r_1,r_2)}{\min(r_1,r_2)}\right)\rightsquigarrow ?$$

Pomysł:

$$d(P,Q)\approx\frac{|p-q|+|r_1-r_2|}{r_1}\quad \text{gdy } B(p,r_1)\approx B(q,r_2)$$

$$\text{Chcemy: }\approx\frac{\sqrt{|p-q|^2+|r_1-r_2|^2}}{r_1}$$

Musimy przeskalować odległość euklidesową,

ale inaczej dla każdego r!

Analogia optyczna: odl. euklidesowa

- **Prędkość światła:** $c(p, r) = 1$ (taka sama wszędzie w płaszczyźnie (p, r))
- **Zasada Fermata:** światło „wybiera" najszybszą drogę
- Niech $d_{\mathbb{E}}(P, Q) :=$ **czas na pokonanie drogi z P do Q**

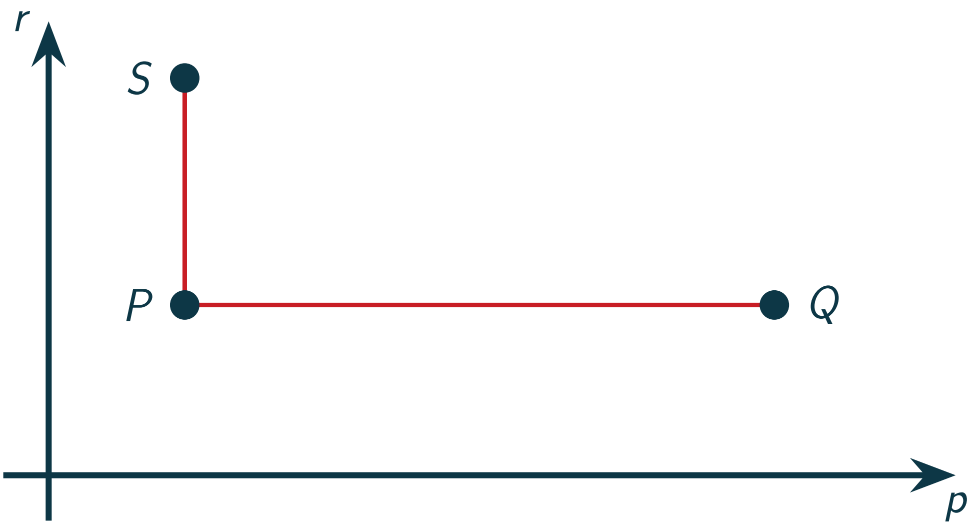
Optymalne drogi

$P \to Q$ i $P \to S$

Analogia optyczna: odl. euklidesowa

- **Prędkość światła:** $c(p, r) = 1$ (taka sama wszędzie w płaszczyźnie (p, r))
- **Zasada Fermata:** światło „wybiera” najszybszą drogę
- Niech $d_{\mathbb{E}}(P, Q) :=$ **czas na pokonanie drogi z P do Q**

  . . . czyli po prostu $|P - Q|$



Optymalne drogi

$P \to Q$ i $P \to S$

Analogia optyczna: odl. hiperboliczna

- **Prędkość światła:** $\cancel{c(p,r) = 1}$ $\quad c(p,r) = r$
- **Zasada Fermata:** światło „wybiera" najszybszą drogę
- Niech $d_{\mathbb{H}}(P,Q) :=$ **czas na pokonanie drogi z P do Q**

  czyli ...

Optymalne drogi

$P \to Q$ i $P \to S$

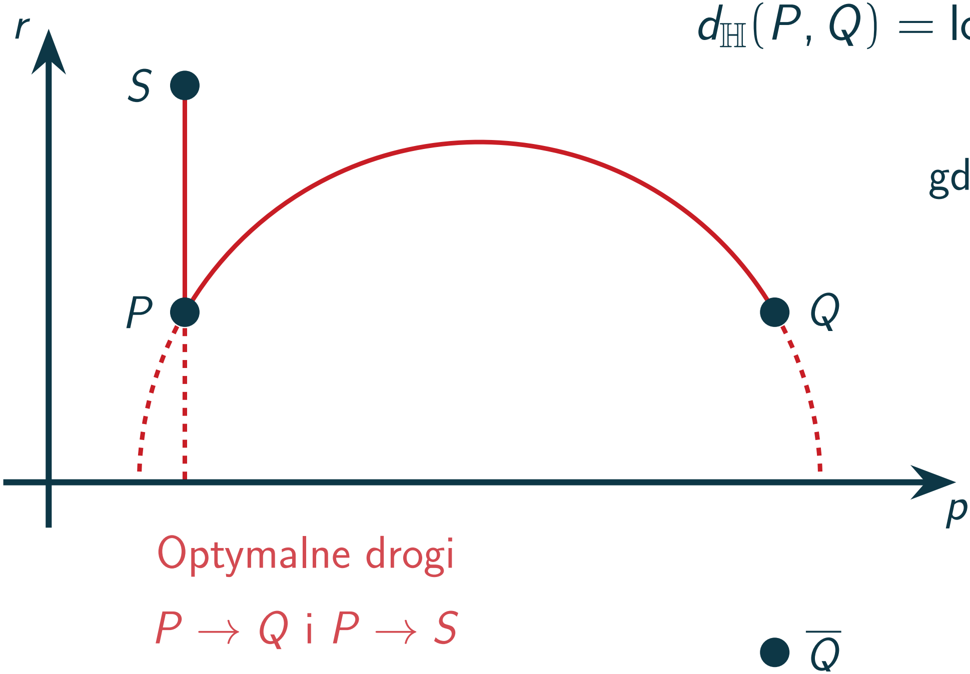
Analogia optyczna: odl. hiperboliczna

- **Prędkość światła:** $\cancel{c(p, r) = 1}$ $\quad c(p, r) = r$
- **Zasada Fermata:** światło „wybiera" najszybszą drogę
- Niech $d_{\mathbb{H}}(P, Q) :=$ **czas na pokonanie drogi z P do Q**

  czyli . . .

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \log\left(\frac{|P - \overline{Q}| + |P - Q|}{|P - \overline{Q}| - |P - Q|}\right)$$

gdzie $\overline{Q} = \overline{(q, r_2)} = (q, -r_2)$

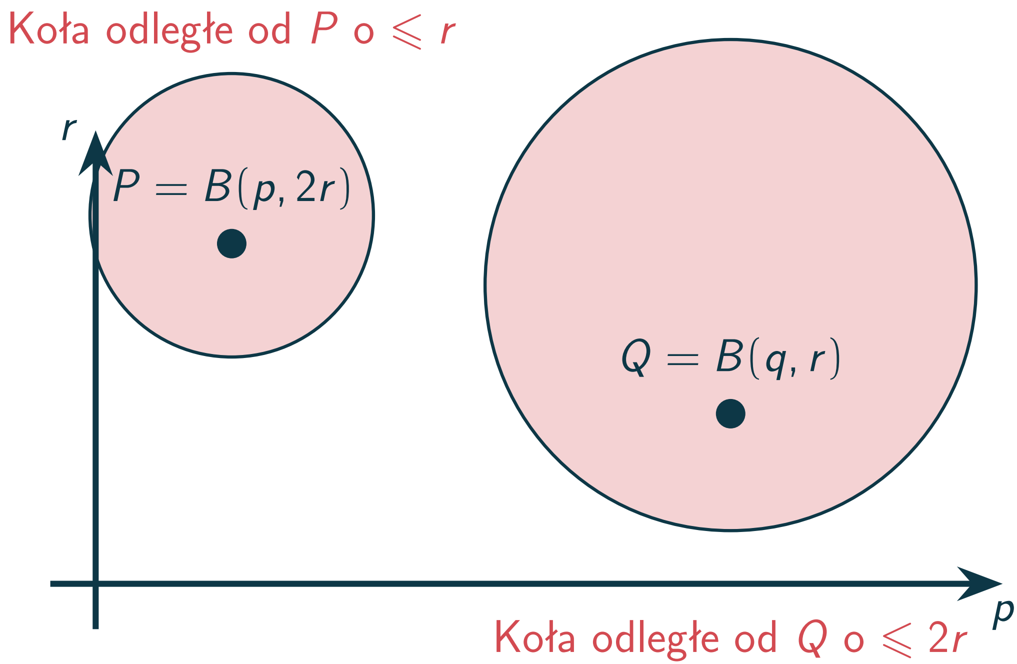


Optymalne drogi

$P \to Q$ i $P \to S$

Kule w przestrzeni kół (z odległością hiperboliczną)

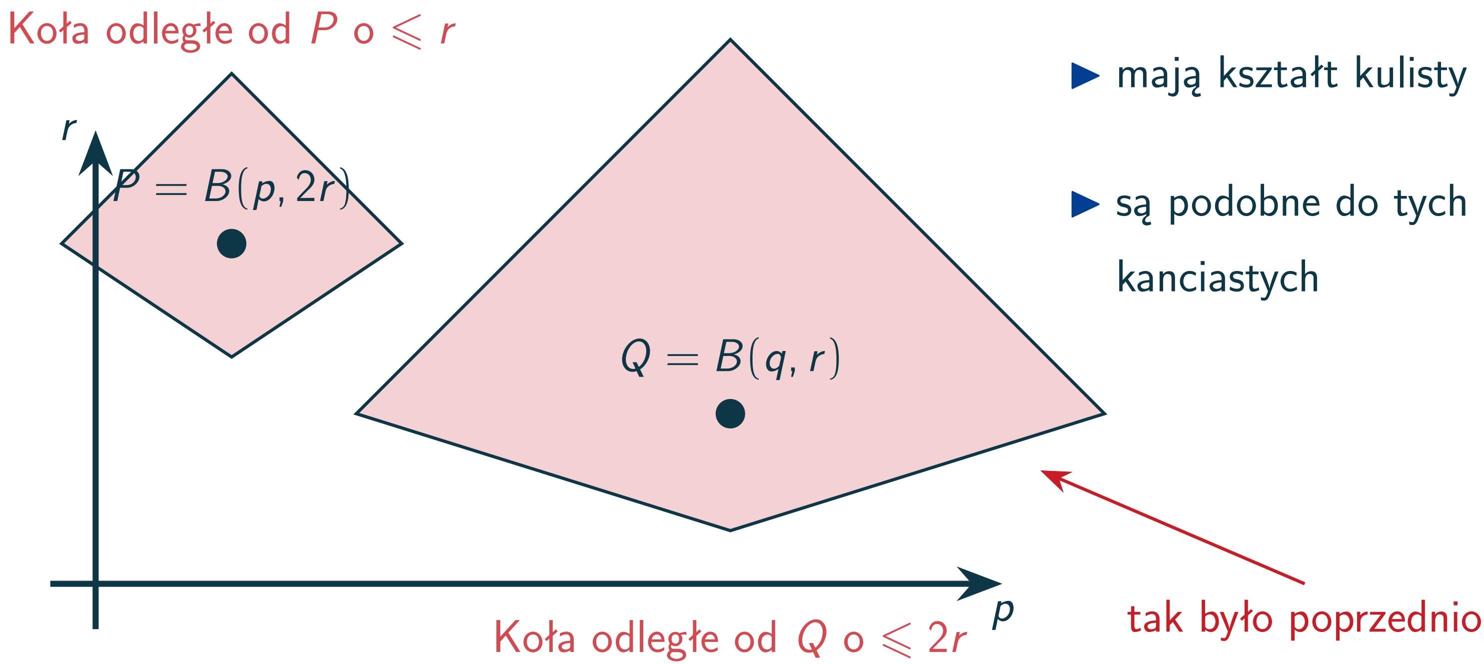
$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \log \left(\frac{|P - \overline{Q}| + |P - Q|}{|P - \overline{Q}| - |P - Q|} \right)$$



- mają kształt kulisty
- są podobne do tych kanciastych

Kule w przestrzeni kół (z odległością hiperboliczną)

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \log\left(\frac{|P - \overline{Q}| + |P - Q|}{|P - \overline{Q}| - |P - Q|}\right)$$



- mają kształt kulisty
- są podobne do tych kanciastych

rys. Dall·E 3

Dziekuję za uwagę!

Zadania

BONUS!

Wykazać, że:

- odległość Hausdorffa $d_R(P, Q) = |p - q| + |r_1 - r_2|$

  spełnia nierówność trójkąta: $d_R(P, Q) \leqslant d_R(P, S) + d_R(S, Q)$

- tę samą nierówność spełnia odległość niezmiennicza na skalowanie

  $d_S(P, Q) = \log\left(\frac{|p - q| + \max(r_1, r_2)}{\min(r_1, r_2)}\right)$

- jeśli prędkość światła wynosi $c(p, r) = r$,

  to światło porusza się po półokręgach prostopadłych do brzegu

- kule w odległości hiperbolicznej

  $d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \log\left(\frac{|P - \overline{Q}| + |P - Q|}{|P - \overline{Q}| - |P - Q|}\right)$

  mają kształt kulisty