Na pytanie: dwie czy trzy?

odpowiedź brzmi: cztery,

czyli jedna!

Elementy Euklidesa wprowadzające dedukcyjnie geometrię i arytmetykę nie są w dzisiejszym sensie dziełem aksjomatycznym.

Zakładają, że ich użytkownik ma pewien zasób pojęć, którymi umie operować

niektóre z nich wymienione są w tzw. definicjach, np.

1. Punkt jest tym, co nie ma części.

2. Linia to długość bez szerokości.

...

4. Prosta to linia jednakowo leżąca względem swych punktów.

...

35. Równoległe to proste leżące w jednej płaszczyźnie, które dowolnie przedłużone nie przetną się

Elementy Euklidesa wprowadzające dedukcyjnie geometrię i arytmetykę nie są w dzisiejszym sensie dziełem aksjomatycznym.

Zakładają, że ich użytkownik ma pewien zasób pojęć, którymi umie operować,

i proponują ”na start” pięć zdań (zwanych postulatami), z których uzyskane zostaje ponad 500 innych.

Pewne zdania mogą być przyczyną innych zdań.

Ten związek przyczynowy nazywamy dowodem.

(podobno Arystoteles, w zaginionym dziele *Matematyk*)

Elementy Euklidesa wprowadzające dedukcyjnie geometrię i arytmetykę nie są w dzisiejszym sensie dziełem aksjomatycznym.

Zakładają, że ich użytkownik ma pewien zasób pojęć, którymi umie operować,

i proponują "na start" pięć zdań (zwanych postulatami), z których uzyskane zostaje ponad 500 innych.

Nie ma w nich sugestii, że w ten sposób można uzyskać wszystko o geometrii czy arytmetyce, słowem jest to dedukcja lokalna, taka, jakiej uczymy w szkole (czy doskonalimy na olimpiadach) rozwiązując zadania na dowodzenie – żaden z dowodzonych faktów nie jest wyprowadzany *ab ovo*, ani też owego *ovo* w dyspozycji tak ucznia, jak nauczyciela nie ma.

Ogrom wiedzy i błyskotliwość rozumowań w *Elementach* przerastała i porażała większość studiujących je uczonych, co pogłębiało jeszcze panujące imperium rzymskie, nauce mało przyjazne. Filozofów greckich zastąpili po stuleciach wczesnośredniowieczni epigoni. Zgodnie z ówczesnymi normami nie krępowali się w zaokrąglaniu i wręcz zmyślaniu faktów.

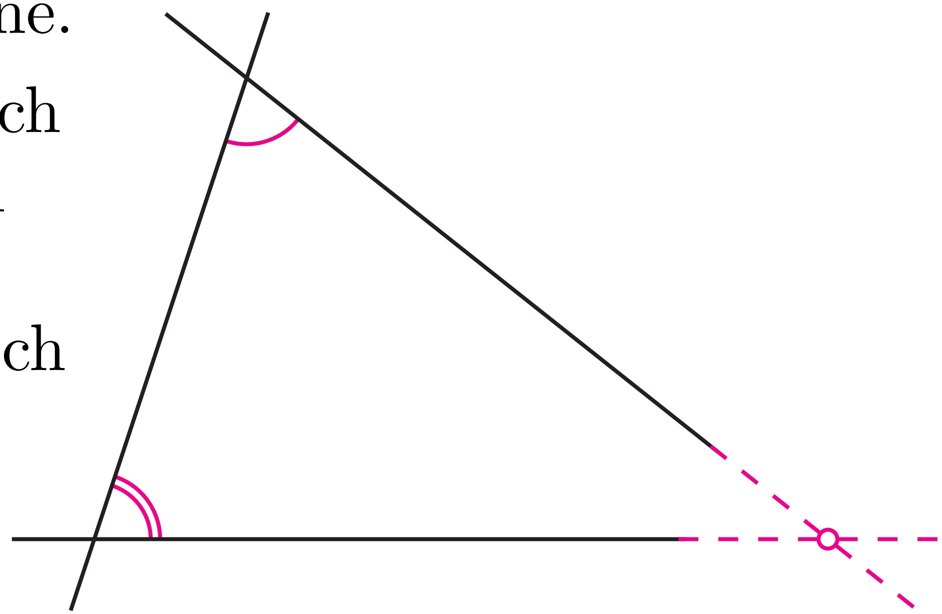
vide eg. Umberto Eco, *Baudolino* (2000, po polsku od 2001)

I tak Proklos (412-485), szef Akademii Platońskiej, zmyślił nieznany życiorys Euklidesa (dalej przepisywany z niego jako ze źródła) i spostrzegając, iż piąty postulat jest bardziej skomplikowany i ma więcej słów niż poprzednie razem wzięte (po polsku 30/27), orzekł, że został tylko roboczo dopisany przez Euklidesa przy dowodzeniu 30. twierdzenia, który miał go usunąć po zakończeniu *Elementów*, ale nagła śmierć to uniemożliwiła.

Dlatego my, postuluje Proklos, powinniśmy zrealizować zamiar mistrza i wykazać, że piąty postulat da się usunąć, czyli wywnioskować z czterech poprzednich.

Postulaty w *Elementach* są następujące.

1. Od dowolnego punktu do dowolnego innego można poprowadzić prostą.
2. Ograniczoną prostą można dowolnie przedłużyć.
3. Z dowolnego środka dowolnym promieniem można opisać okrąg.
4. Wszystkie kąty proste są równe.
5. Jeśli suma kątów wewnętrznych jednostronnych, utworzonych przez dwie proste przecięte trzecią, jest mniejsza od dwóch kątów prostych, to proste te po przedłużeniu przetną się i to z tej właśnie strony.



Faktycznie, ten piąty zdecydowanie nie pasuje!

To niefrasobliwie rzucone przez Proklosa zadanie przez 1500 lat było obecne w pracach praktycznie każdego matematyka, o którym coś wiemy – od Pacyfiku do Atlantyku.

Kolekcjonowano te fakty, które można było udowodnić
bez piątego postulatu

np. różne proste mające wspólną prostopadłą są rozłączne, dwie różne proste nie mogą mieć dwóch punktów wspólnych, nierówność trójkąta, w trójkącie naprzeciw większego kąta leży większy bok

i te, z których piąty postulat wynikał

np. istnieje prostokąt, suma kątów w trójkącie to 180°, na trójkącie można opisać okrąg, wysokości trójkąta przecinają się

w nadziei, że odnajdzie się wspólny element tych zbiorów.

przez ponad dwadzieścia lat wierzono, że takim faktem jest możliwość poprowadzenia przez dowolny punkt we wnętrzu kąta ostrego prostej przecinającej oba jego ramiona.

Pierwszy w tych zbiorów (nazwany geometrią absolutną) istotnie uzupełnił Girolamo Saccheri (1667-1733, *Euclides ab omni naevo vindicatus*) dowodząc, że suma kątów w trójkącie nie przekracza 180°, co sugerowało wielu zastanowienie się nad tym, czy może
– gdy odrzucimy piąty postulat –
nie zdarzą się trójkąty o sumie kątów mniejszej od 180°.

I tak zaczęła się dramatyczna, skandaliczna,
a dla głównych bohaterów wręcz tragiczna,
wykraczająca poza ramy matematyki,
historia odkrycia pierwszej geometrii nieeuklidesowej.

Temat i rozmiar czasowy mojego wystąpienia pozwalają jedynie na szkic tych wydarzeń.

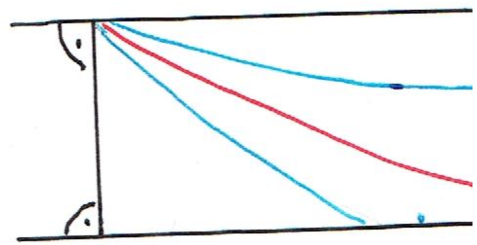
Immanuel Kant (1724–1804) – *intuicje geometryczne są wrodzone, więc geometria może być tylko jedna.*

sądy syntetyczne a priori – *Kritik der reinen Vernunft*, 1781

Immanuel Kant (1724–1804) – *intuicje geometryczne są wrodzone, więc geometria może być tylko jedna.*

Johann Heinrich Lambert (1728–1777) – *nikt nie może zakazać badań alternatywnej geometrii, nawet, gdyby nie istniała.*

Theorie der Parallellinien 1766



wprowadzenie pojęcia geodezyjnej,
uogólnienie pojęcia równoległej
(nie ma ostatniej przecinającej,
jest pierwsza nieprzecinająca),

ale przede wszystkim jest w tej monografii kompletny wykład geometrii później odkrytej przez Łobaczewskiego i Bolyaia.

Immanuel Kant (1724–1804) – *intuicje geometryczne są wrodzone, więc geometria może być tylko jedna.*

Johann Heinrich Lambert (1728–1777) – *nikt nie może zakazać badań alternatywnej geometrii, nawet, gdyby nie istniała.*

Friedrich Carl Gauss (1777–1855) – *gdyby przedstawić alternatywną geometrię, byłoby się zadeptanym przez idiotów.*
list do Bessela, 1829

Immanuel Kant (1724–1804) – *intuicje geometryczne są wrodzone, więc geometria może być tylko jedna.*

Johann Heinrich Lambert (1728–1777) – *nikt nie może zakazać badań alternatywnej geometrii, nawet, gdyby nie istniała.*

Friedrich Carl Gauss (1777–1855) – *gdyby przedstawić alternatywną geometrię, byłoby się zadeptanym przez idiotów.*

Николай Иванович Лобачевский (1793–1856) – *geometria alternatywna istnieje i nawet jest ciekawsza od euklidesowej.*

О началах геометрии, 1829

Janos Bolyai (1802–1860) – *tworząc alternatywną geometrię tworzymy nowy świat z niczego.*

Appendix w podręczniku ojca Farkasa, 1932

Immanuel Kant (1724–1804) – *intuicje geometryczne są wrodzone, więc geometria może być tylko jedna.*

Johann Heinrich Lambert (1728–1777) – *nikt nie może zakazać badań alternatywnej geometrii, nawet, gdyby nie istniała.*

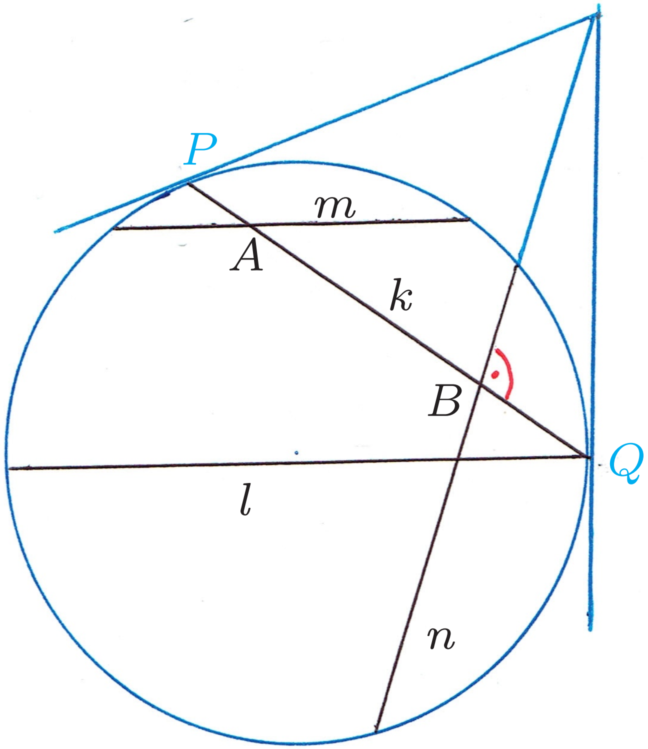
Friedrich Carl Gauss (1777–1855) – *gdyby przedstawić alternatywną geometrię, byłoby się zadeptanym przez idiotów.*

Николай Иванович Лобачевский (1793–1856) – *geometria alternatywna istnieje i nawet jest ciekawsza od euklidesowej.*
Janos Bolyai (1802–1860) – *tworząc alternatywną geometrię tworzymy nowy świat z niczego.*

Felix Klein (1849–1925) – *można dowieść,*
że geometria Bolyaia–Łobaczewskiego jest równie poprawna,
jak geometria Euklidesa.

*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen,*1872

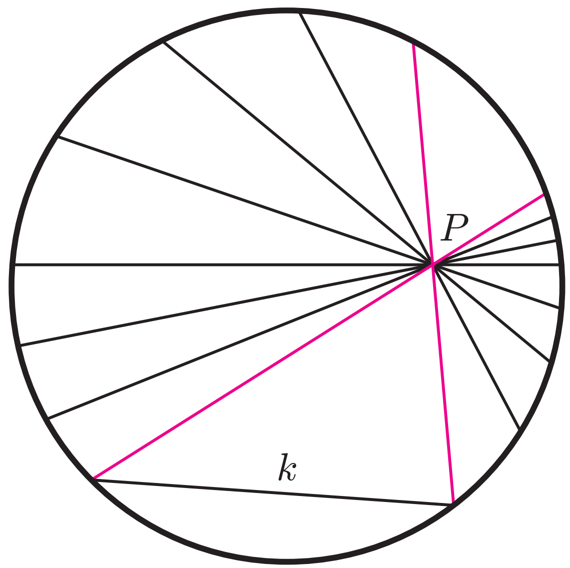
Model Kleina geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego na płaszczyźnie euklidesowej dowodzi, że jest ona niemniej poprawna od geometrii euklidesowej.



- cała płaszczyzna to wnętrze koła;
- geodezyjne (proste) to cięciwy;
- proste równoległe to trafiające w ten sam punkt na brzegu, jak k i l;
- nadrównoległe to rozłączne trafiające w różne punkty, jak l i m, lub m i n;
- a dwie proste są prostopadłe, gdy przedłużenie jednej przechodzi przez punkt przecięcia stycznych wystawionych w końcach drugiej, jak k i n (o dziwo relacja jest symetryczna);
- metryką jest $\left|\ln \frac{AP\cdot BQ}{AQ\cdot BP}\right|$, a więc przekształcenia afiniczne zachowujące brzeg są izometriami.

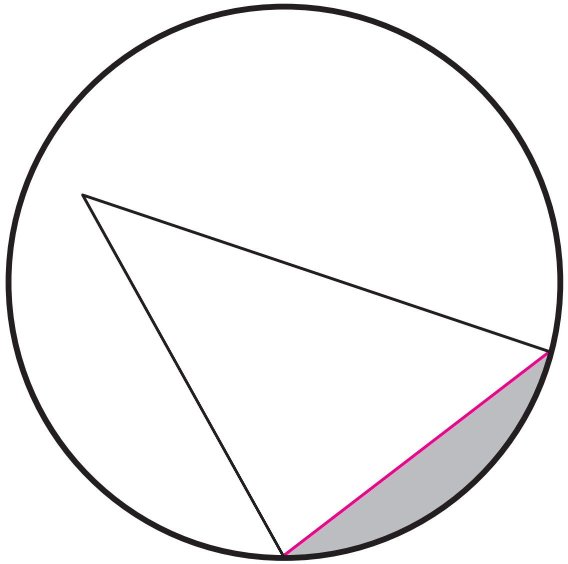
Najlepszą metodą poznania geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego jest zabawa modelem Kleina. Widać np., że

- przez punkt można poprowadzić do danej prostej dwie równoległe i wiele nadrównoległych,



Najlepszą metodą poznania geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego jest zabawa modelem Kleina. Widać np., że

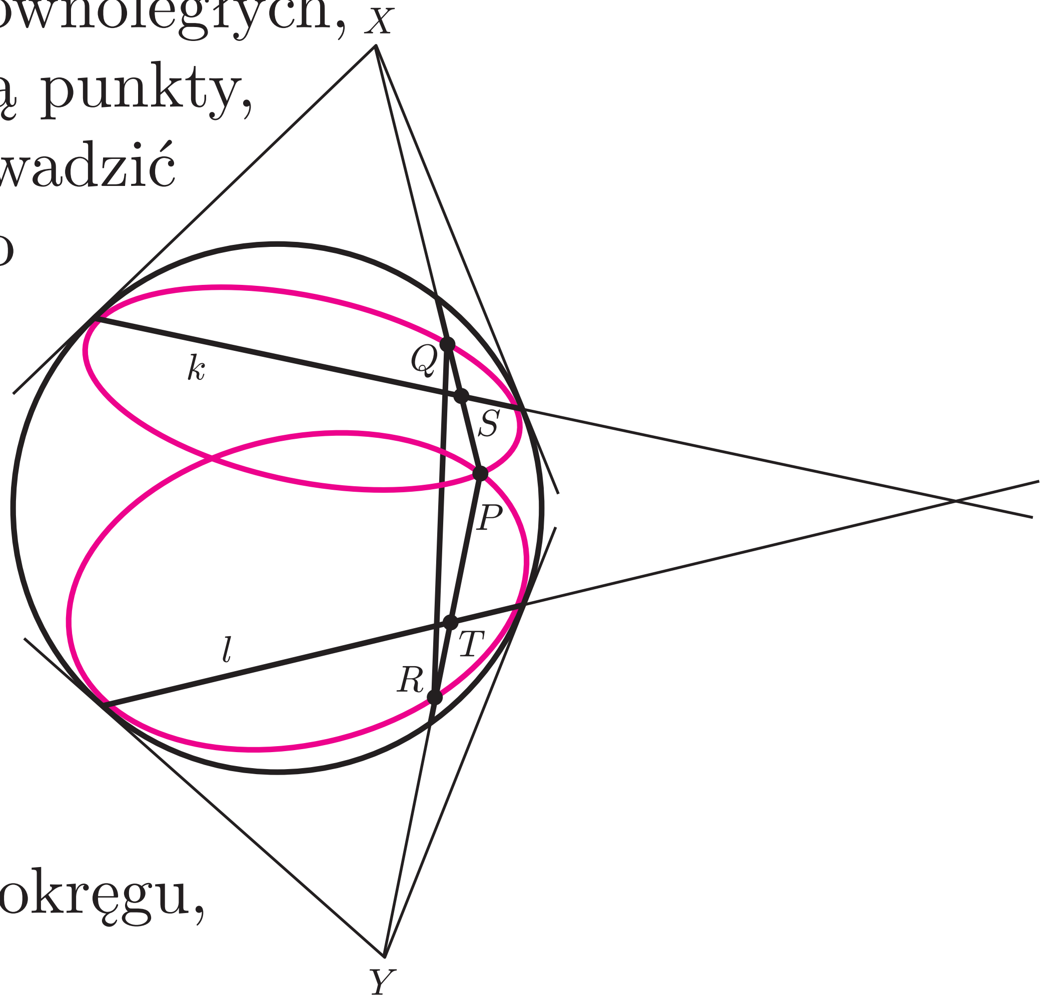
- przez punkt można poprowadzić do danej prostej dwie równoległe i wiele nadrównoległych,
- we wnętrzu każdego kąta są punkty, przez które nie można poprowadzić prostej przecinającej oba jego ramiona,



Najlepszą metodą poznania geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego jest zabawa modelem Kleina. Widać np., że

- przez punkt można poprowadzić do danej prostej dwie równoległe i wiele nadrównoległych,
- we wnętrzu każdego kąta są punkty, przez które nie można poprowadzić prostej przecinającej oba jego ramiona,
- linia złożona z punktów równoodległych od danej prostej (ekwidystanta) to elipsa styczna do brzegu w jej końcach, co pozwala na wskazanie trójkąta, na którym nie można opisać okręgu,

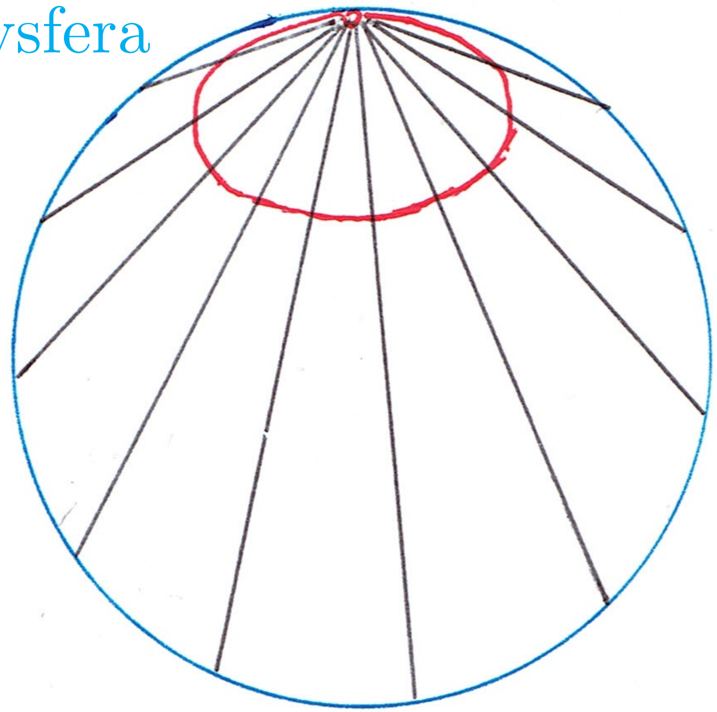
itd., itp.



Klein zwrócił uwagę na kolejną własność swojego modelu:

- linia przecinająca każdą prostą pęku równoległych pod kątem prostym (horycykl) to elipsa styczna do brzegu, mająca jedną oś będącą kwadratem drugiej.

Spostrzegł mianowicie, że odpowiednik horycyklu w przestrzennym modelu Kleina – horysfera jest modelem płaskiej geometrii euklidesowej. Konkretnie geometria horysfery to geometria płaszczyzny euklidesowej w postaci, jakiej używa analiza zespolona: czyli jako rzut stereograficzny płaszczyzny na sferę (ta postać płaszczyzny euklidesowej nazywa się geometrią Möbiusa).



Dowiódł więc, że geometria euklidesowa jest niemniej poprawna od geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego.

Tak wiec sprawa geometrii Euklidesa i Bolyaia–Łobaczewskiego została wyjaśniona, a z czasem pojawiły się próby zbudowania dla nich i ich części wspólnej, geometrii absolutnej, aksjomatyki we współczesnym sensie:

Moritz Pasch

Vorlesungen über neue Geometrie, 1882

David Hilbert, dwukrotnie

Grundlagen der Geometrie, 1999, 2003

by wreszcie uzyskać sukces

Alfred Tarski

A decision method for elementary algebra and geometry, 1948

Ale to sprawy nie zakończyło.

na ten temat: *Kompletne beznadziejne bezdroża*

w: *Matematyka z różnych stron widziana*, str. 25–38

lub *MSN 14*, str. 10–18

Bowiem 18 lat przed pracą Kleina na propozycję nie do odrzucenia ze strony Gaussa, Berhard Riemann wygłosił wykład habilitacyjny o geometriach nieeuklidesowych, podchodząc do sprawy analitycznie.

Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, 1854

zob. też w *Matematyka z różnych stron widziana* lub *MSN 4*

Riemann określał geometrie lokalnie, w otoczeniu punktu, a następnie zlepiał z tych otoczeń całe przestrzenie, który to efekt nazywamy dziś rozmaitością.

Metoda ta ma się nijak do syntetycznej, aksjomatycznej metody od Euklidesa do przytoczonej pracy Kleina.

Trzymajac się dwóch wymiarów otrzymamy trzy rodzaje takich "kawałków", wyciętych z:
siodła, płaszczyzny lub sfery, mówimy wtedy
odpowiednio o krzywiźnie ujemnej, zerowej, dodatniej.

Jeśli zechcemy otrzymać geometrię
• jednorodną – w każdym miejscu taką samą
i zażądamy, aby w niej
• dwie różne proste miały co najwyżej jeden punkt wspólny,

to otrzymamy trzy geometrie: odpowiednio
hiperboliczną, identyczną z geometrią Bolyaia–Łobaczewskiego,
paraboliczną, identyczną z geometrią Euklidesa
i eliptyczną, lokalnie sferyczną, ale ze względu na drugi warunek dziejącą się na płaszczyźnie rzutowej (czyli podzieleniu sfery przez antypodyzm) – o niej dalej.

Powszechnie przez płaszczyznę rzutową rozumie się płaszczyznę euklidesową uzupełnioną ”prostą w nieskończoności”, składającą się z kierunków tej płaszczyzny.

Już to pozwala na stwierdzenie, że na płaszczyźnie rzutowej mieści się zarówno płaszczyzna euklidesowa,
jak płaszczyzna Bolyaia–Łobaczewskiego (model Kleina).

Stąd sugestia Artura Cayleya:
geometria rzutowa to cała geometria,
który w latach 70. XIX wieku wskazywał taki kierunek badań w poszukiwaniu syntetycznego, aksjomatycznego ”wspólnego mianownika” dla trzech riemannowskich geometrii.

Bo traktowanie ich oddzielnie rozbijało się o różnice na poziomie topologicznym (płaszczyzna rzutowa jest zupełna).

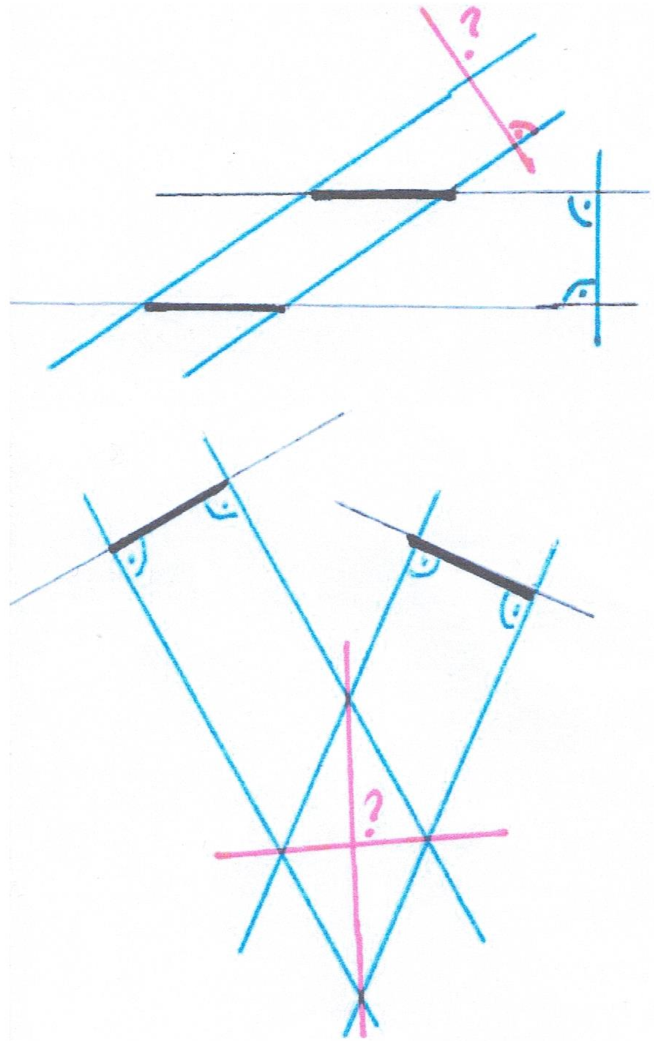
Problem uważano za ważny przez sto lat.

Naturalny pomysł, by rozszerzyć geometrie Euklidesa i Bolyaia-Łobaczewskiego na całą płaszczyznę rzutową, wydaje się jednak absurdalny, bo odległości w tych geometriach na ich brzegach przyjmują wartości nieskończone (a co dopiero dalej!).

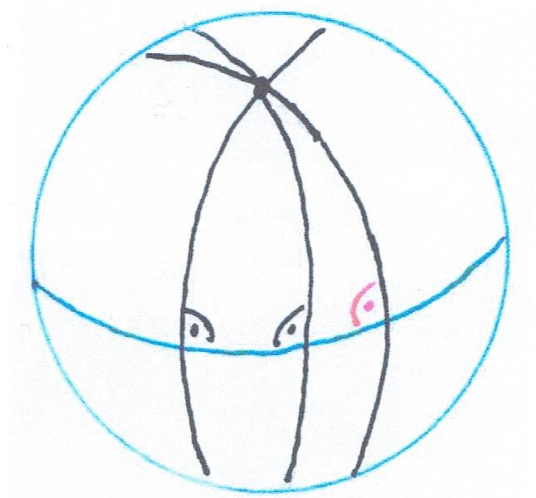
I tu popełniamy błąd:
metryki są w stosunku do geometrii zewnętrzne
– w geometrii problemy metryczne opisuje przystawanie odcinków.

A to daje się określić przez prostopadłość.

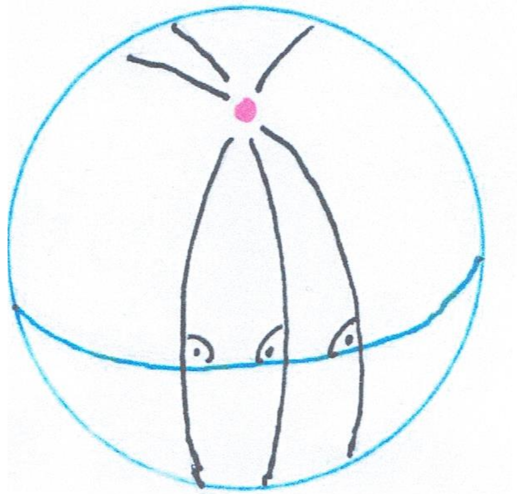
Na przykład w geometrii euklidesowej wygląda to tak.



Aby prostopadłość rozpatrywać
w każdym przypadku na całej
płaszczyźnie rzutowej
wystarczy posłużyć się dwiema jej
własnościami na sferze.



Poza obszarem klasycznych geometrii
pojawią wtedy nietypowe sytuacje:
w rozszerzonej geometrii euklidesowej
horyzont okaże się prostopadły
do wszystkich prostych (prosta osobliwa);
w rozszerzonej geometrii B-Ł
styczne do jej horyzontu będą
izotropowe, czyli styczne do siebie.



Dołączając do aksjomatyki geometrii rzutowej

- powyższe dwa warunki opisujące prostopadłość

i fakt, że

- przez dowolny punkt do dowolnej prostej można poprowadzić prostopadłą,

otrzymujemy aksjomatyczny opis wspólnej części wszystkich omawianych geometrii, rozpatrywanych na całej płaszczyźnie rzutowej.

Tak rozszerzone geometrie to *pełne geometrie* (*full geometries*).

Pozostaje kwestia aksjomatów wyróżniających poszczególne z nich, tak jak V postulat odróżniał w geometrii absolutnej geometrię Euklidesa od geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego.

Rolę tę pełnią dwa zdania:

R: *istnieje prostokąt*,
I: *istnieje prosta izotropowa nieosobliwa.*

Ich spełnianie\niespełnianie stwarza cztery możliwości, z których niezajętą pozycję zajmuje geometria Minkowskiego (zwana w fizyce czasoprzestrzenią).

Oczywiście, rozszerzenie geometrii do przestrzeni rzutowych, czyli rozważanie pełnych geometrii przeprowadza się w każdym wymiarze.
Otrzymujemy wtedy następującą klasyfikację pełnych geometrii.

	R	$\neg$**R**
I	Min^n	BL^n
$\neg$**I**	Eucl^n	Ell^n

Związek między pełnymi geometriami jest znacznie głębszy, niż pokazuje to tabelka. Aby go zobaczyć, trzeba rozważyć przestrzenie kierunków tych geometrii.

W dwuwymiarowym przypadku euklidesowym kierunki tworzą prostą (rzutową, oczywiście) – to niezbyt skomplikowana przestrzeń. Ale w wyższym wymiarze n jest to $n-1$-wymiarowa przestrzeń rzutowa i można myśleć o dziejącej się na niej geometrii.
Podobnie jest w przypadku geometrii Minkowskiego.

W dwuwymiarowym przypadku B-Ł kierunki tworzą okrąg, który w przypadku n-wymiarowym staje się $n-1$-wymiarową sferą.
I znów można zastanowić się nad obecną na niej geometrią.

Jedna tylko geometria eliptyczna kierunków nie ma.

Przyjrzyjmy się więc bliżej kierunkom (pełnych!) przestrzeni, czyli brzegom ich klasycznego obszaru.

Otóż pełne geometrie generują geometrię
o wymiarze niższym o jeden
na przestrzeni swoich kierunków w ten sposób, że

- przecięcia hiperpłaszczyzn z przestrzenią kierunków danej geometrii są (mającymi wymiar o jeden mniejszy) hiperpłaszczyznami w tej przestrzeni kierunków;
- dziedziczona jest przy tym prostopadłość.

Można bez większego kłopotu udowodnić, że
(przy takiej konwencji)
również geometria przestrzeni kierunków
wyznacza geometrię całej przestrzeni.

Prowadzi to do następującej sieci powiązań geometrii

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{Min}^n & \mathrm{Min}^5 & \mathrm{Min}^4 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\mathrm{BL}^{n-1} & \mathrm{BL}^4 & \mathrm{BL}^3 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\mathrm{M\ddot{o}}^{n-2} \sim \mathrm{Eucl}^{n-2} & \mathrm{M\ddot{o}}^3 \sim \mathrm{Eucl}^3 & \mathrm{M\ddot{o}}^2 \sim \mathrm{Eucl}^2 \\
\qquad\qquad\quad \updownarrow & \qquad\qquad\quad \updownarrow & \qquad\qquad\quad \updownarrow
\end{array}
$$

$$
\ldots\ldots \longleftrightarrow \mathrm{Ell}^{n-3} \longleftrightarrow \ldots\ldots\ldots \longleftrightarrow \mathrm{Ell}^2 \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathrm{Ell}^1
$$

co wskazuje, że każda z czterech fundamentanych geometrii niesie w sobie wszystkie pozostałe (a nawet, jak to robi).

Co więcej, schemat pokazuje, że w naturalny sposób z każdej wyróżnionej w nim geometrii można uzyskać dowolną z pozostałych.

Nie sposób więc obronić się przed refleksją, że *twórcy każdej z nich w istocie chcieli opisać jedną i tę samą wizję przestrzeni, choć przed oczyma jawiła się im ona w odmiennej postaci.*

Może więc Kant miał rację, krytykując czysty umysł?

Ilustrację relacji Min^4 z BL^3 w realu, czyli w fizyce, spotkałem w zjawisku znanym jako *Landau–Pomeranchuk effect*.

Polega ono – mówiąc w ogromnym uproszczeniu
i z nonszalancją laika – na tym, że
następujące w minimalnych odstępach czasu rozpraszanie
dwukrotne tej samej wiązki elektronów
przebiega inaczej za pierwszym niż za drugim razem.

Efekt ten jest przez niektórych nazywany też paradoksem.

Nadaje mu się wtedy fabularną interpretacje w stylu:
pędzący w szalonym tempie na motorze elektron trafia w betonowy słupek; kiedy podnosi się po kolizji i rusza dalej, bardziej uważa, przez co jego zderzenie ze złośliwie podstawionym przez fizyka kolejnym betonowym słupkiem jest już mniej energiczne.

Jak przystało matematykowi,
zainteresowałem się sprawą ze względu na jej paradoksalność.

Okazało się, iż sprawę można wyjaśnić
posługując się pojęciem *half-dressed electrons*,
co zapewne oznacza *elektrony w negliżu*.

W mocno dla niefizyka skomplikowanej pracy

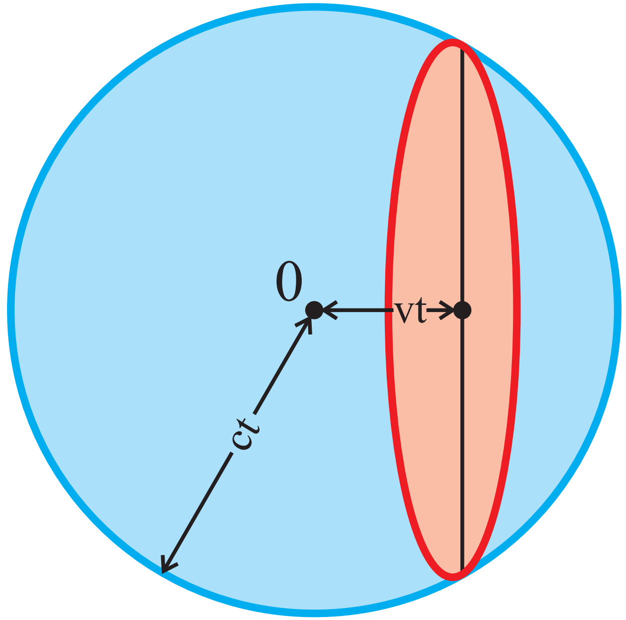
E.L. Feinberg, *Hadron clusters and half-dressed particles in quantum field theory*; Usp. Fiz. Nauk **132**, 255–291; Oct. 1980

znalazłem wyjaśnienie efektu Landaua–Pomeranczuka
za pomocą zwrócenia uwagi na to, iż w momencie rozproszenia
następuje zakłócenie pola, jakie jest (wedle de Broglie)
jednym z przejawów elektronu.

Pole sprzed zderzenia – rozciągające się przecież (oczywiście, mało intensywnie) na “całą” przestrzeń porusza się bezpośrednio po zderzeniu nic o nim nie wiedząc, bo przecież informacje rozchodzą się zaledwie z prędkością światła.

Tymczasem elektron, któremu w wyniku kolizji zmienił się pęd, odtwarza swoje pole najszybciej jak umie, ale to też dzieje się tylko z prędkością światła, więc w chwilę po rozproszeniu dysponuje on tylko malutkim polem, czego skutkiem jest mniej energetyczny przebieg kolejnego rozproszenia.

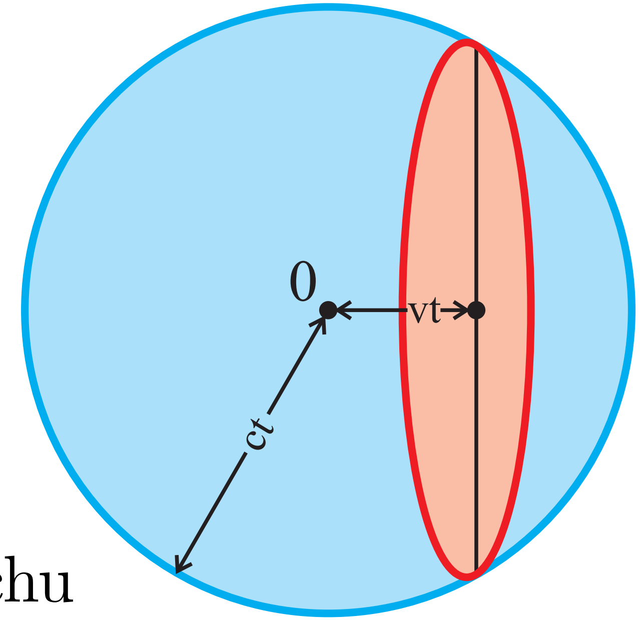
Gdy to narysować
powstaje przestrzenne sprawozdanie
z tego, co dzieje się w czasoprzestrzeni.
Obrazek jest (powinien być)
trójwymiarowy, więc z konieczności
rysuję dwuwymiarowy przekrój.
Rozproszenie nastąpiło w punkcie O.



Wie o nim po czasie t tylko wnętrze kuli (na obrazku koła)
o promieniu ct, gdzie c to prędkość światła
– nazwijmy wnętrze tej kuli wszechświatem zdarzenia.

Sam elektron poruszający się prędkością v oddalił się od O
na odległość vt. Jego pole w kierunku prostopadłym do v
sięga do granicy wszechświata. W kierunku ruchu podlega
skróceniu Lorentza – jest zatem takie, jak narysowana elipsa.
Tym, którzy się dziwią, że “z przodu” jest jej mniej niż “z tyłu”,
przypominam o efekcie Dopplera.

Natomiast jeśli spojrzymy na to
jak na rysunek modelu Kleina,
to zobaczymy, że owo pole
to wnętrze ekwidystanty,
a więc krzywej złożonej
z punktów jednakowo oddalonych
od prostej prostopadłej do kierunku ruchu



(w przestrzeni jest to elipsoida obrotowa
styczna do brzegu modelu).

Choć niczego o powstającym rysunku nie zakładaliśmy
"sam" narysował się w przestrzeni kierunków czasoprzestrzeni.