

**Dwie opowieści o tym jak  
kombinatoryka enumeratywna  
doprowadziła do znalezienia  
niespodziewanych związków w  
matematyce**

Maciej Dołęga, IM PAN

# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  
 $a_n = n!$

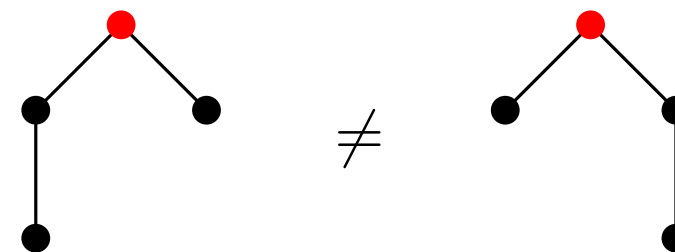
# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  
 $a_n = n!$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,  
 $a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$



# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  
 $a_n = n!$
- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,  
 $a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$
- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,  
 $a_n = n^{n-2}$

# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  
 $a_n = n!$
- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,  
 $a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$
- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,  
 $a_n = n^{n-2}$

**Ciekawe  
statystyki na  $\mathcal{A}_n$   
- wzmocnienie!**

# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$a_n = n!$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{A}_n : \sigma \text{ ma } k \text{ inwersji}\} \quad \sigma = 3415276, \sigma \in \mathcal{A}_{7,6}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,

$$a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,

$$a_n = n^{n-2}$$

# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$a_n = n!$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{A}_n : \sigma \text{ ma } k \text{ inwersji}\} \quad \sigma = 3415276, \sigma \in \mathcal{A}_{7,6}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,

$$a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,

$$a_n = n^{n-2}$$



# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$a_n = n!$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{A}_n : \sigma \text{ ma } k \text{ inwersji}\} \quad \sigma = 3415276, \sigma \in \mathcal{A}_{7,6}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,

$$a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,

$$a_n = n^{n-2}$$

# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$a_n = n!$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{A}_n : \sigma \text{ ma } k \text{ inwersji}\} \quad \sigma = 3415276, \sigma \in \mathcal{A}_{7,6}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,

$$a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,

$$a_n = n^{n-2}$$

# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$a_n = n!$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{A}_n : \sigma \text{ ma } k \text{ inwersji}\} \quad \sigma = 3415276, \sigma \in \mathcal{A}_{7,6}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,

$$a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,

$$a_n = n^{n-2}$$

# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$a_n = n!$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{A}_n : \sigma \text{ ma } k \text{ inwersji}\} \quad \sigma = 341\mathbf{5}276, \sigma \in \mathcal{A}_{7,6}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,

$$a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,

$$a_n = n^{n-2}$$

# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$a_n = n!$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{A}_n : \sigma \text{ ma } k \text{ inwersji}\} \quad \sigma = 3415276, \sigma \in \mathcal{A}_{7,6}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,

$$a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,

$$a_n = n^{n-2}$$

# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$a_n = n!$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{A}_n : \sigma \text{ ma } k \text{ inwersji}\}$$

$$a_{n,k} = [q^k] \{n\}!_q, \text{ gdzie } \{n\}!_q := \{1\}_q \{2\}_q \cdots \{n\}_q \text{ i } \{n\}_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,

$$a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,

$$a_n = n^{n-2}$$

# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$a_n = n!$$

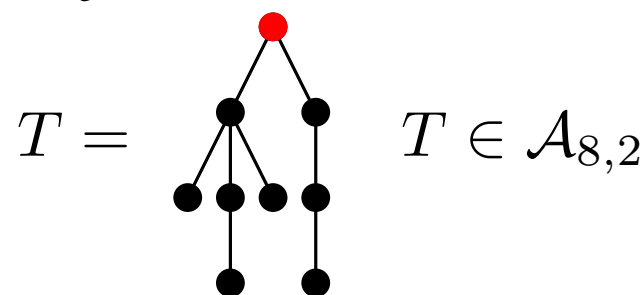
$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{A}_n : \sigma \text{ ma } k \text{ inwersji}\}$$

$$a_{n,k} = [q^k] \{n\}!_q, \text{ gdzie } \{n\}!_q := \{1\}_q \{2\}_q \cdots \{n\}_q \text{ i } \{n\}_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,

$$a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{T \in \mathcal{A}_n : \deg(v_{\text{root}}) = k\}$$



- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,

$$a_n = n^{n-2}$$

# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$a_n = n!$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{A}_n : \sigma \text{ ma } k \text{ inwersji}\}$$

$$a_{n,k} = [q^k] \{n\}!_q, \text{ gdzie } \{n\}!_q := \{1\}_q \{2\}_q \cdots \{n\}_q \text{ i } \{n\}_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,

$$a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{T \in \mathcal{A}_n : \deg(v_{\text{root}}) = k\}$$

$$a_{n,k} = \frac{k}{2n-k} \binom{2n-k}{n-k}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,

$$a_n = n^{n-2}$$



# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$a_n = n!$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{A}_n : \sigma \text{ ma } k \text{ inwersji}\}$$

$$a_{n,k} = [q^k] \{n\}!_q, \text{ gdzie } \{n\}!_q := \{1\}_q \{2\}_q \cdots \{n\}_q \text{ i } \{n\}_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,

$$a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

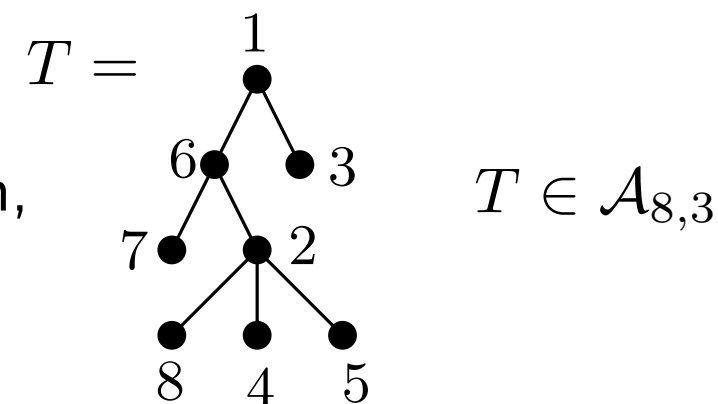
$$\mathcal{A}_{n,k} = \{T \in \mathcal{A}_n : \deg(v_{\text{root}}) = k\}$$

$$a_{n,k} = \frac{k}{2n-k} \binom{2n-k}{n-k}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,

$$a_n = n^{n-2}$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{T \in \mathcal{A}_n : T \text{ ma } k \text{ inwersji}\}$$



# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$a_n = n!$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{A}_n : \sigma \text{ ma } k \text{ inwersji}\}$$

$$a_{n,k} = [q^k] \{n\}!_q, \text{ gdzie } \{n\}!_q := \{1\}_q \{2\}_q \cdots \{n\}_q \text{ i } \{n\}_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,

$$a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

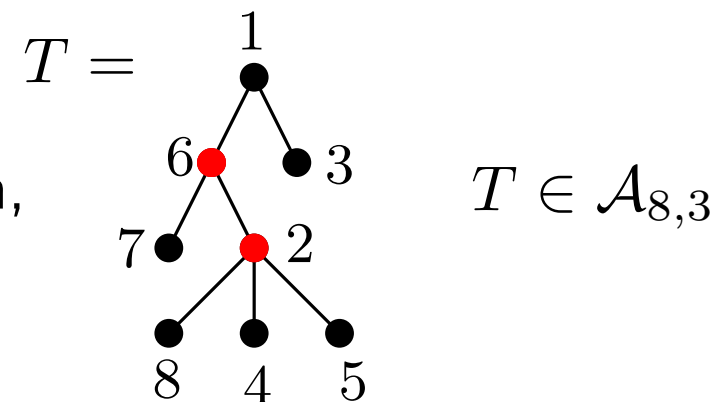
$$\mathcal{A}_{n,k} = \{T \in \mathcal{A}_n : \deg(v_{\text{root}}) = k\}$$

$$a_{n,k} = \frac{k}{2n-k} \binom{2n-k}{n-k}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,

$$a_n = n^{n-2}$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{T \in \mathcal{A}_n : T \text{ ma } k \text{ inwersji}\}$$



# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$a_n = n!$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{A}_n : \sigma \text{ ma } k \text{ inwersji}\}$$

$$a_{n,k} = [q^k] \{n\}!_q, \text{ gdzie } \{n\}!_q := \{1\}_q \{2\}_q \cdots \{n\}_q \text{ i } \{n\}_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,

$$a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

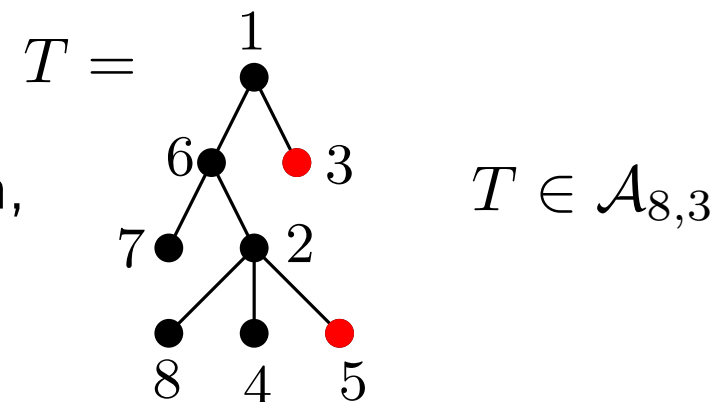
$$\mathcal{A}_{n,k} = \{T \in \mathcal{A}_n : \deg(v_{\text{root}}) = k\}$$

$$a_{n,k} = \frac{k}{2n-k} \binom{2n-k}{n-k}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,

$$a_n = n^{n-2}$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{T \in \mathcal{A}_n : T \text{ ma } k \text{ inwersji}\}$$



# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$a_n = n!$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{A}_n : \sigma \text{ ma } k \text{ inwersji}\}$$

$$a_{n,k} = [q^k] \{n\}!_q, \text{ gdzie } \{n\}!_q := \{1\}_q \{2\}_q \cdots \{n\}_q \text{ i } \{n\}_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,

$$a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

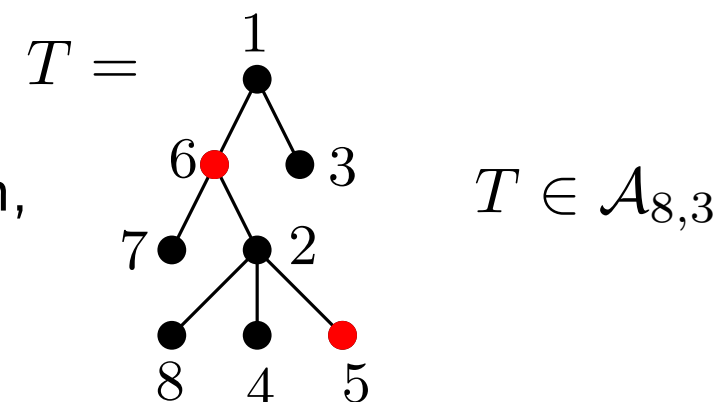
$$\mathcal{A}_{n,k} = \{T \in \mathcal{A}_n : \deg(v_{\text{root}}) = k\}$$

$$a_{n,k} = \frac{k}{2n-k} \binom{2n-k}{n-k}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,

$$a_n = n^{n-2}$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{T \in \mathcal{A}_n : T \text{ ma } k \text{ inwersji}\}$$



# Kombinatoryka enumeratywna cz. I

**Pytanie:** Niech  $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie kolekcją skończonych zbiorów pewnych interesujących (kombinatorycznie) obiektów. Co możemy powiedzieć o liczbie  $a_n := |\mathcal{A}_n|$ ?

## Przykłady:

- $\mathcal{A}_n$  — grupa permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$a_n = n!$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{A}_n : \sigma \text{ ma } k \text{ inwersji}\}$$

$$a_{n,k} = [q^k] \{n\}!_q, \text{ gdzie } \{n\}!_q := \{1\}_q \{2\}_q \cdots \{n\}_q \text{ i } \{n\}_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór drzew ukorzenionych o  $n$  krawędziach,

$$a_n = \text{Catalan}(n) := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{T \in \mathcal{A}_n : \deg(v_{\text{root}}) = k\}$$

$$a_{n,k} = \frac{k}{2n-k} \binom{2n-k}{n-k}$$

- $\mathcal{A}_n$  — zbiór poetykietowanych drzew o  $n$  wierzchołkach,

$$a_n = n^{n-2}$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{T \in \mathcal{A}_n : T \text{ ma } k \text{ inwersji}\}$$

nie znamy zwartej formuły na  $a_{n,k}$ , ale znamy jej funkcję tworzącą!

# Kombinatoryka enumeratywna cz. II

**Pomysł:** Zamiast liczyć obiekty zrozum ich funkcję tworzącą!

# Kombinatoryka enumeratywna cz. II

**Pomysł:** Zamiast liczyć obiekty zrozum ich funkcję tworzącą!

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{A}_n,$$

$$f_{\mathcal{A}}(t) := \sum_{n \geq 0} \sum_{a \in \mathcal{A}_n} t^n = \sum_{n \geq 0} a_n t^n.$$

# Kombinatoryka enumeratywna cz. II

**Pomysł:** Zamiast liczyć obiekty zrozum ich funkcję tworzącą!

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{A}_n,$$

$$f_{\mathcal{A}}(t) := \sum_{n \geq 0} \sum_{a \in \mathcal{A}_n} t^n = \sum_{n \geq 0} a_n t^n.$$

Wzmocnienie:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n_1, n_2, \dots, n_l \geq 0} \mathcal{A}_{n_1, \dots, n_l},$$

$$f_{\mathcal{A}}(t_1, \dots, t_l) := \sum_{n_1, \dots, n_l \geq 0} \sum_{a \in \mathcal{A}_{n_1, \dots, n_l}} t_1^{n_1} \cdots t_l^{n_l}.$$



# Kombinatoryka enumeratywna cz. II

**Pomysł:** Zamiast liczyć obiekty zrozum ich funkcję tworzącą!

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{A}_n,$$

$$f_{\mathcal{A}}(t) := \sum_{n \geq 0} \sum_{a \in \mathcal{A}_n} t^n = \sum_{n \geq 0} a_n t^n.$$

Wzmocnienie:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n_1, n_2, \dots, n_l \geq 0} \mathcal{A}_{n_1, \dots, n_l},$$

$$f_{\mathcal{A}}(t_1, \dots, t_l) := \sum_{n_1, \dots, n_l \geq 0} \sum_{a \in \mathcal{A}_{n_1, \dots, n_l}} t_1^{n_1} \cdots t_l^{n_l}.$$

**Przykłady:**

- $\mathcal{A}$  — zbiór permutacji liczonych względem rozmiaru i liczby inwersji,

$$f_{\mathcal{A}}(t, q) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{(q-1)^n} \prod_{i=1}^n (q^i - 1)$$

- $\mathcal{A}$  — zbiór drzew ukorzenionych liczonych ze względu na liczbę krawędzi i stopień korzenia,

$$f_{\mathcal{A}}(t, q) = \frac{2}{2 - qt - \sqrt{t^2 - 4t^3}}$$

- $\mathcal{A}$  — zbiór poetykietowanych drzew liczonych ze względu na liczbę wierzchołków i liczbę inwersji,

$$\exp\left(\sum_{n \geq 1, k \geq 0} a_{n,k} \frac{t^n \cdot q^k \cdot (q-1)^n}{n!}\right) = \sum_{n \geq 0} q^{\binom{n}{2}} \frac{t^n}{n!}$$

O tym jak kombinatoryka  
enumeratywna pomogła  
rozwiązać problem Ulama (i  
znacznie więcej)

# Problem Ulama

$\sigma_n$  - ciąg liczb naturalnych długości  $n$ .

**Przykład:**  $\sigma_8 = 8, 1, 3, 20, 2, 11, 5, 10$ .

Najdłuższe podciągi rosnące:

8, 1, 3, 20, 2, 11, 5, 10

# Problem Ulama

$\sigma_n$  - ciąg liczb naturalnych długości  $n$ .

**Przykład:**  $\sigma_8 = 8, 1, 3, 20, 2, 11, 5, 10$ .

Najdłuższe podciągi rosnące:

8, **1**, **3**, 20, 2, 11, **5**, **10**

# Problem Ulama

$\sigma_n$  - ciąg liczb naturalnych długości  $n$ .

**Przykład:**  $\sigma_8 = 8, 1, 3, 20, 2, 11, 5, 10$ .

Najdłuższe podciągi rosnące:

8, **1**, 3, 20, **2**, 11, **5**, **10**

# Problem Ulama

$\sigma_n$  - ciąg liczb naturalnych długości  $n$ .

**Przykład:**  $\sigma_8 = 8, 1, 3, 20, 2, 11, 5, 10$ .

Najdłuższe podciągi rosnące:

8, **1**, 3, 20, **2**, 11, **5**, **10**

$\ell(\sigma)$  - długość najdłuższego podciągu rosnącego w  $\sigma$

**Pytanie [Ulam '61]:** Niech  $\sigma_n \in S_n$  będzie losową permutacją (miara jednostajna). Jak zachowuje się zmienna losowa  $\ell(\sigma_n)$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ ?

# Problem Ulama

$\sigma_n$  - ciąg liczb naturalnych długości  $n$ .

**Przykład:**  $\sigma_8 = 8, 1, 3, 20, 2, 11, 5, 10$ .

Najdłuższe podciągi rosnące:

8, **1**, 3, 20, **2**, 11, **5**, **10**

$\ell(\sigma)$  - długość najdłuższego podciągu rosnącego w  $\sigma$

**Pytanie [Ulam '61]:** Niech  $\sigma_n \in S_n$  będzie losową permutacją (miara jednostajna). Jak zachowuje się zmienna losowa  $\ell(\sigma_n)$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ ?

**Hipoteza Ulama:** Istnieje stała  $c$  taka, że  $\frac{\ell(\sigma_n)}{\sqrt{n}} \rightarrow c$  według prawdopodobieństwa, gdy  $n \rightarrow \infty$ .

# Diagramy i tableaux Younga - mistyczna tożsamość...

**Definicja:** Partycja  $\lambda$  liczby naturalnej  $n$  to skończony, nierosnący ciąg liczb naturalnych  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$  taki, że  $\sum_i \lambda_i = n$  (ozn.  $|\lambda| = n$ ).

**Przykład:**  $\lambda = (7, 5, 3, 3, 1)$ ,  $|\lambda| = 19$ ,  $\ell(\lambda) = 5$ .

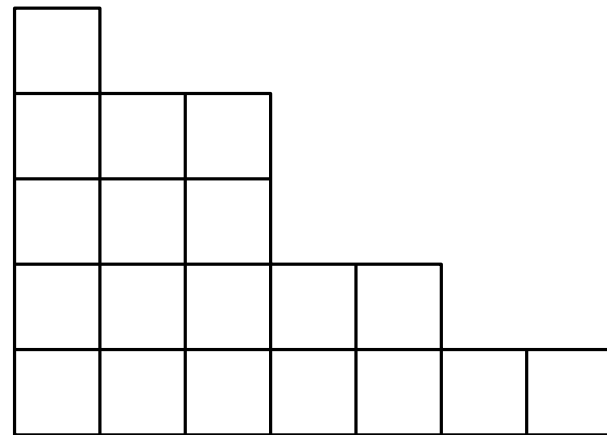


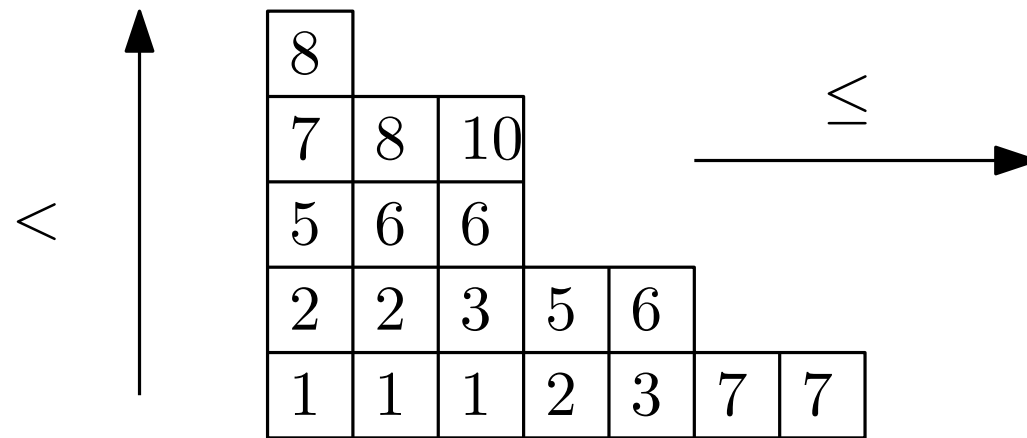
Diagram Younga  $\lambda$



# Diagramy i tableaux Younga - mistyczna tożsamość...

**Definicja:** Partycja  $\lambda$  liczby naturalnej  $n$  to skończony, nierosnący ciąg liczb naturalnych  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$  taki, że  $\sum_i \lambda_i = n$  (ozn.  $|\lambda| = n$ ).

**Przykład:**  $\lambda = (7, 5, 3, 3, 1)$ ,  $|\lambda| = 19$ ,  $\ell(\lambda) = 5$ .

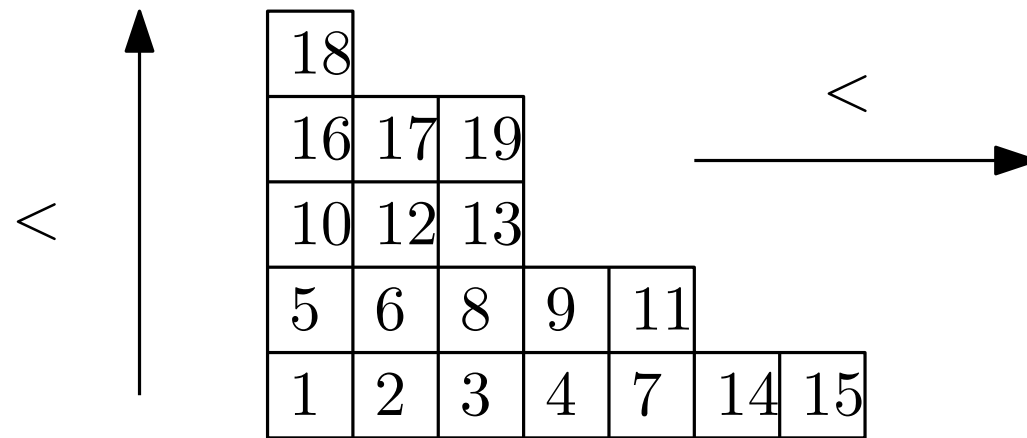


Półstandardowe tableaux Younga  $T \in SSYT(\lambda)$

# Diagramy i tableaux Younga - mistyczna tożsamość...

**Definicja:** Partycja  $\lambda$  liczby naturalnej  $n$  to skończony, nierosnący ciąg liczb naturalnych  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$  taki, że  $\sum_i \lambda_i = n$  (ozn.  $|\lambda| = n$ ).

**Przykład:**  $\lambda = (7, 5, 3, 3, 1)$ ,  $|\lambda| = 19$ ,  $\ell(\lambda) = 5$ .



Standardowe tableau Younga  $T \in SYT(\lambda)$

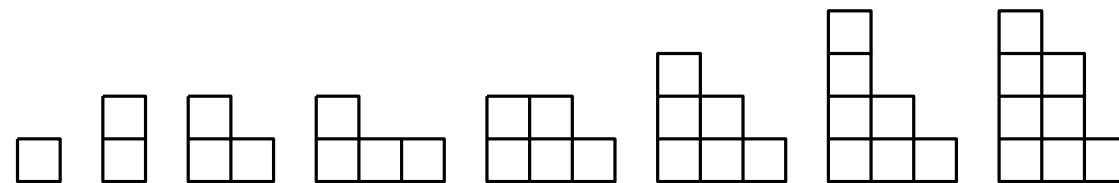
# Diagramy i tableaux Younga - mistyczna tożsamość...

**Definicja:** Partycja  $\lambda$  liczby naturalnej  $n$  to skończony, nierosnący ciąg liczb naturalnych  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$  taki, że  $\sum_i \lambda_i = n$  (ozn.  $|\lambda| = n$ ).

**Przykład:**  $\lambda = (7, 5, 3, 3, 1)$ ,  $|\lambda| = 19$ ,  $\ell(\lambda) = 5$ .

**Uwaga** Standardowe tableau Younga rozmiaru  $n \leftrightarrow$  ciąg diagramów Younga  $\lambda^1 \subset \lambda^2 \subset \dots \subset \lambda^n$  tżę  $|\lambda^i| = i$ .

**Przykład:**



7		
6	8	
2	5	
1	3	4

# Diagramy i tableaux Younga - mistyczna tożsamość...

**Definicja:** Partycja  $\lambda$  liczby naturalnej  $n$  to skończony, nierosnący ciąg liczb naturalnych  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$  taki, że  $\sum_i \lambda_i = n$  (ozn.  $|\lambda| = n$ ).

**Przykład:**  $\lambda = (7, 5, 3, 3, 1)$ ,  $|\lambda| = 19$ ,  $\ell(\lambda) = 5$ .

**Mistyczna tożsamość:** (konsekwencja teorii reprezentacji grup permutacji)

$$\sum_{\lambda \vdash n} |SYT(\lambda)|^2 = n!$$

**Pytanie:** Czy istnieje naturalna bijekcja:

$$F: S_n \rightarrow \bigcup_{|\lambda|=n} SYT(\lambda) \times SYT(\lambda).$$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41)$$

74	99		
23	53	70	
16	37	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$

74	99		
23	53	70	
16	37	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

74	99			
23	53	70		
16	37	41	82	

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9			
4	6	7		
1	2	3	5	

recording tableau  $Q(w)$



# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

74	99			
23	53	70		
16	37	41	82	

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9			
4	6	7		
1	2	3	5	

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, \mathbf{17})$$

74	99			
23	53	70		
16	37	41	82	

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

74	99			
23	53	70		
16		41	82	

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9			
4	6	7		
1	2	3	5	

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

74	99			
23	53	70		
16	17	41	82	

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9			
4	6	7		
1	2	3	5	

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

74	99		
23	53	70	
16	17	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

74	99		
23	53	70	
16	17	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

74	99		
23	53	70	
16	17	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

74	99		
23	37	70	
16	17	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$



# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

74	99		
23	37	70	
16	17	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

74	99		
23	37	70	
16	17	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

74	99		
23	37	70	
16	17	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

	99		
23	37	70	
16	17	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

53	99		
23	37	70	
16	17	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

53	99		
23	37	70	
16	17	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

53	99		
23	37	70	
16	17	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

74			
53	99		
23	37	70	
16	17	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$



# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

74			
53	99		
23	37	70	
16	17	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

10			
8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

← nowa klatka

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

74			
53	99		
23	37	70	
16	17	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

10			
8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$

# Algorytm RSK

## Wejście

- słowo  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$

## Przykład:

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 17)$$

74			
53	99		
23	37	70	
16	17	41	82

insertion tableau  $P(w)$

## Wyjście:

- półstandardowe tableau  $P \in SSYT(\lambda)$
- standardowe tableau  $Q \in SYT(\lambda)$   
gdzie  $\lambda \vdash n$  jest diagramem Younga o  $n$  klatkach

10			
8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau  $Q(w)$

## Twierdzenie: [Robinson–Schensted–Knuth '38 + '61+'70]

- RSK:  $\mathbb{N}_+^n \rightarrow \bigcup_{|\lambda|=n} SSYT(\lambda) \times SYT(\lambda)$  jest bijekcją
- $\ell(\sigma) = \lambda_1$  dla permutacji  $\sigma$ .

# Nowe spojrzenie na problem Ulama

## Wniosek:


Rozkład zmiennej losowej  $\ell(\sigma_n)$ ,  
gdzie  $\sigma_n \in S_n$



Rozkład zmiennej losowej  $\lambda_1$  gdzie  $\lambda$   
jest diagramem Younga wylosowanym  
z prawdopodobieństwem  
proporcjonalnym do  $|SYT(\lambda)|^2$ .

# Nowe spojrzenie na problem Ulama

## Wniosek:

Rozkład zmiennej losowej  $\ell(\sigma_n)$ ,  gdzie  $\sigma_n \in S_n$

**Pytanie:** Jak policzyć liczbę  $|SYT(\lambda)|$ ?

Rozkład zmiennej losowej  $\lambda_1$  gdzie  $\lambda$  jest diagramem Younga wylosowanym z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do  $|SYT(\lambda)|^2$ .

miara Plancherela

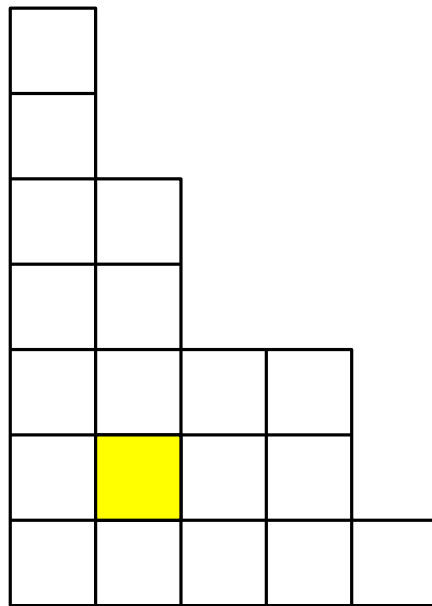
# Nowe spojrzenie na problem Ulama

## Wniosek:

Rozkład zmiennej losowej  $\ell(\sigma_n)$ ,  
gdzie  $\sigma_n \in S_n$



Rozkład zmiennej losowej  $\lambda_1$  gdzie  $\lambda$   
jest diagramem Younga wylosowanym  
z prawdopodobieństwem  
proporcjonalnym do  $|SYT(\lambda)|^2$ .



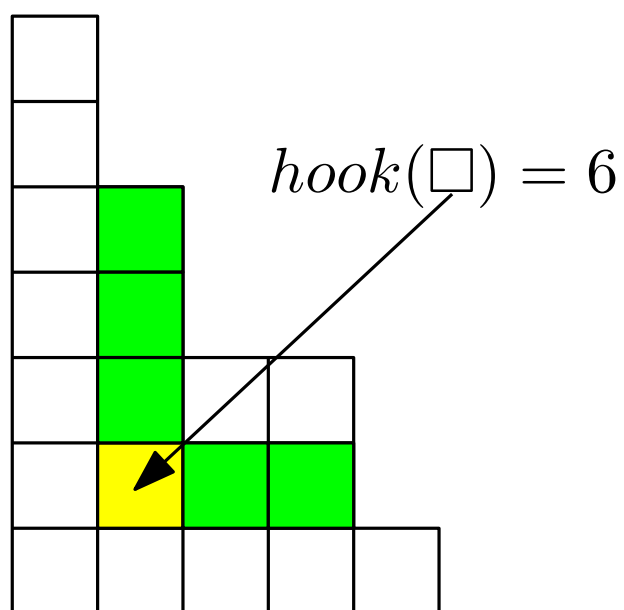
# Nowe spojrzenie na problem Ulama

## Wniosek:

Rozkład zmiennej losowej  $\ell(\sigma_n)$ ,  
gdzie  $\sigma_n \in S_n$



Rozkład zmiennej losowej  $\lambda_1$  gdzie  $\lambda$   
jest diagramem Younga wylosowanym  
z prawdopodobieństwem  
proporcjonalnym do  $|SYT(\lambda)|^2$ .



# Nowe spojrzenie na problem Ulama

## Wniosek:

Rozkład zmiennej losowej  $\ell(\sigma_n)$ ,  
gdzie  $\sigma_n \in S_n$



Rozkład zmiennej losowej  $\lambda_1$  gdzie  $\lambda$   
jest diagramem Younga wylosowanym  
z prawdopodobieństwem  
proporcjonalnym do  $|SYT(\lambda)|^2$ .

## Twierdzenie [Frame–Robinson–Thrall '53]:

$$|SYT(\lambda)| = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} hook(\square)}.$$



# Nowe spojrzenie na problem Ulama

## Wniosek:

Rozkład zmiennej losowej  $\ell(\sigma_n)$ ,  
gdzie  $\sigma_n \in S_n$

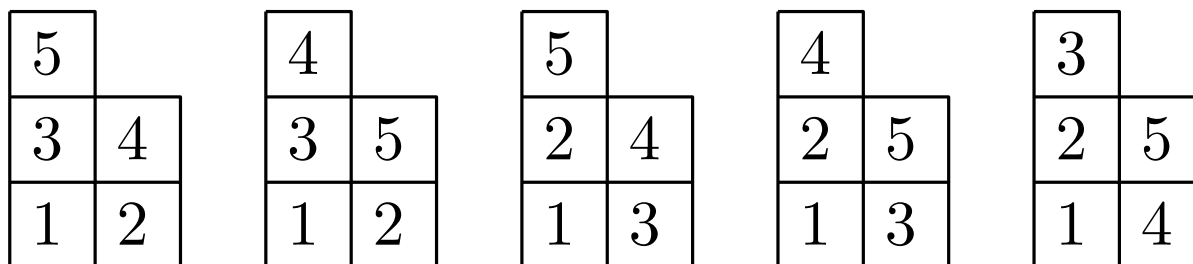


Rozkład zmiennej losowej  $\lambda_1$  gdzie  $\lambda$   
jest diagramem Younga wylosowanym  
z prawdopodobieństwem  
proporcjonalnym do  $|SYT(\lambda)|^2$ .

## Twierdzenie [Frame–Robinson–Thrall '53]:

$$|SYT(\lambda)| = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} hook(\square)}.$$

## Przykład:



# Nowe spojrzenie na problem Ulama

## Wniosek:

Rozkład zmiennej losowej  $\ell(\sigma_n)$ ,  
gdzie  $\sigma_n \in S_n$

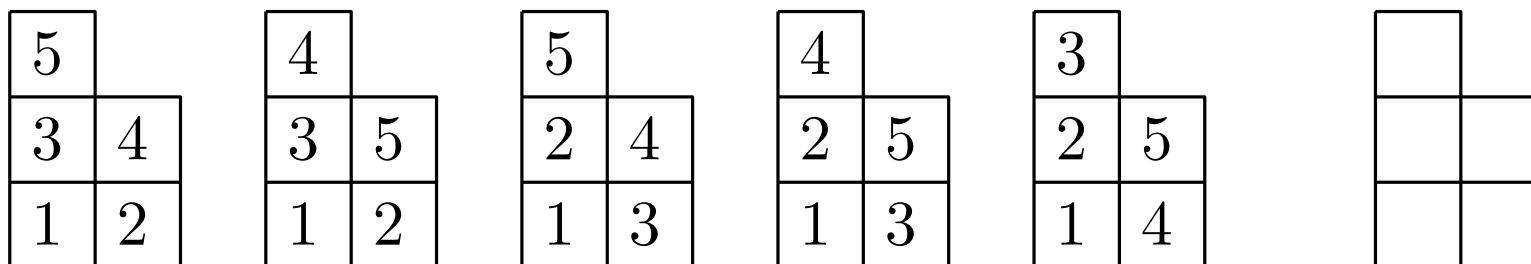


Rozkład zmiennej losowej  $\lambda_1$  gdzie  $\lambda$   
jest diagramem Younga wylosowanym  
z prawdopodobieństwem  
proporcjonalnym do  $|SYT(\lambda)|^2$ .

## Twierdzenie [Frame–Robinson–Thrall '53]:

$$|SYT(\lambda)| = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} hook(\square)}.$$

## Przykład:



# Nowe spojrzenie na problem Ulama

## Wniosek:

Rozkład zmiennej losowej  $\ell(\sigma_n)$ ,  
gdzie  $\sigma_n \in S_n$

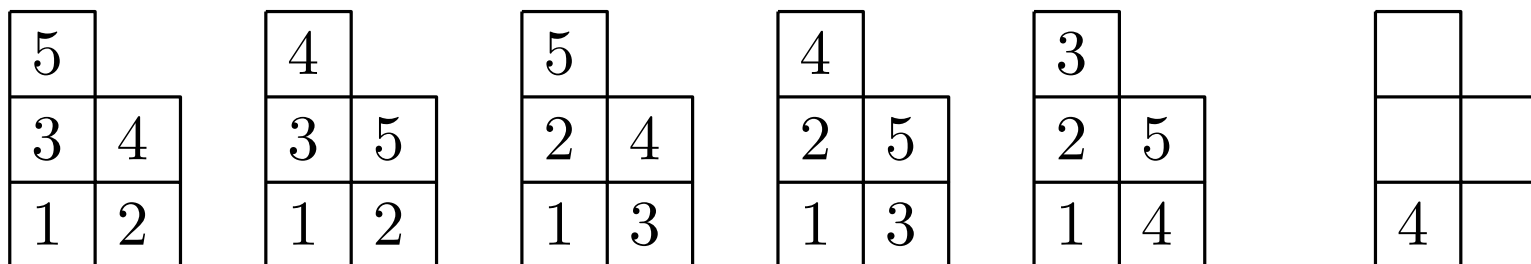


Rozkład zmiennej losowej  $\lambda_1$  gdzie  $\lambda$   
jest diagramem Younga wylosowanym  
z prawdopodobieństwem  
proporcjonalnym do  $|SYT(\lambda)|^2$ .

## Twierdzenie [Frame–Robinson–Thrall '53]:

$$|SYT(\lambda)| = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} hook(\square)}.$$

## Przykład:



# Nowe spojrzenie na problem Ulama

## Wniosek:

Rozkład zmiennej losowej  $\ell(\sigma_n)$ ,  
gdzie  $\sigma_n \in S_n$



Rozkład zmiennej losowej  $\lambda_1$  gdzie  $\lambda$   
jest diagramem Younga wylosowanym  
z prawdopodobieństwem  
proporcjonalnym do  $|SYT(\lambda)|^2$ .

## Twierdzenie [Frame–Robinson–Thrall '53]:

$$|SYT(\lambda)| = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} hook(\square)}.$$

## Przykład:

5	
3	4
1	2

4	
3	5
1	2

5	
2	4
1	3

4	
2	5
1	3

3	
2	5
1	4

4	2

# Nowe spojrzenie na problem Ulama

## Wniosek:

Rozkład zmiennej losowej  $\ell(\sigma_n)$ ,  
gdzie  $\sigma_n \in S_n$

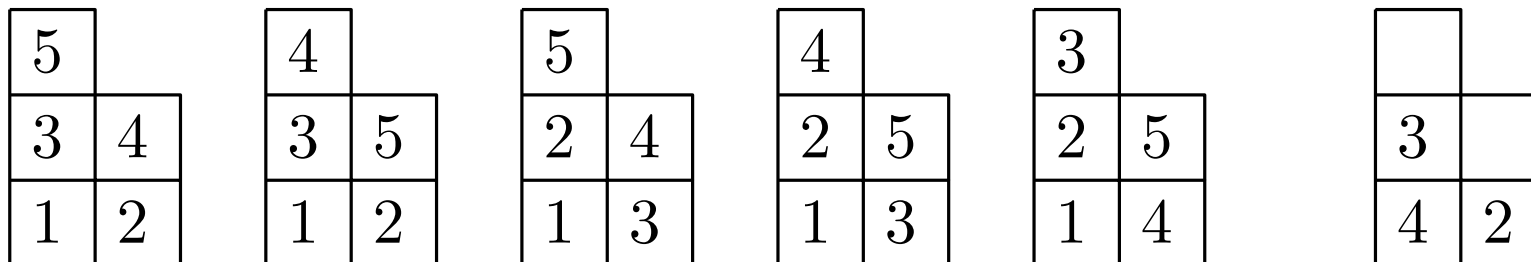


Rozkład zmiennej losowej  $\lambda_1$  gdzie  $\lambda$   
jest diagramem Younga wylosowanym  
z prawdopodobieństwem  
proporcjonalnym do  $|SYT(\lambda)|^2$ .

## Twierdzenie [Frame–Robinson–Thrall '53]:

$$|SYT(\lambda)| = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} hook(\square)}.$$

## Przykład:



# Nowe spojrzenie na problem Ulama

## Wniosek:

Rozkład zmiennej losowej  $\ell(\sigma_n)$ ,  
gdzie  $\sigma_n \in S_n$



Rozkład zmiennej losowej  $\lambda_1$  gdzie  $\lambda$   
jest diagramem Younga wylosowanym  
z prawdopodobieństwem  
proporcjonalnym do  $|SYT(\lambda)|^2$ .

## Twierdzenie [Frame–Robinson–Thrall '53]:

$$|SYT(\lambda)| = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} hook(\square)}.$$

## Przykład:

5	
3	4
1	2

4	
3	5
1	2

5	
2	4
1	3

4	
2	5
1	3

3	
2	5
1	4

1	
3	
4	2

# Nowe spojrzenie na problem Ulama

## Wniosek:

Rozkład zmiennej losowej  $\ell(\sigma_n)$ ,  
gdzie  $\sigma_n \in S_n$



Rozkład zmiennej losowej  $\lambda_1$  gdzie  $\lambda$   
jest diagramem Younga wylosowanym  
z prawdopodobieństwem  
proporcjonalnym do  $|SYT(\lambda)|^2$ .

## Twierdzenie [Frame–Robinson–Thrall '53]:

$$|SYT(\lambda)| = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} hook(\square)}.$$

## Przykład:

5	
3	4
1	2

4	
3	5
1	2

5	
2	4
1	3

4	
2	5
1	3

3	
2	5
1	4

1	
3	1
4	2

# Nowe spojrzenie na problem Ulama

## Wniosek:

Rozkład zmiennej losowej  $\ell(\sigma_n)$ ,  
gdzie  $\sigma_n \in S_n$

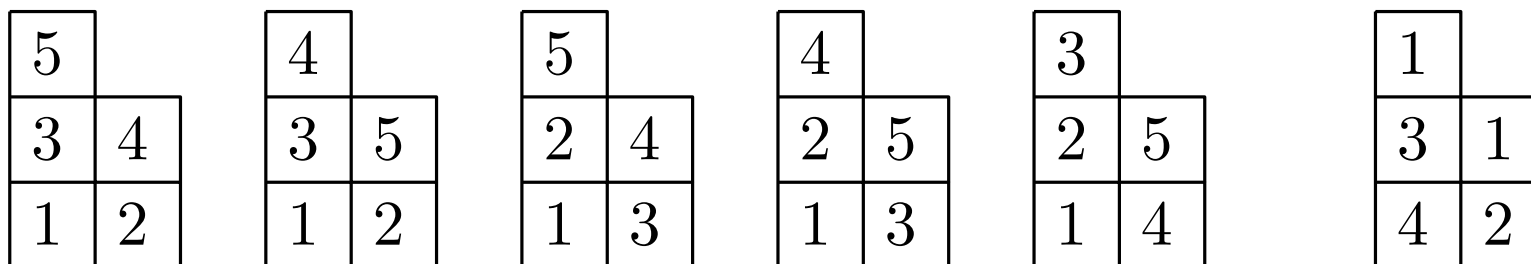


Rozkład zmiennej losowej  $\lambda_1$  gdzie  $\lambda$  jest diagramem Younga wylosowanym z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do  $|SYT(\lambda)|^2$ .

## Twierdzenie [Frame–Robinson–Thrall '53]:

$$|SYT(\lambda)| = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} hook(\square)}.$$

## Przykład:



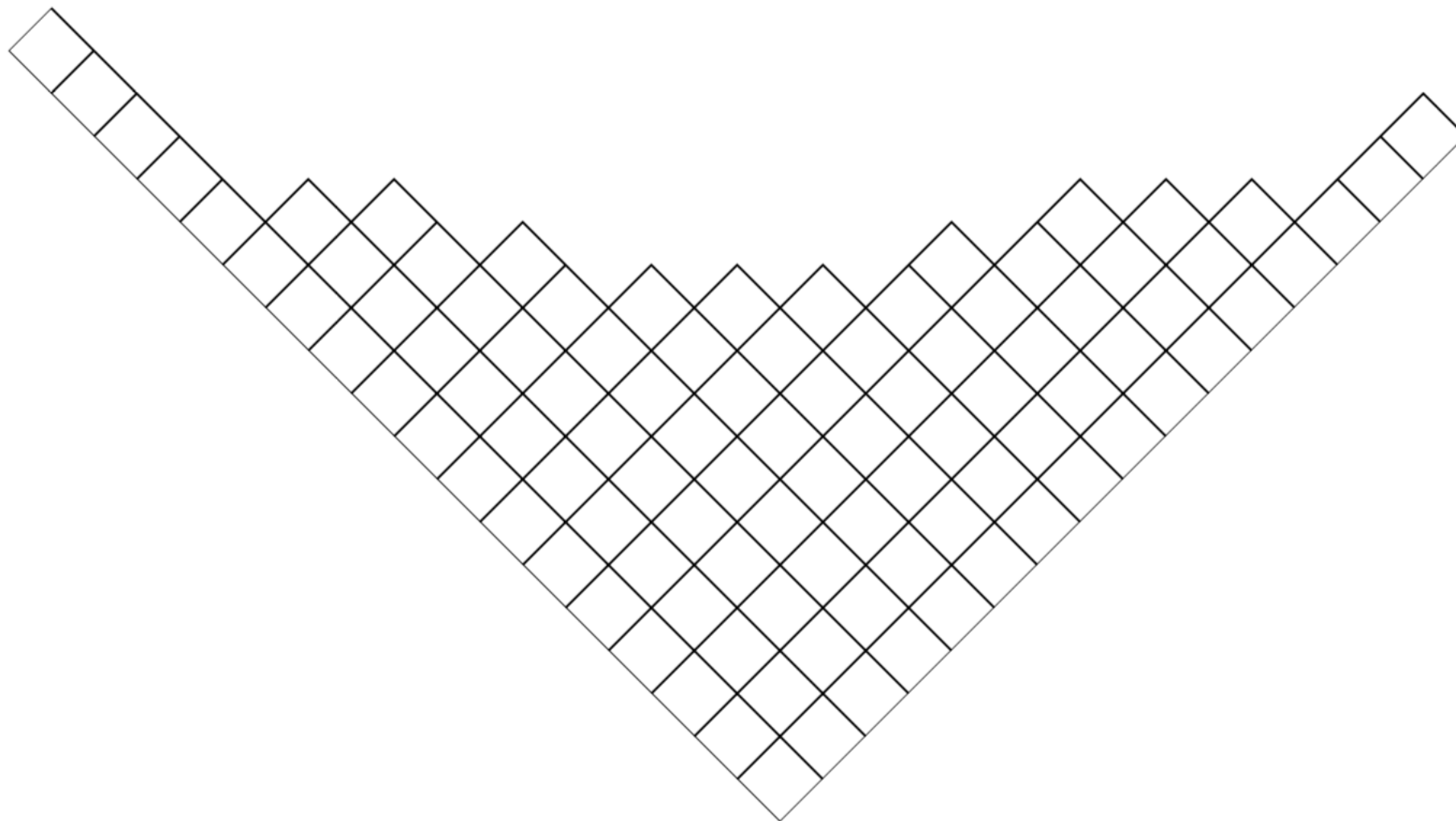
$$|SYT((2, 2, 1))| = \frac{5!}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5.$$



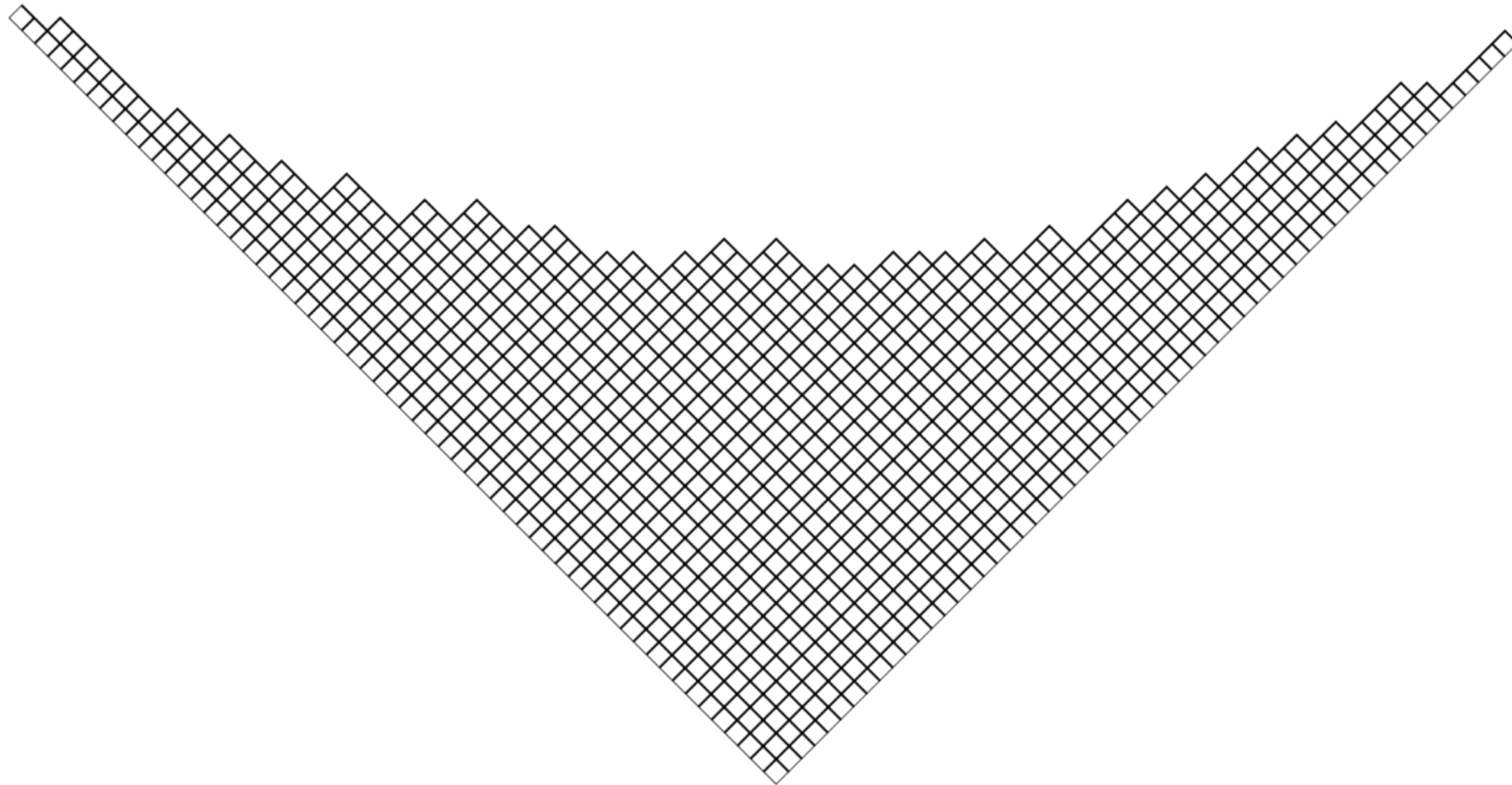
# Obserwacja Logana–Scheppa Vershika–Kerova

**Pomysł:** Jeśli nie możesz rozwiązać łatwego problemu, spróbuj rozwiązać trudniejszy.

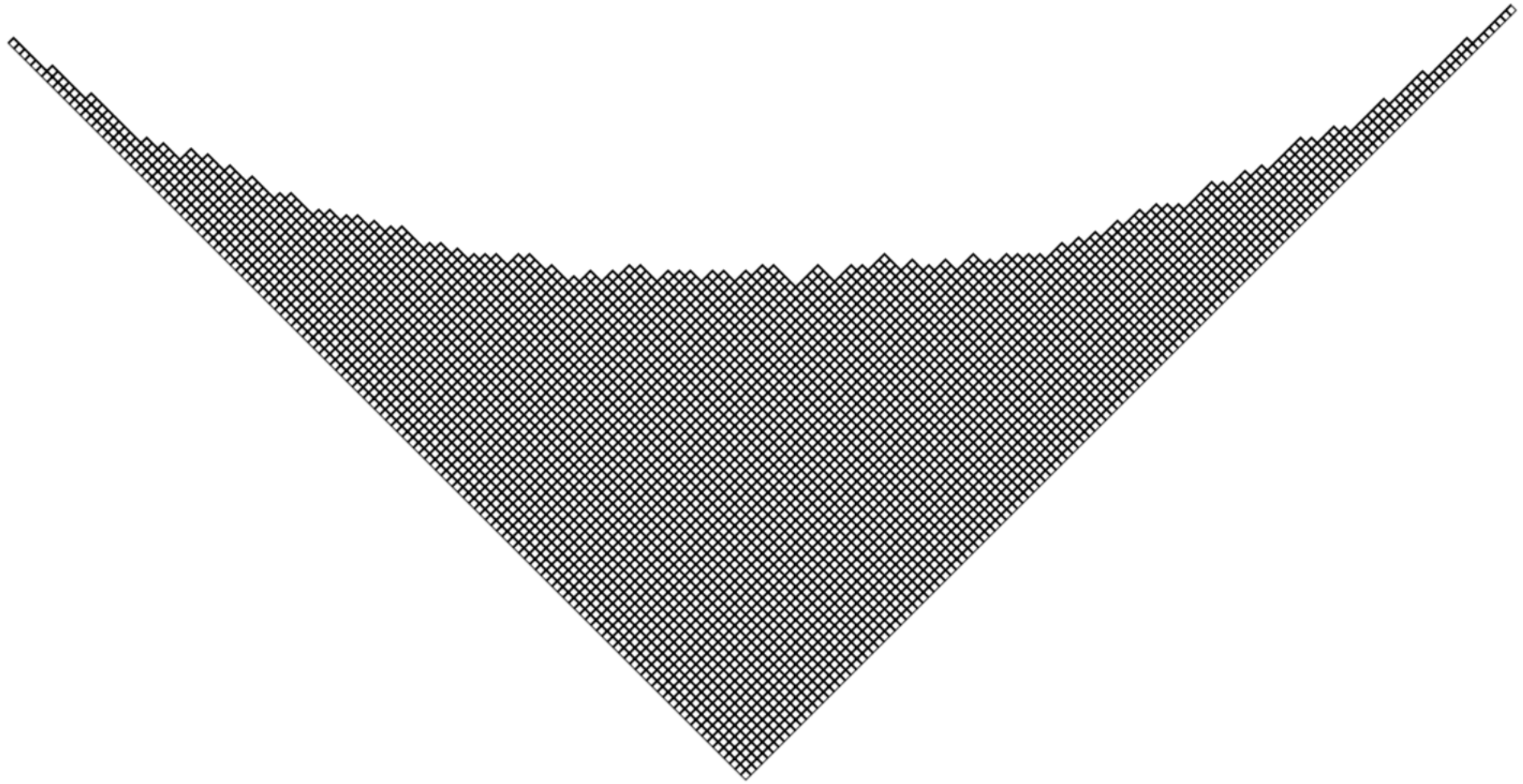
# Obserwacja Logana–Scheppa Vershika–Kerova



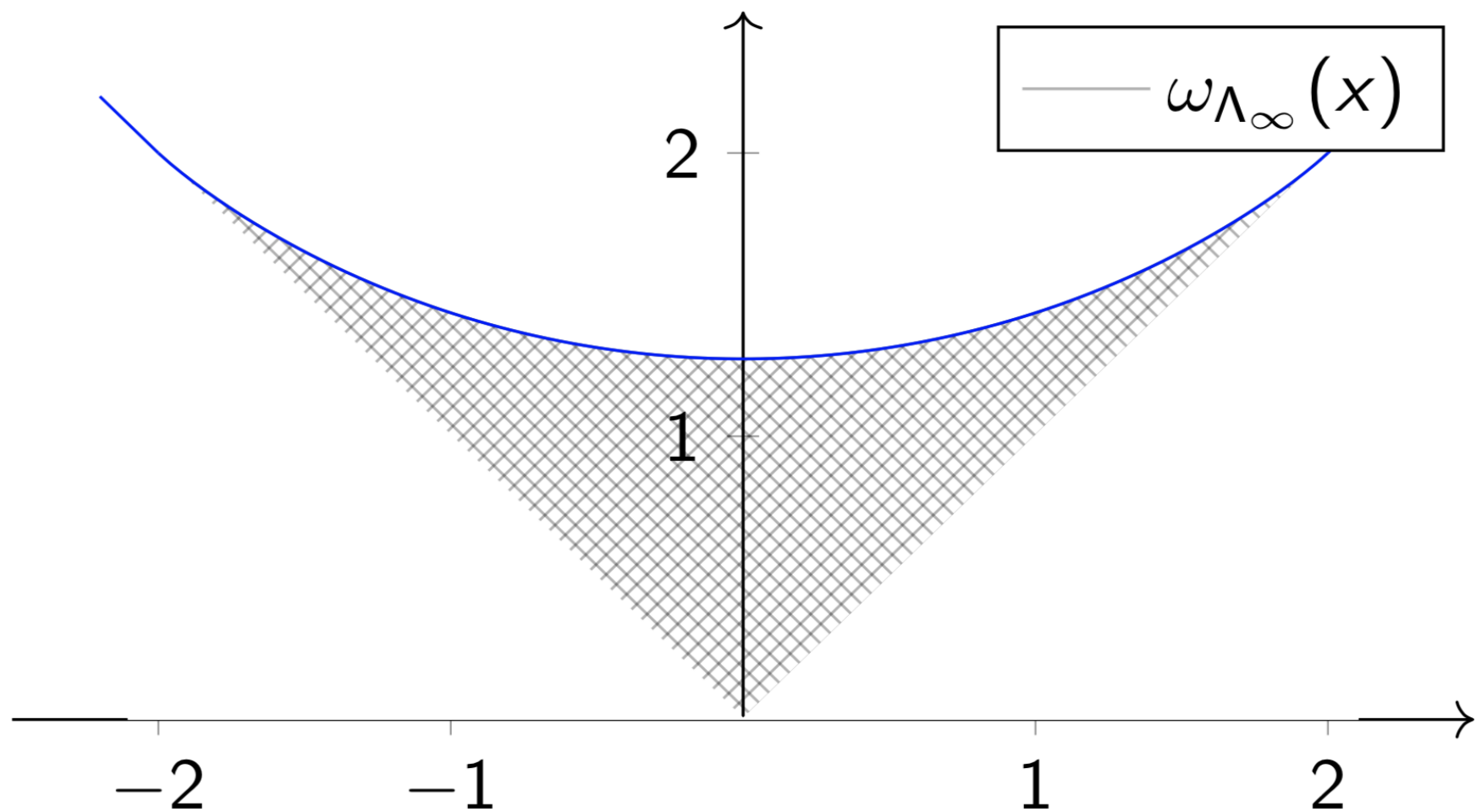
# Obserwacja Logana–Scheppa Vershika–Kerova



# Obserwacja Logana–Scheppa Vershika–Kerova



# Obserwacja Logana–Scheppa Vershika–Kerova



$$\omega_{\Lambda_\infty}(x) = \begin{cases} |x| & \text{if } |x| \geq 2; \\ \frac{2}{\pi} \left( x \cdot \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2} \right) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

# Obserwacja Logana–Scheppa Vershika–Kerova

**Pomysł:** Jeśli nie możesz rozwiązać łatwego problemu, spróbuj rozwiązać trudniejszy.

**Twierdzenie:** [Vershik–Kerov, Logan–Schepp '77]

Jeśli  $\lambda_n$  jest diagramem Younga wylosowanym względem miary Plancherela to jego profil zbiega do  $\omega_{\Lambda_\infty}$  gdy  $n \rightarrow \infty$ .

# Obserwacja Logana–Scheppa Vershika–Kerova

**Pomysł:** Jeśli nie możesz rozwiązać łatwego problemu, spróbuj rozwiązać trudniejszy.

**Twierdzenie:** [Vershik–Kerov, Logan–Schepp '77]

Jeśli  $\lambda_n$  jest diagramem Younga wylosowanym względem miary Plancherela to jego profil zbiega do  $\omega_{\Lambda_\infty}$  gdy  $n \rightarrow \infty$ .

**Wniosek:**  $\frac{\ell(\sigma_n)}{\sqrt{n}} \rightarrow 2$  według prawdopodobieństwa gdy  $n \rightarrow \infty$ .

# Co dalej?

Wiemy, że  $\ell(\sigma_n) \sim \sqrt{n}(2 + o(1))$ .



## Co dalej?

Wiemy, że  $\ell(\sigma_n) \sim \sqrt{n}(2 + o(1))$ .

co tu jest ukryte?



# Co dalej?

Wiemy, że  $\ell(\sigma_n) \sim \sqrt{n}(2 + o(1))$ .

**Hipoteza: [Odlyzko–Rains '93]**

$$\text{Var}(\ell(\sigma_n)) \sim n^{1/3}$$

# Co dalej?

Wiemy, że  $\ell(\sigma_n) \sim \sqrt{n}(2 + o(1))$ .

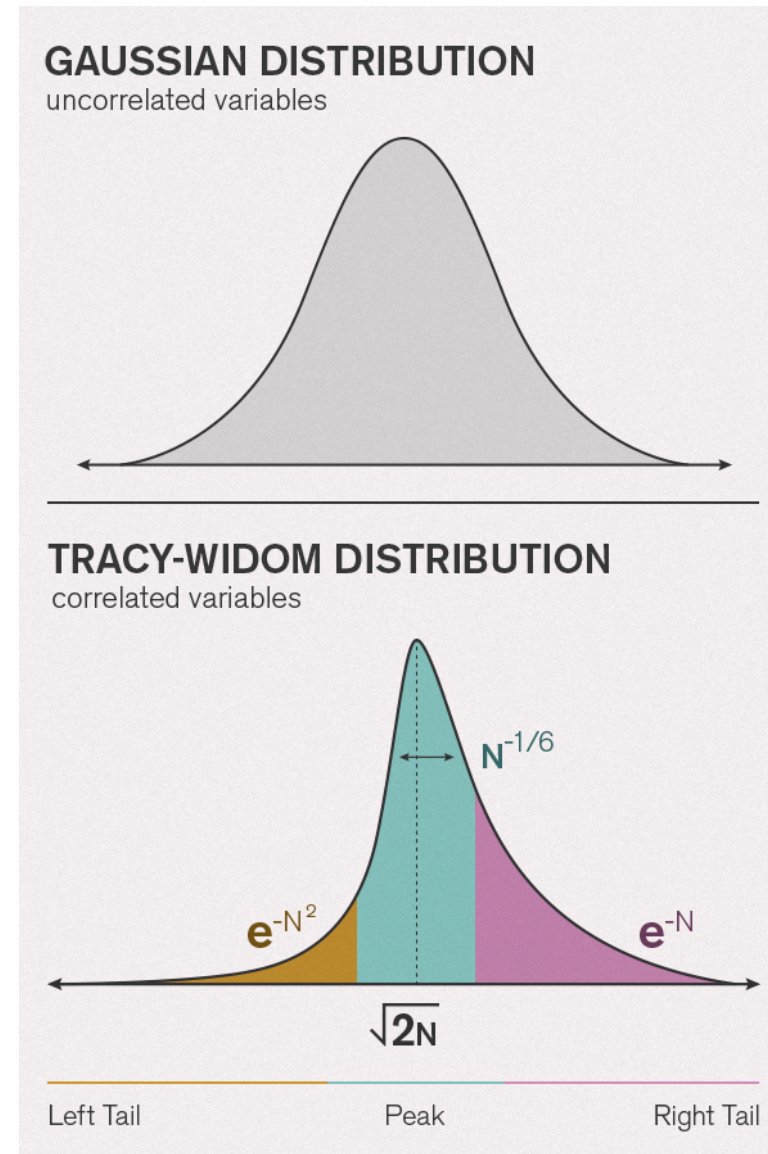
**Hipoteza: [Odlyzko–Rains '93]**

$$\text{Var}(\ell(\sigma_n)) \sim n^{1/3}$$

**Twierdzenie [Baik–Deift–Johansson '98]**

$$\mathbb{P}\left(\frac{\ell(\sigma_n) - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \leq x\right) \longrightarrow TW(x)$$

gdym  $n \rightarrow \infty$ , gdzie  $TW(x)$  - rozkład Tracy'ego–Widoma.



Olena Shmahalo/Quanta Magazine

# Co dalej?

Wiemy, że  $\ell(\sigma_n) \sim \sqrt{n}(2 + o(1))$ .

## Hipoteza: [Odlyzko–Rains '93]

$$\text{Var}(\ell(\sigma_n)) \sim n^{1/3}$$

## Twierdzenie [Baik–Deift–Johansson '98]

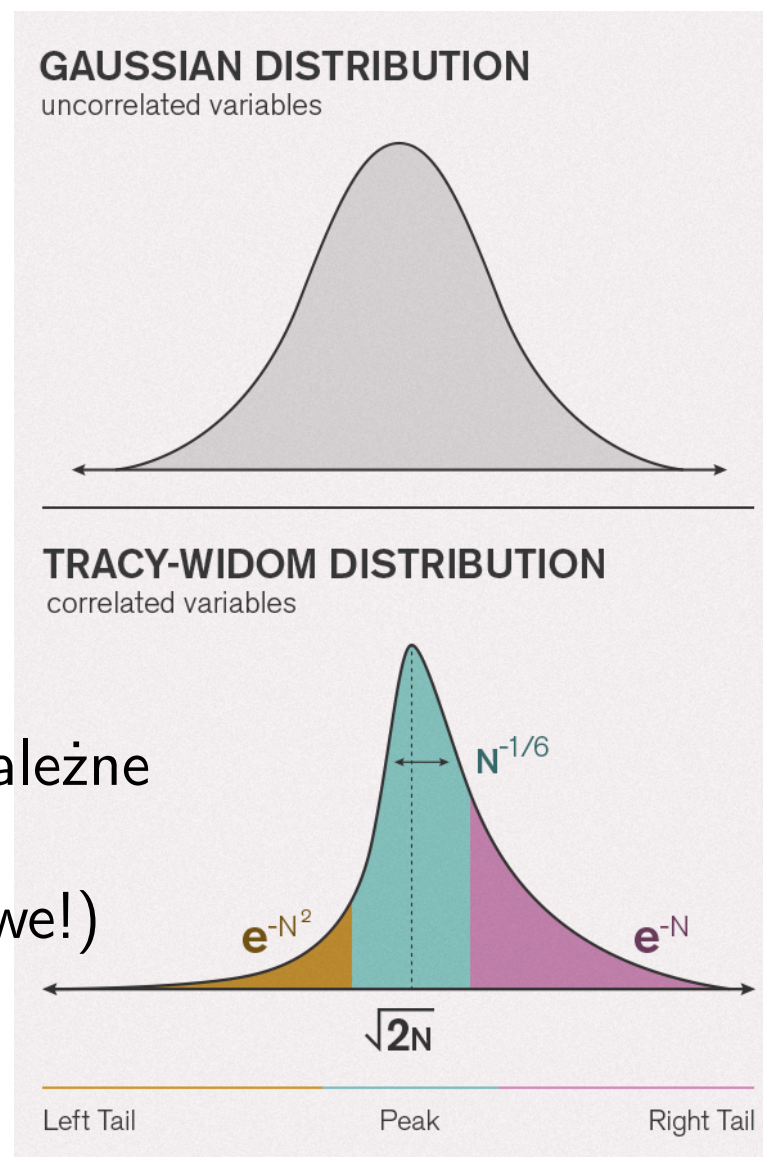
$$\mathbb{P}\left(\frac{\ell(\sigma_n) - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \leq x\right) \longrightarrow TW(x)$$

gdzie  $n \rightarrow \infty$ , gdzie  $TW(x)$  - rozkład Tracy'ego–Widoma.

- $H_N$  - macierz hermitowska  $N \times N$  której wartości to niezależne zmienne Gaussowskie,
- $\ell_1^{(N)} \geq \ell_2^{(N)} \dots \geq \ell_N^{(N)}$  wartości własne  $H_N$  (zmienne losowe!)

## Twierdzenie [Tracy–Widom '93]

$$\mathbb{P}\left(\frac{\ell_1^{(N)} - 2\sqrt{N}}{N^{-1/6}} \leq x\right) \longrightarrow TW(x)$$



Olena Shmahalo/Quanta Magazine

# Co dalej?

Wiemy, że  $\ell(\sigma_n) \sim \sqrt{n}(2 + o(1))$ .

## Hipoteza: [Odlyzko–Rains '93]

$$\text{Var}(\ell(\sigma_n)) \sim n^{1/3}$$

## Twierdzenie [Baik–Deift–Johansson '98]

- $\lambda^{(n)}$  - losowy (wzgl. miary Plancherela) diagram Younga rozmiaru  $n$
- $\ell_1^{(n)} \geq \dots \geq \ell_n^{(n)}$  wartości własne losowej macierzy hermitowskiej  $n \times n$  (GUE)

$$\left( \frac{\lambda_1^{(n)} - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \right) \sim \left( \frac{\ell_1^{(n)} - 2\sqrt{n}}{n^{-1/6}} \right) \text{ gdy } n \rightarrow \infty$$

## Hipoteza [Baik–Deift–Johansson '98]

$$\forall k \quad \left( \frac{\lambda_1^{(n)} - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}}, \dots, \frac{\lambda_k^{(n)} - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \right) \sim \left( \frac{\ell_1^{(n)} - 2\sqrt{n}}{n^{-1/6}}, \dots, \frac{\ell_k^{(n)} - 2\sqrt{n}}{n^{-1/6}} \right) \text{ gdy } n \rightarrow \infty$$

# Co dalej?

Wiemy, że  $\ell(\sigma_n) \sim \sqrt{n}(2 + o(1))$ .

## Hipoteza: [Odlyzko–Rains '93]

$$\text{Var}(\ell(\sigma_n)) \sim n^{1/3}$$

## Twierdzenie [Baik–Deift–Johansson '98]

- $\lambda^{(n)}$  - losowy (wzgl. miary Plancherela) diagram Younga rozmiaru  $n$
- $\ell_1^{(n)} \geq \dots \geq \ell_n^{(n)}$  wartości własne losowej macierzy hermitowskiej  $n \times n$  (GUE)

$$\left( \frac{\lambda_1^{(n)} - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \right) \sim \left( \frac{\ell_1^{(n)} - 2\sqrt{n}}{n^{-1/6}} \right) \text{ gdy } n \rightarrow \infty$$

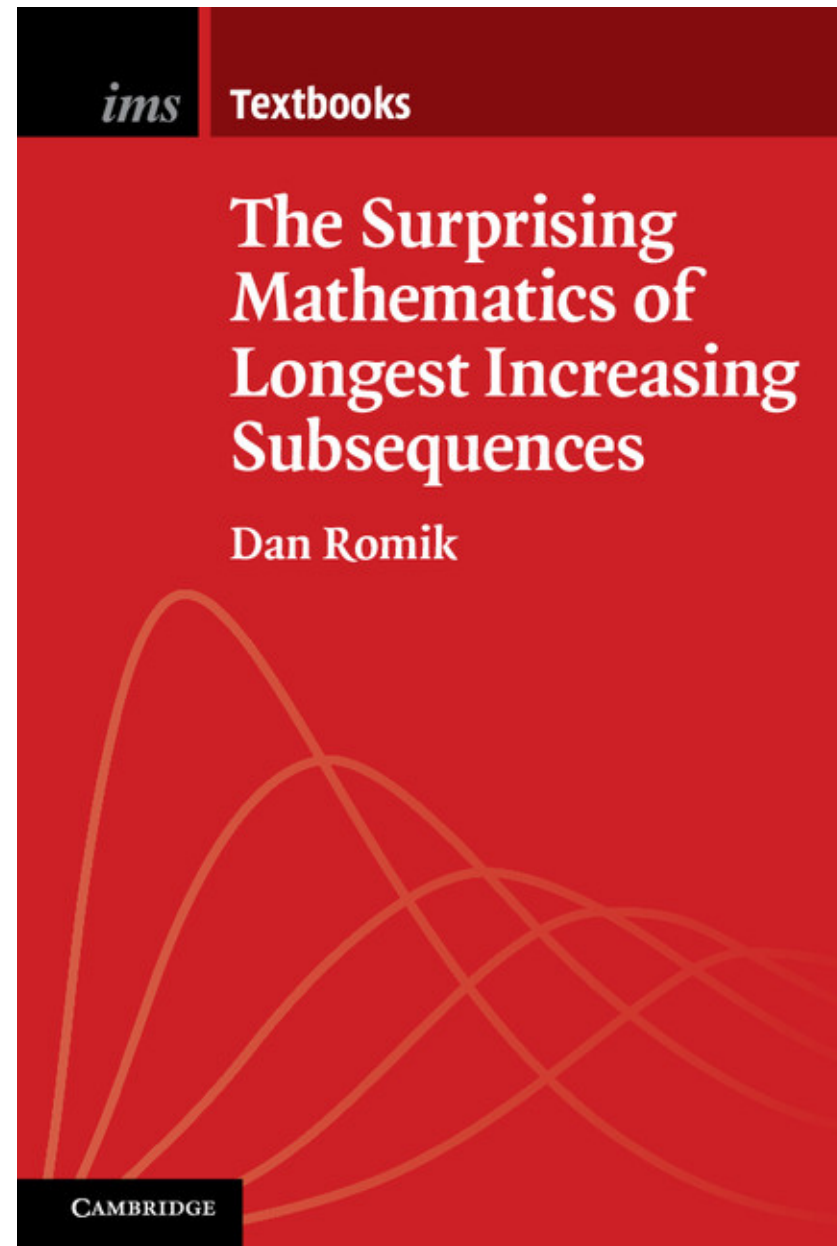
## Hipoteza [Baik–Deift–Johansson '98]

$$\forall k \left( \frac{\lambda_1^{(n)} - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}}, \dots, \frac{\lambda_k^{(n)} - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \right) \sim \left( \frac{\ell_1^{(n)} - 2\sqrt{n}}{n^{-1/6}}, \dots, \frac{\ell_k^{(n)} - 2\sqrt{n}}{n^{-1/6}} \right) \text{ gdy } n \rightarrow \infty$$

Dowód [Okounkov '00], [Borodin–Olshanski–Okounkov '01], [Johansson '01]

Ten niezwykle elegancki dowód, oparty na liczeniu kombinatorycznych map jest jednym z osiągnięć Okounkov'a wymienionych w uzasadnieniu przyznania mu medalu Fieldsa w 2006 roku.

# Zaskakująca matematyka najdłuższych podciągów rosnących...



<https://www.math.ucdavis.edu/~romik/book/>

**Opowieść II: Liczenie  
kombinatorycznych map,  
kwantowa grawitacja i losowe  
geometrie**



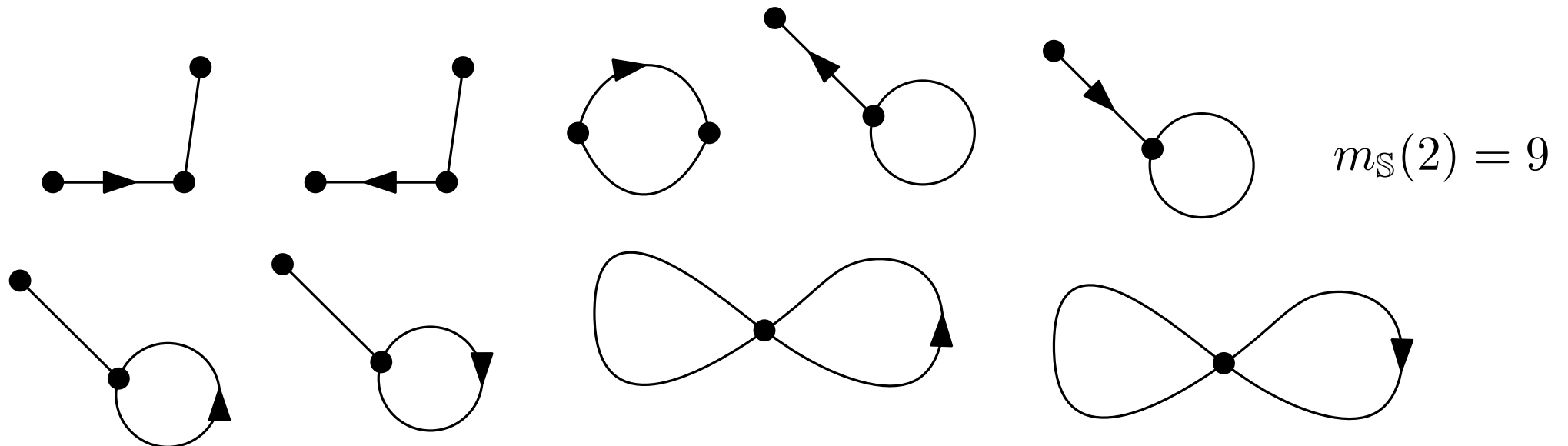
# Mapy

= grafy zanurzone na powierzchni tak, że rozcinają ją na kolekcję ściągalnych obszarów zwanych **ścianami**.

Mapy **planarne**, to mapy zanurzone na sferze (można je narysować na kartce tak, że krawędzi się nie przecinają). Mapy (dzisiaj) są zawsze **ukorzenione**, czyli mają skierowaną krawędź.

**Problem:** Jaka jest liczba  $m_{\mathbb{S}}(n)$  map planarnych o  $n$  krawędziach?

**Przykład:**  $n = 2$ :



# Mapy

= grafy zanurzone na powierzchni tak, że rozcinają ją na kolekcję ściągalnych obszarów zwanych **ścianami**.

Mapy **planarne**, to mapy zanurzone na sferze (można je narysować na kartce tak, że krawędzi się nie przecinają). Mapy (dzisiaj) są zawsze **ukorzenione**, czyli mają skierowaną krawędź.

**Problem:** Jaka jest liczba  $m_{\mathbb{S}}(n)$  map planarnych o  $n$  krawędziach?

**Twierdzenie** [Tutte 1960]

$$m_{\mathbb{S}}(n) = \frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}.$$

# Mapy

= grafy zanurzone na powierzchni tak, że rozcinają ją na kolekcję ściągalnych obszarów zwanych **ścianami**.

Mapy **planarne**, to mapy zanurzone na sferze (można je narysować na kartce tak, że krawędzi się nie przecinają). Mapy (dzisiaj) są zawsze **ukorzenione**, czyli mają skierowaną krawędź.

**Problem:** Jaka jest liczba  $m_{\mathbb{S}}(n)$  map planarnych o  $n$  krawędziach?

**Twierdzenie** [Tutte 1960]

$$m_{\mathbb{S}}(n) = \frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!} \Rightarrow (n+2)m_{\mathbb{S}}(n) = 2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

# Mapy

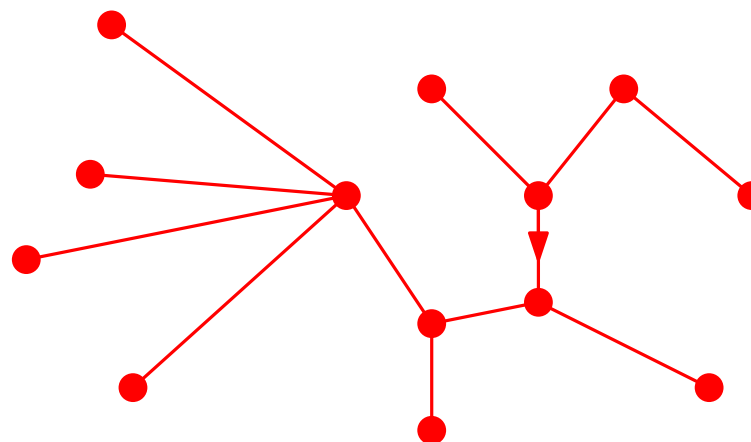
= grafy zanurzone na powierzchni tak, że rozcinają ją na kolekcję ściągalnych obszarów zwanych **ścianami**.

Mapy **planarne**, to mapy zanurzone na sferze (można je narysować na kartce tak, że krawędzi się nie przecinają). Mapy (dzisiaj) są zawsze **ukorzenione**, czyli mają skierowaną krawędź.

**Problem:** Jaka jest liczba  $m_{\mathbb{S}}(n)$  map planarnych o  $n$  krawędziach?

**Twierdzenie [Tutte 1960]**

$$m_{\mathbb{S}}(n) = \frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!} \Rightarrow (n+2)m_{\mathbb{S}}(n) = 2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$



# Mapy

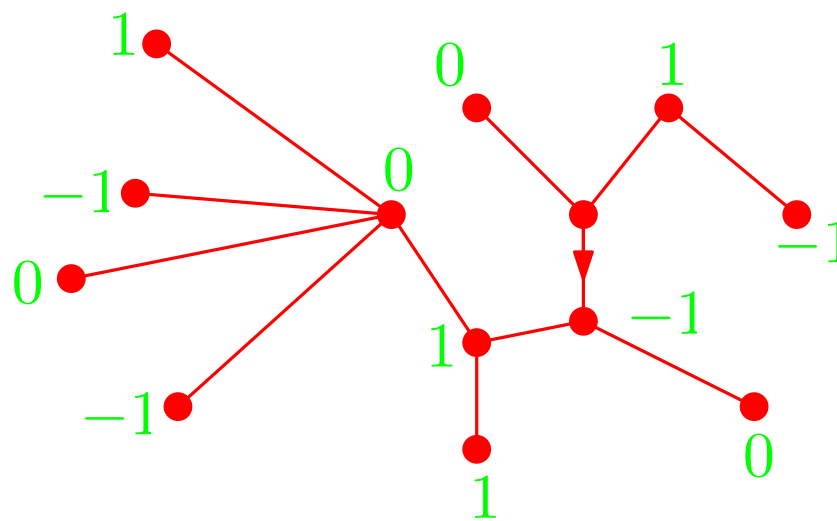
= grafy zanurzone na powierzchni tak, że rozcinają ją na kolekcję ściągalnych obszarów zwanych **ścianami**.

Mapy **planarne**, to mapy zanurzone na sferze (można je narysować na kartce tak, że krawędzi się nie przecinają). Mapy (dzisiaj) są zawsze **ukorzenione**, czyli mają skierowaną krawędź.

**Problem:** Jaka jest liczba  $m_{\mathbb{S}}(n)$  map planarnych o  $n$  krawędziach?

**Twierdzenie [Tutte 1960]**

$$m_{\mathbb{S}}(n) = \frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!} \Rightarrow (n+2)m_{\mathbb{S}}(n) = 2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$



# Mapy

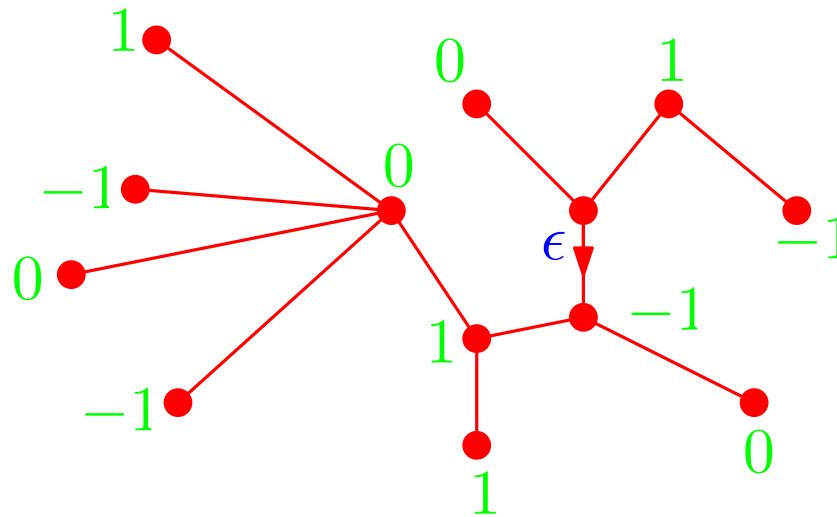
= grafy zanurzone na powierzchni tak, że rozcinają ją na kolekcję ściągalnych obszarów zwanych **ścianami**.

Mapy **planarne**, to mapy zanurzone na sferze (można je narysować na kartce tak, że krawędzi się nie przecinają). Mapy (dzisiaj) są zawsze **ukorzenione**, czyli mają skierowaną krawędź.

**Problem:** Jaka jest liczba  $m_{\mathbb{S}}(n)$  map planarnych o  $n$  krawędziach?

**Twierdzenie** [Tutte 1960]

$$m_{\mathbb{S}}(n) = \frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!} \Rightarrow (n+2)m_{\mathbb{S}}(n) = 2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$



# Mapy

Kwadrangulacja to mapa, gdzie wszystkie ściany mają stopień równy 4.

## Twierdzenie [Tutte 1960]

Istnieje bijekcja pomiędzy

- zbiorem map planarnych o  $n$  krawędziach,  $l$  wierzchołkach i  $k$  ścianach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , a
- zbiorem planarnych kwadrangulacji o  $n$  ścianach,  $l$  czarnych wierzchołkach i  $k$  białych wierzchołkach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .

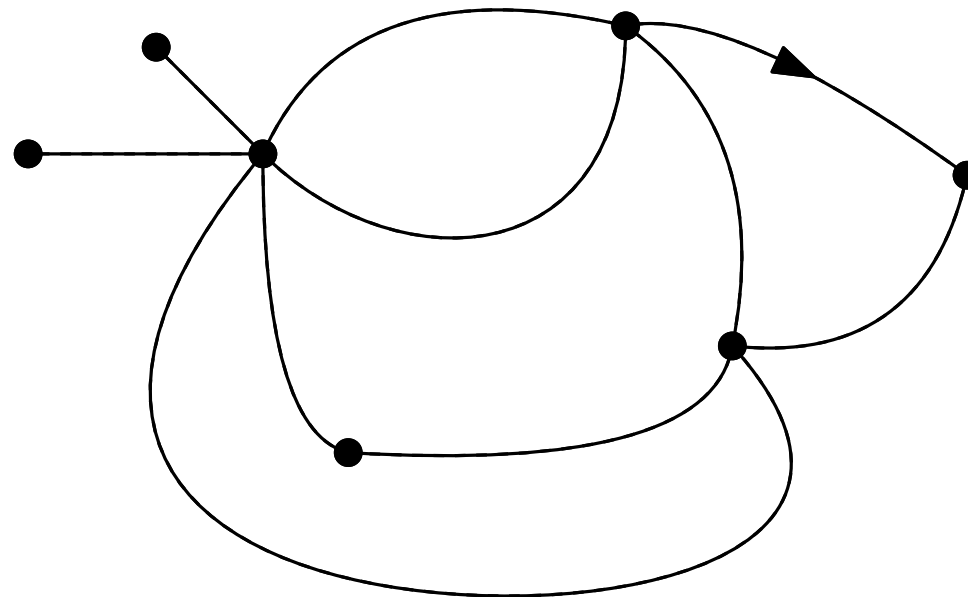
# Mapy

Kwadrangulacja to mapa, gdzie wszystkie ściany mają stopień równy 4.

## Twierdzenie [Tutte 1960]

Istnieje bijekcja pomiędzy

- zbiorem map planarnych o  $n$  krawędziach,  $l$  wierzchołkach i  $k$  ścianach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , a
- zbiorem planarnych kwadrangulacji o  $n$  ścianach,  $l$  czarnych wierzchołkach i  $k$  białych wierzchołkach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .





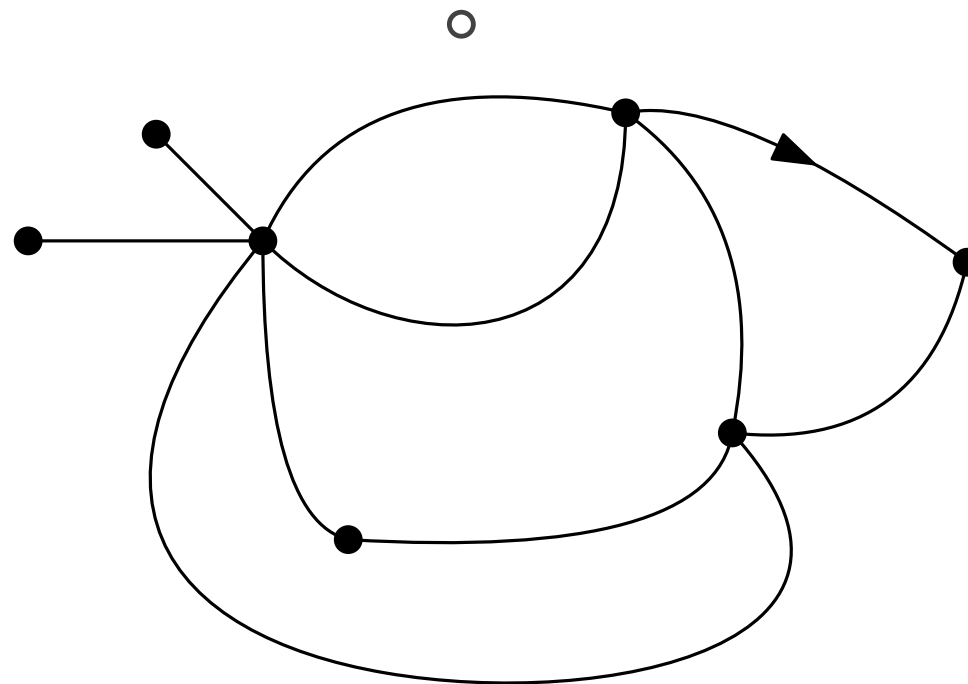
# Mapy

Kwadrangulacja to mapa, gdzie wszystkie ściany mają stopień równy 4.

## Twierdzenie [Tutte 1960]

Istnieje bijekcja pomiędzy

- zbiorem map planarnych o  $n$  krawędziach,  $l$  wierzchołkach i  $k$  ścianach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , a
- zbiorem planarnych kwadrangulacji o  $n$  ścianach,  $l$  czarnych wierzchołkach i  $k$  białych wierzchołkach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .



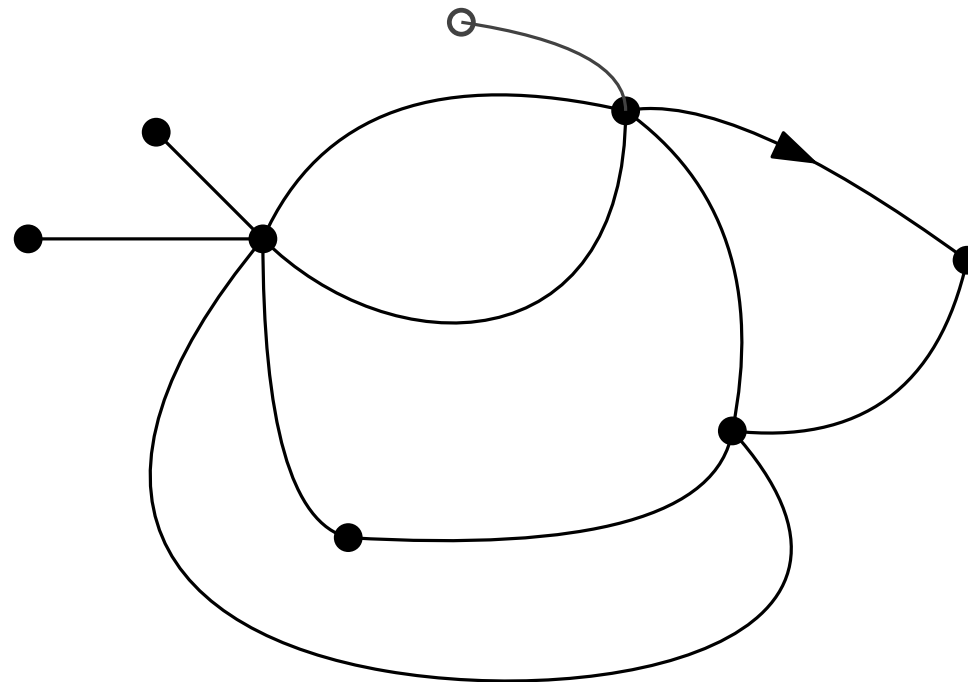
# Mapy

Kwadrangulacja to mapa, gdzie wszystkie ściany mają stopień równy 4.

## Twierdzenie [Tutte 1960]

Istnieje bijekcja pomiędzy

- zbiorem map planarnych o  $n$  krawędziach,  $l$  wierzchołkach i  $k$  ścianach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , a
- zbiorem planarnych kwadrangulacji o  $n$  ścianach,  $l$  czarnych wierzchołkach i  $k$  białych wierzchołkach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .



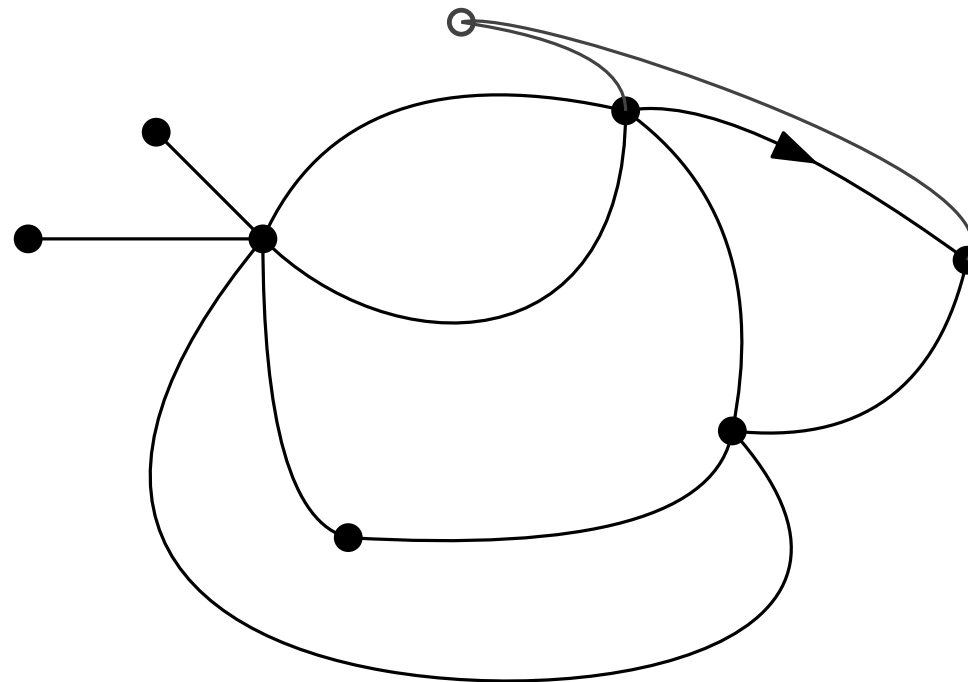
# Mapy

Kwadrangulacja to mapa, gdzie wszystkie ściany mają stopień równy 4.

## Twierdzenie [Tutte 1960]

Istnieje bijekcja pomiędzy

- zbiorem map planarnych o  $n$  krawędziach,  $l$  wierzchołkach i  $k$  ścianach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , a
- zbiorem planarnych kwadrangulacji o  $n$  ścianach,  $l$  czarnych wierzchołkach i  $k$  białych wierzchołkach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .



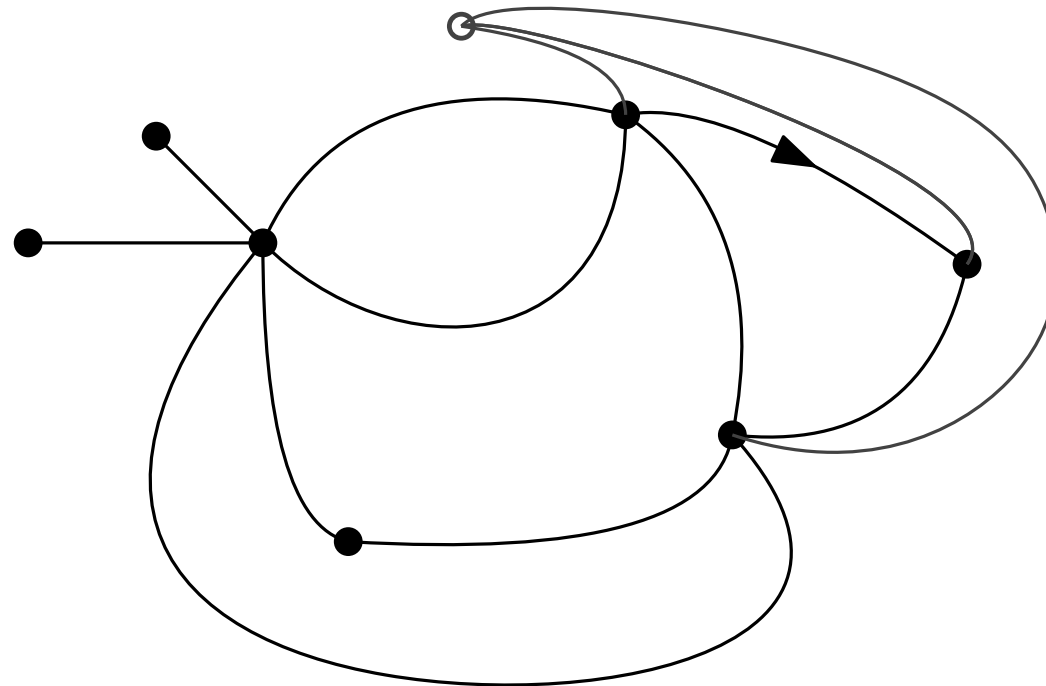
# Mapy

Kwadrangulacja to mapa, gdzie wszystkie ściany mają stopień równy 4.

## Twierdzenie [Tutte 1960]

Istnieje bijekcja pomiędzy

- zbiorem map planarnych o  $n$  krawędziach,  $l$  wierzchołkach i  $k$  ścianach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , a
- zbiorem planarnych kwadrangulacji o  $n$  ścianach,  $l$  czarnych wierzchołkach i  $k$  białych wierzchołkach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .



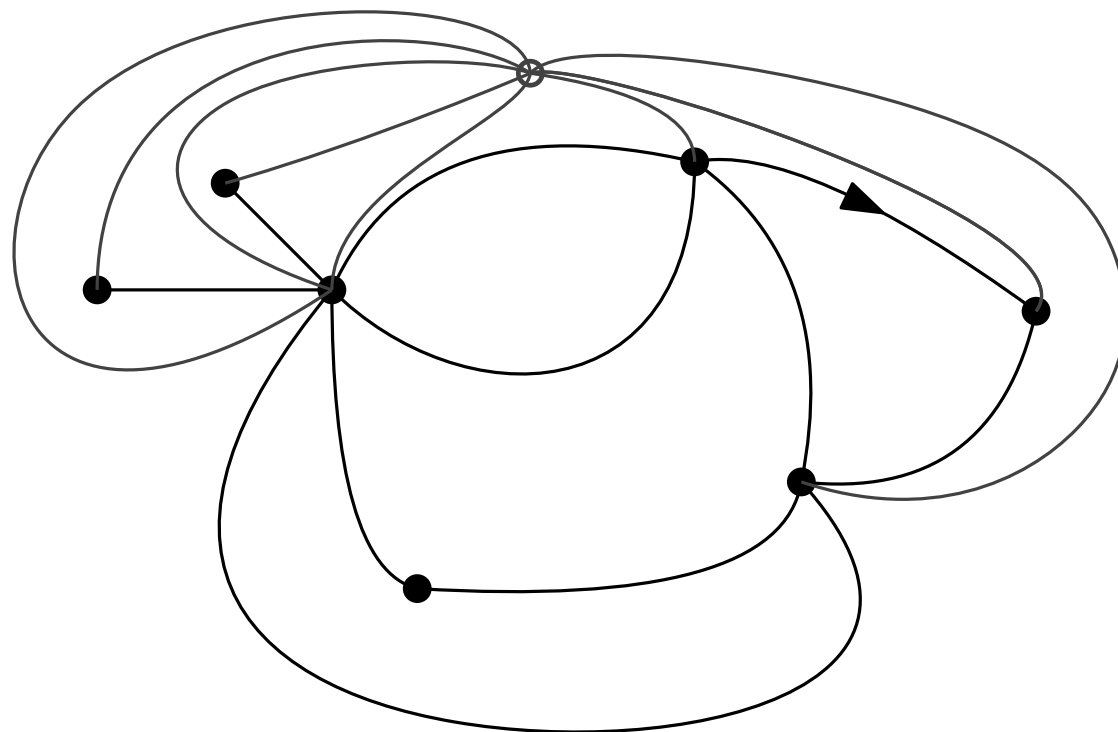
# Mapy

Kwadrangulacja to mapa, gdzie wszystkie ściany mają stopień równy 4.

## Twierdzenie [Tutte 1960]

Istnieje bijekcja pomiędzy

- zbiorem map planarnych o  $n$  krawędziach,  $l$  wierzchołkach i  $k$  ścianach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , a
- zbiorem planarnych kwadrangulacji o  $n$  ścianach,  $l$  czarnych wierzchołkach i  $k$  białych wierzchołkach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .



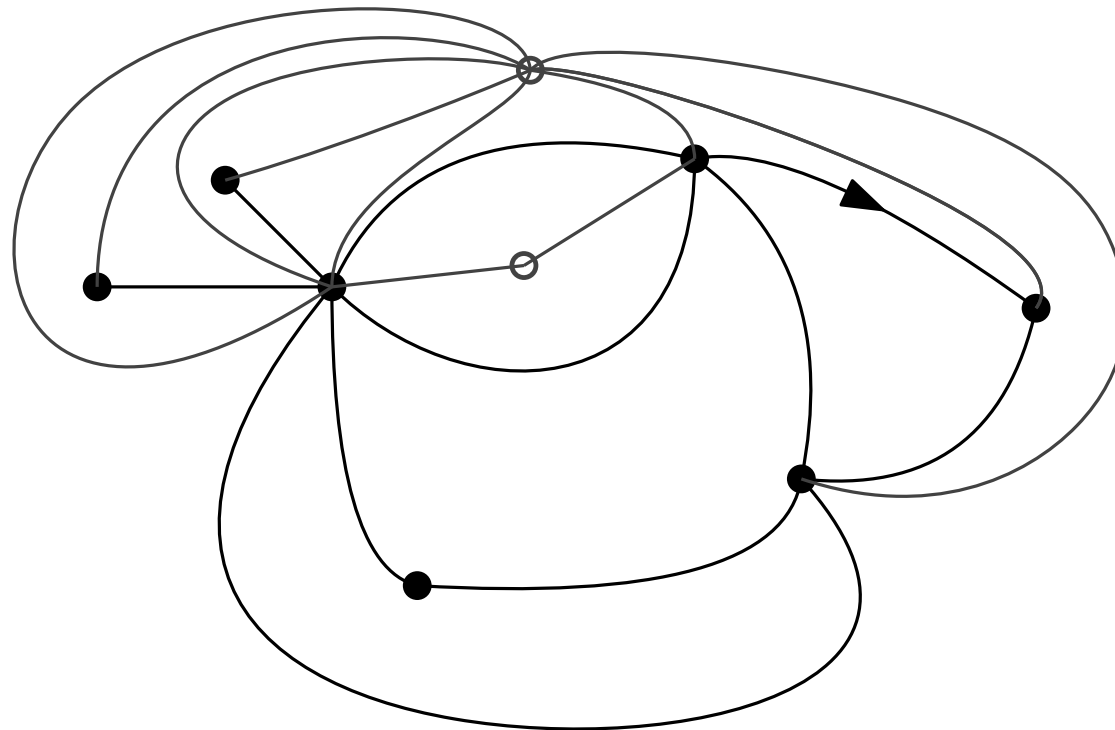
# Mapy

Kwadrangulacja to mapa, gdzie wszystkie ściany mają stopień równy 4.

## Twierdzenie [Tutte 1960]

Istnieje bijekcja pomiędzy

- zbiorem map planarnych o  $n$  krawędziach,  $l$  wierzchołkach i  $k$  ścianach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , a
- zbiorem planarnych kwadrangulacji o  $n$  ścianach,  $l$  czarnych wierzchołkach i  $k$  białych wierzchołkach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .



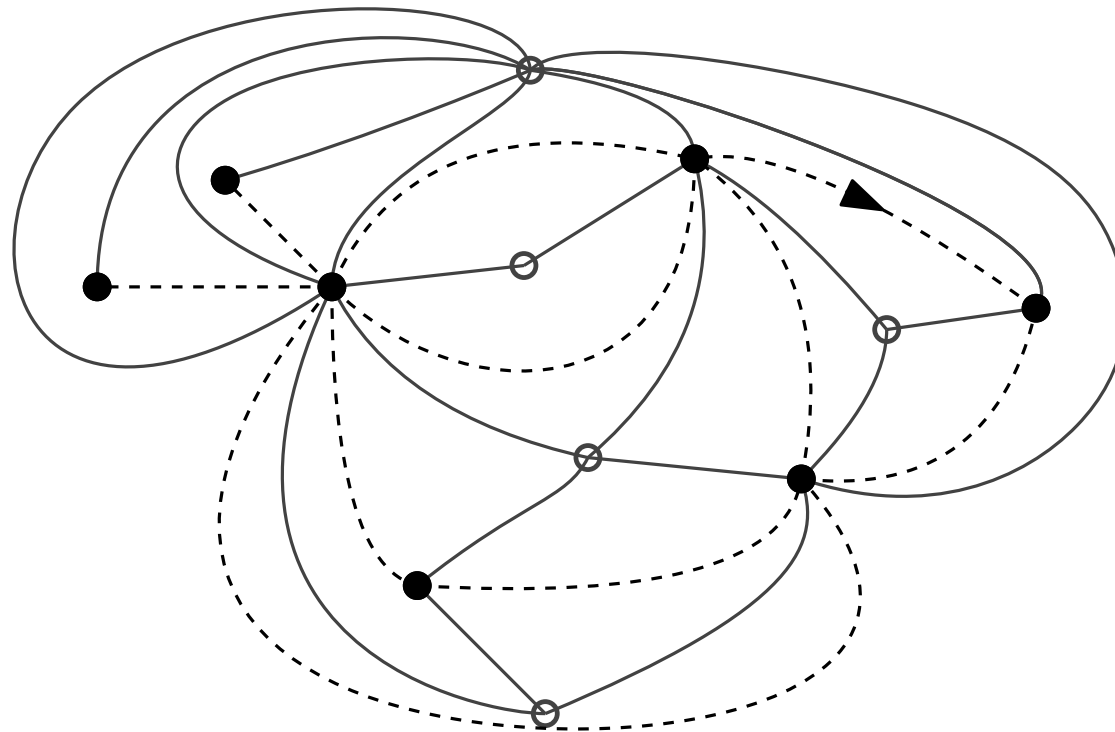
# Mapy

Kwadrangulacja to mapa, gdzie wszystkie ściany mają stopień równy 4.

## Twierdzenie [Tutte 1960]

Istnieje bijekcja pomiędzy

- zbiorem map planarnych o  $n$  krawędziach,  $l$  wierzchołkach i  $k$  ścianach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , a
- zbiorem planarnych kwadrangulacji o  $n$  ścianach,  $l$  czarnych wierzchołkach i  $k$  białych wierzchołkach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .



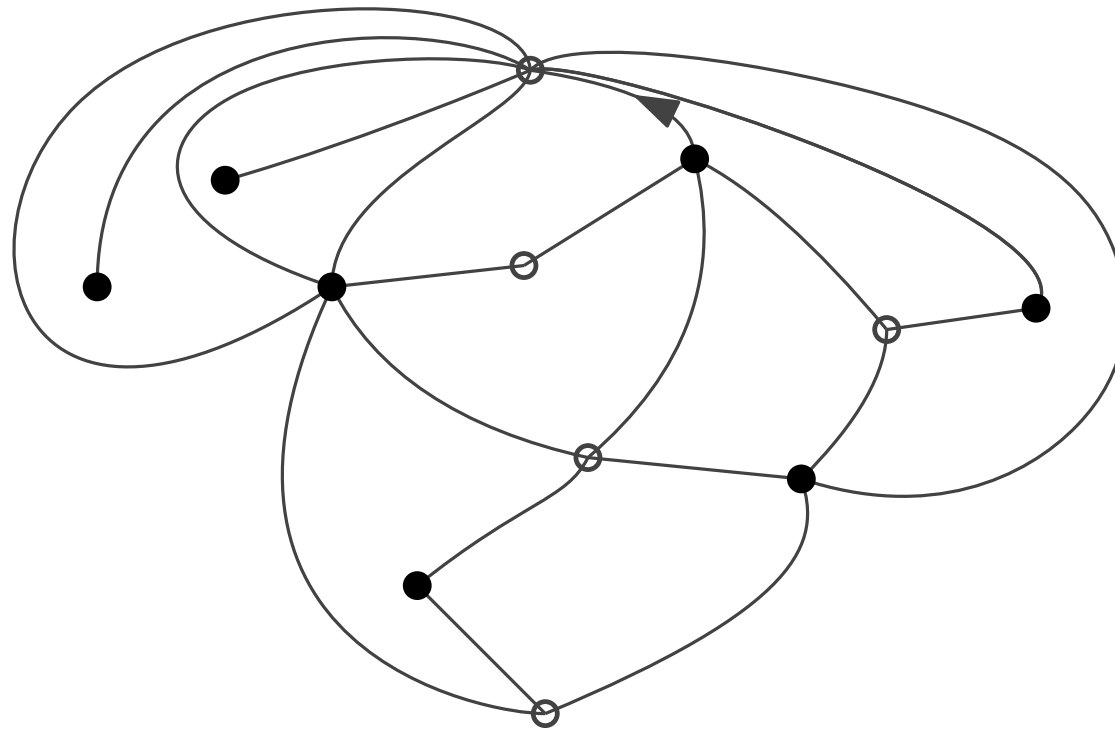
# Mapy

Kwadrangulacja to mapa, gdzie wszystkie ściany mają stopień równy 4.

## Twierdzenie [Tutte 1960]

Istnieje bijekcja pomiędzy

- zbiorem map planarnych o  $n$  krawędziach,  $l$  wierzchołkach i  $k$  ścianach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , a
- zbiorem planarnych kwadrangulacji o  $n$  ścianach,  $l$  czarnych wierzchołkach i  $k$  białych wierzchołkach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .





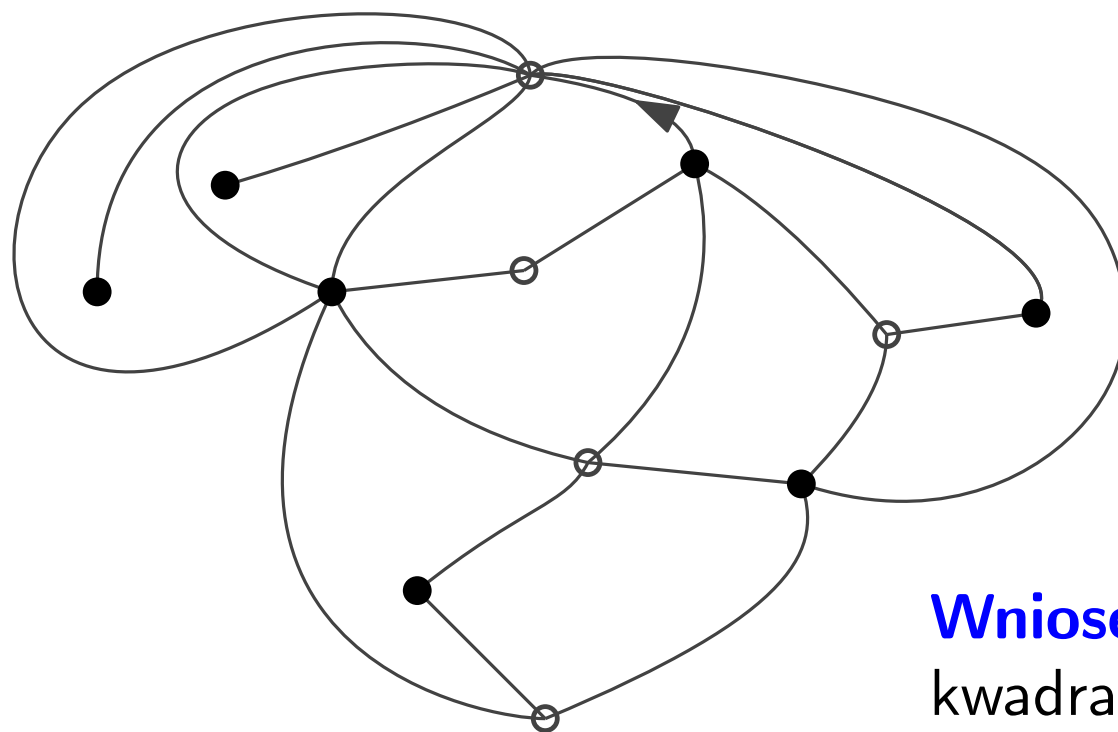
# Mapy

Kwadrangulacja to mapa, gdzie wszystkie ściany mają stopień równy 4.

## Twierdzenie [Tutte 1960]

Istnieje bijekcja pomiędzy

- zbiorem map planarnych o  $n$  krawędziach,  $l$  wierzchołkach i  $k$  ścianach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , a
- zbiorem planarnych kwadrangulacji o  $n$  ścianach,  $l$  czarnych wierzchołkach i  $k$  białych wierzchołkach o stopniach  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .

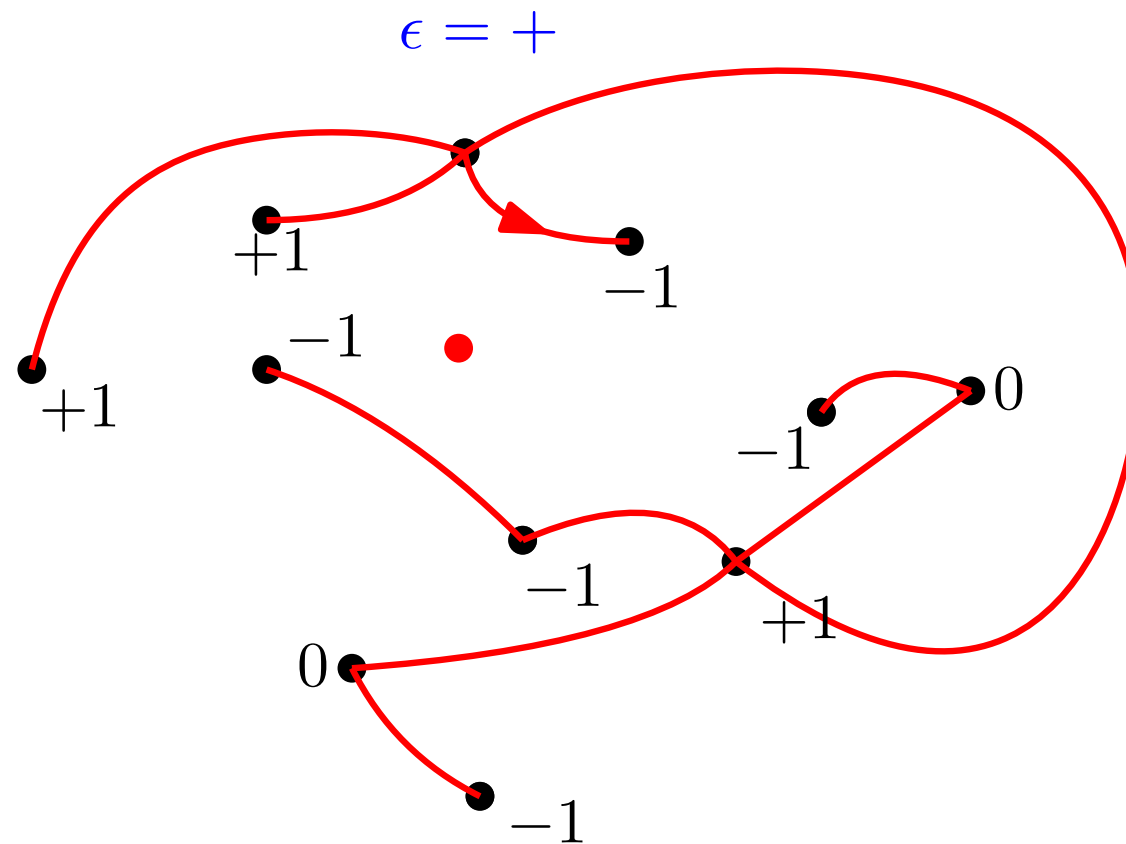


**Wniosek:**  $(n + 2)m_{\mathbb{S}}(n) =$  liczba kwadrangulacji o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem.

# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

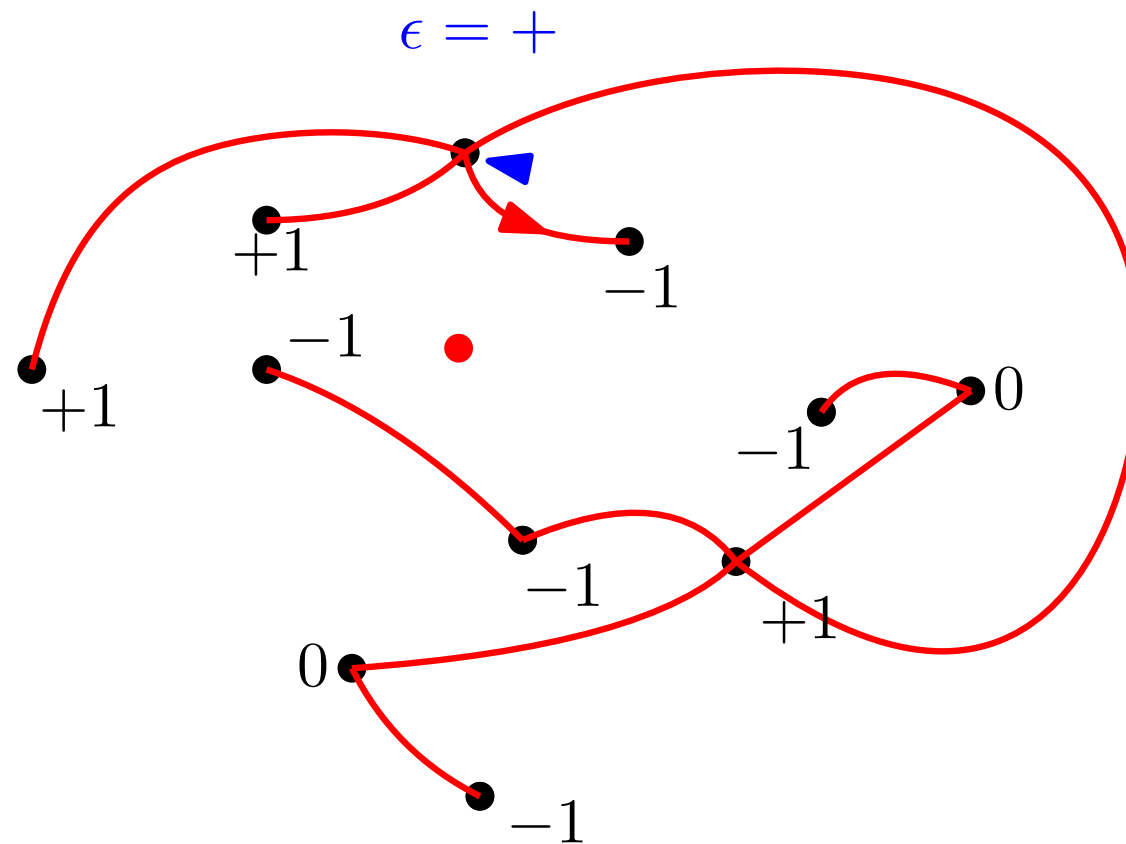
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

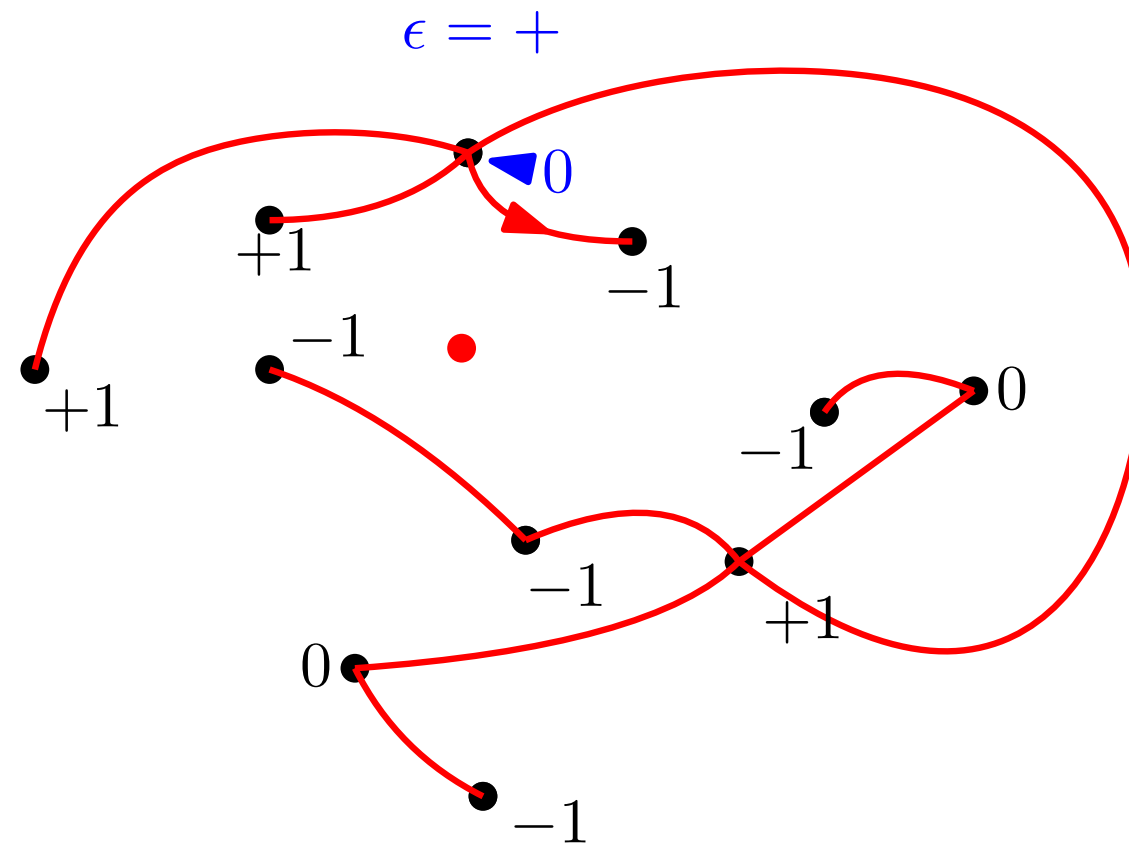
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji

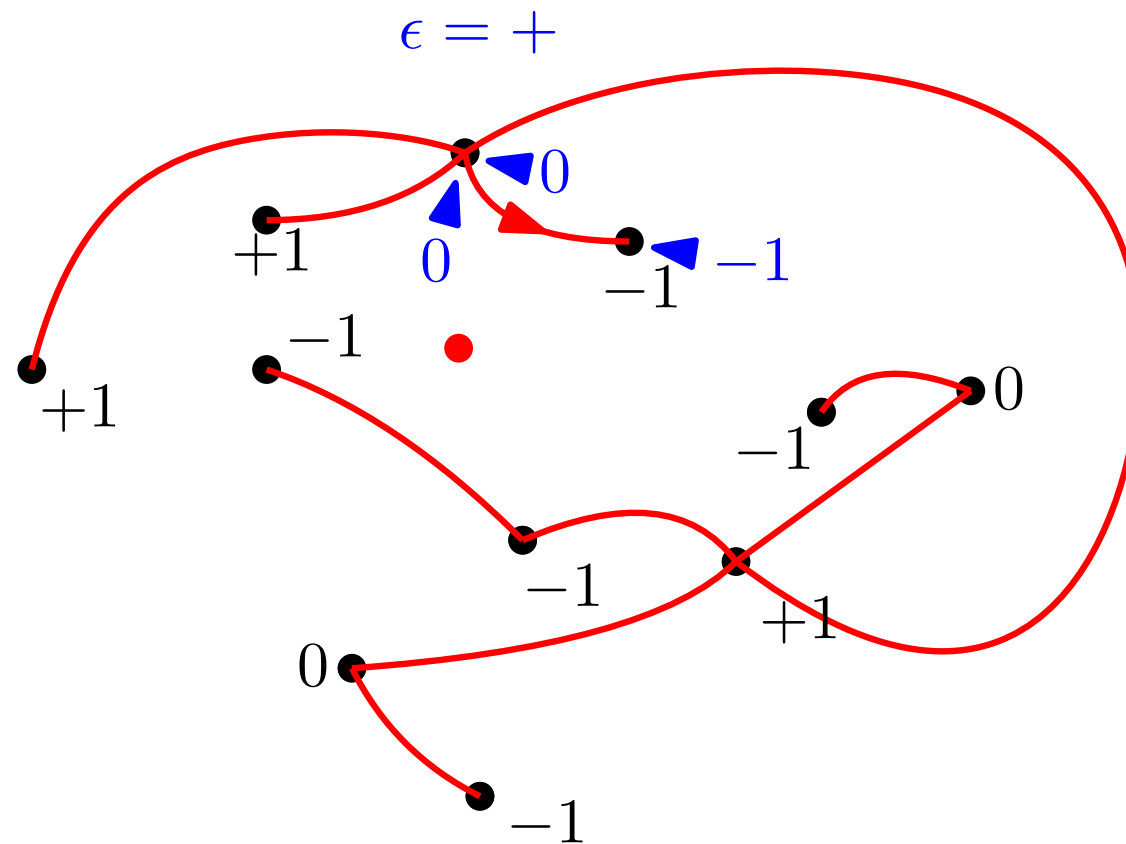




# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

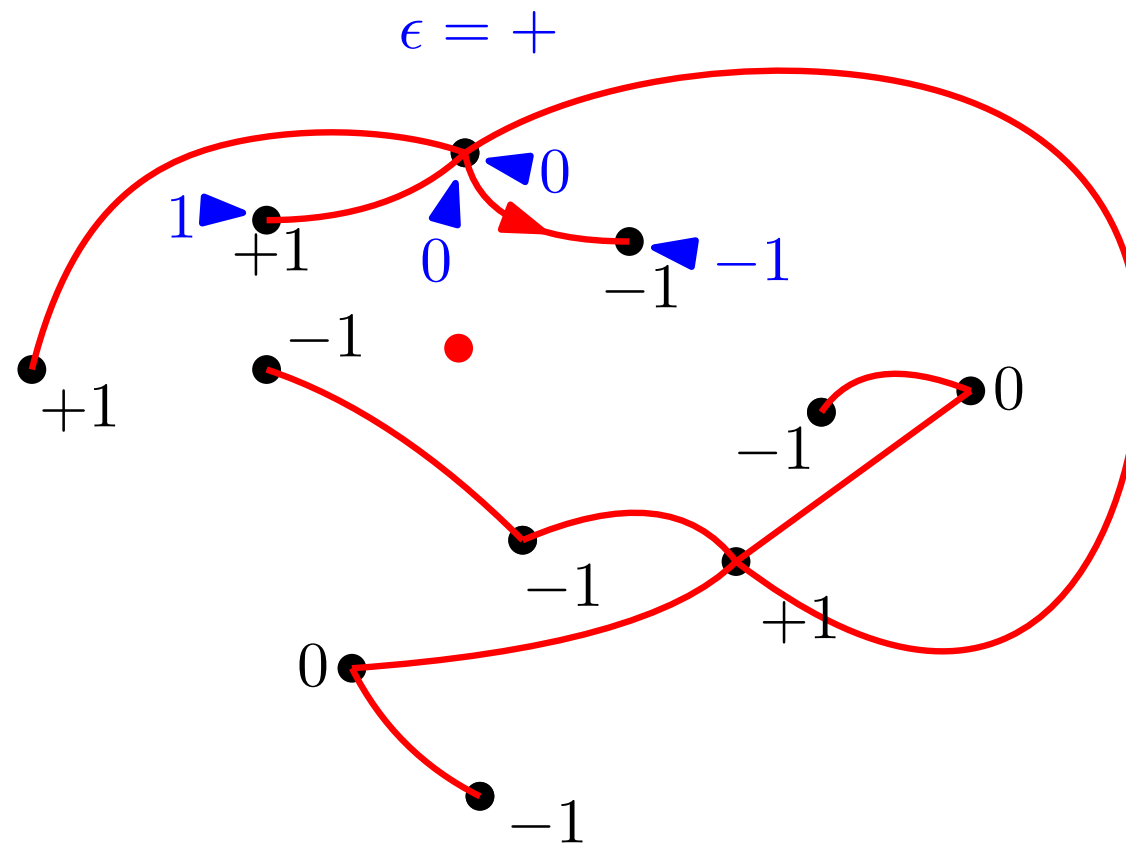
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

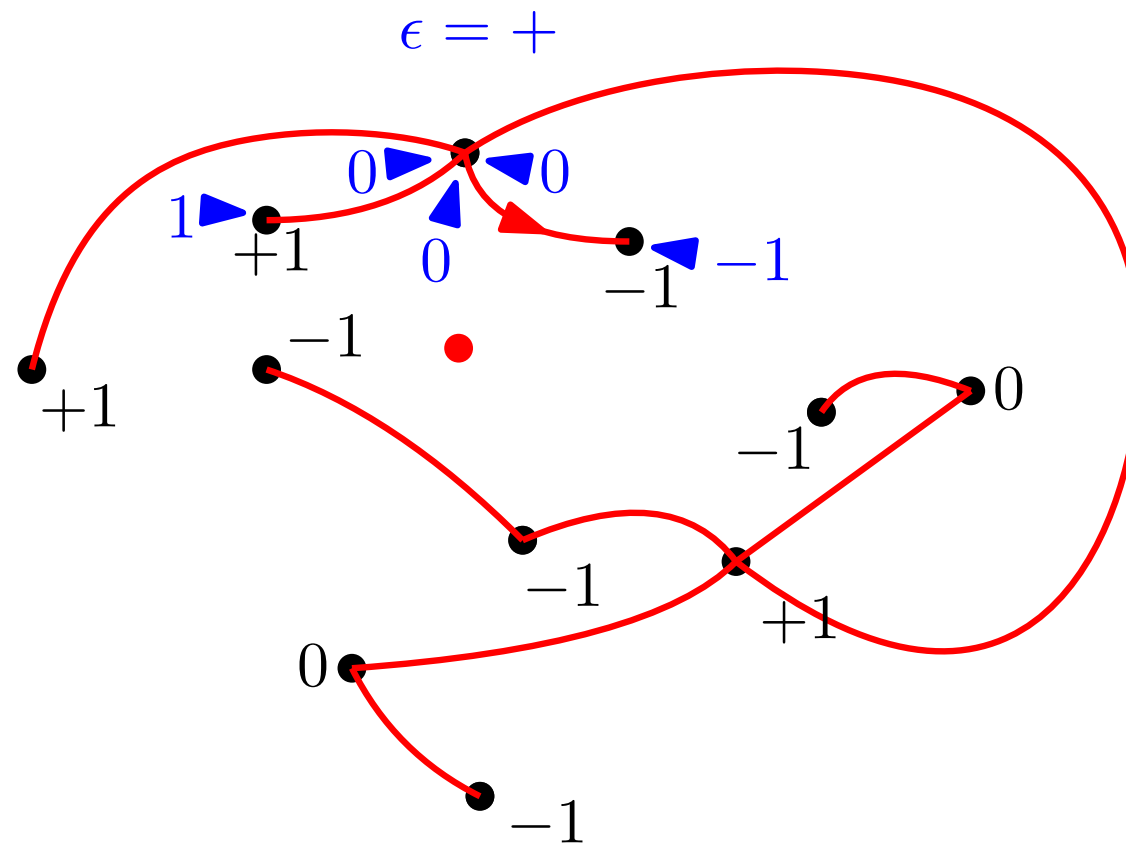
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji

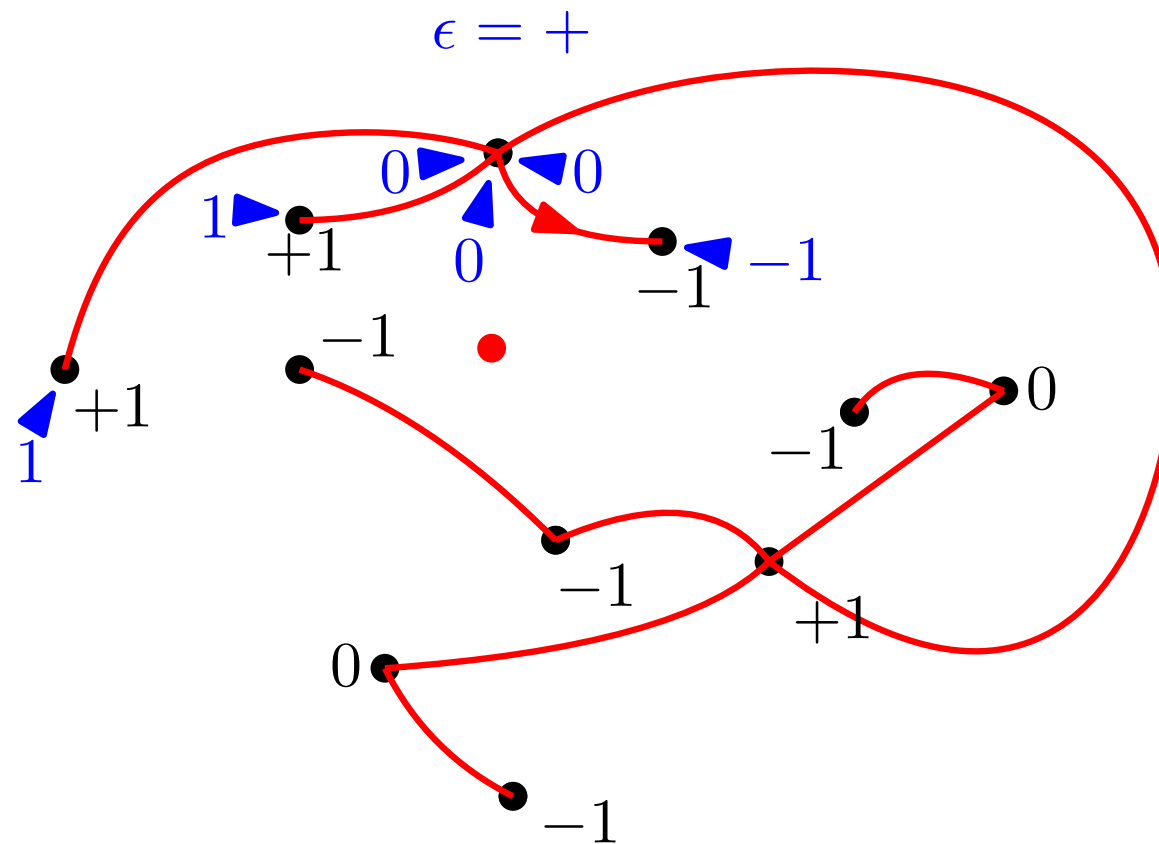




# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

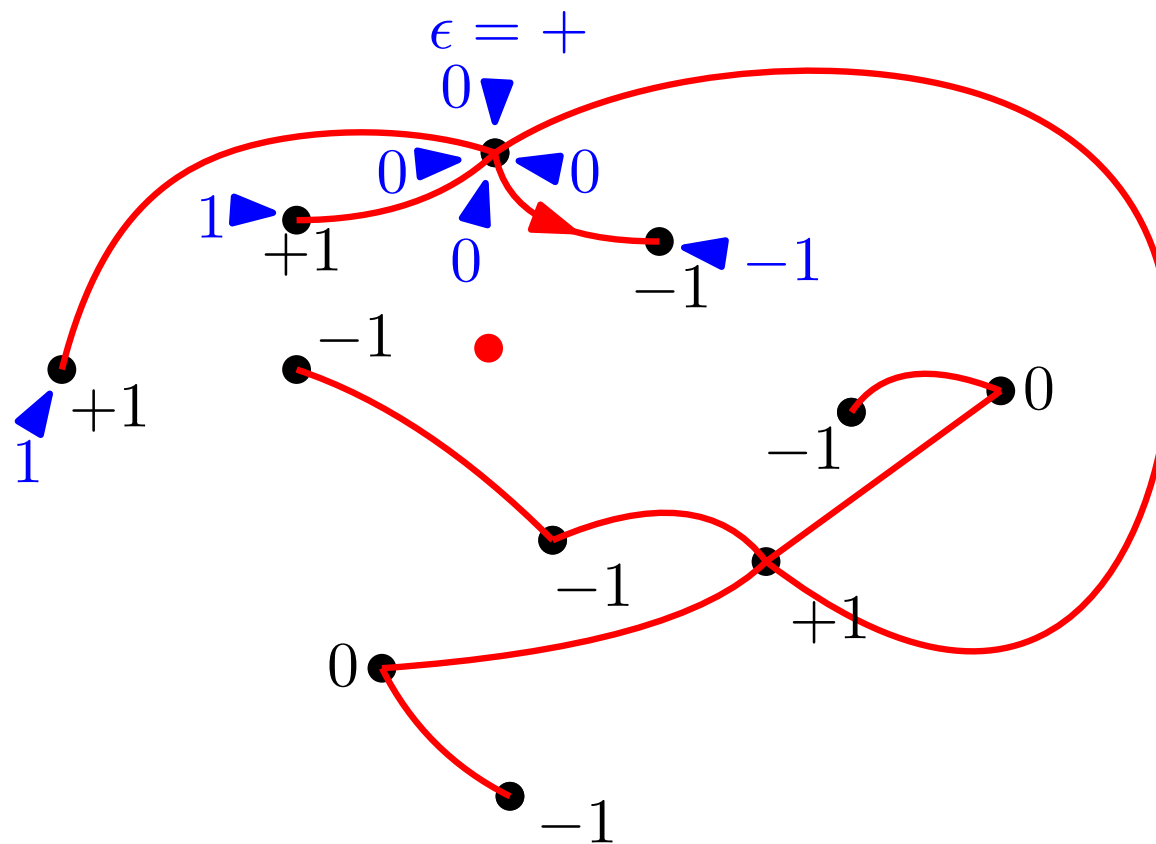
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

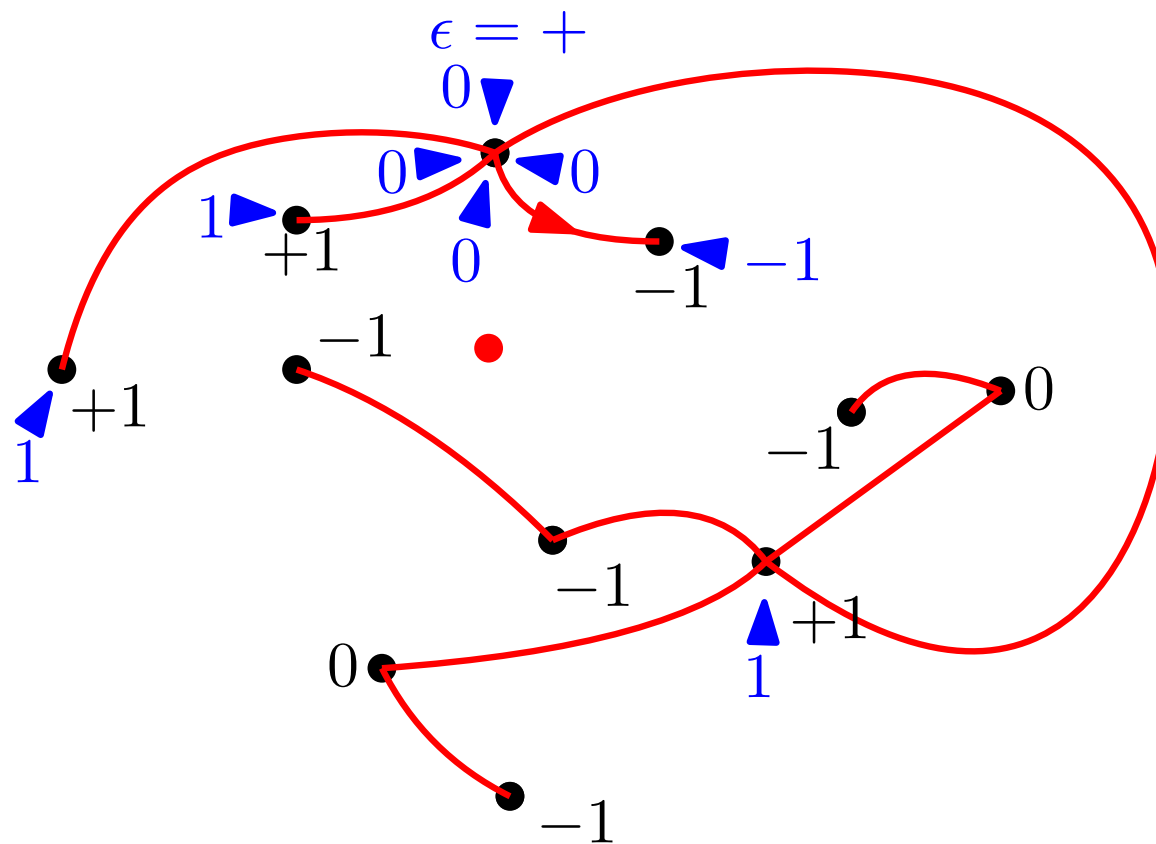
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

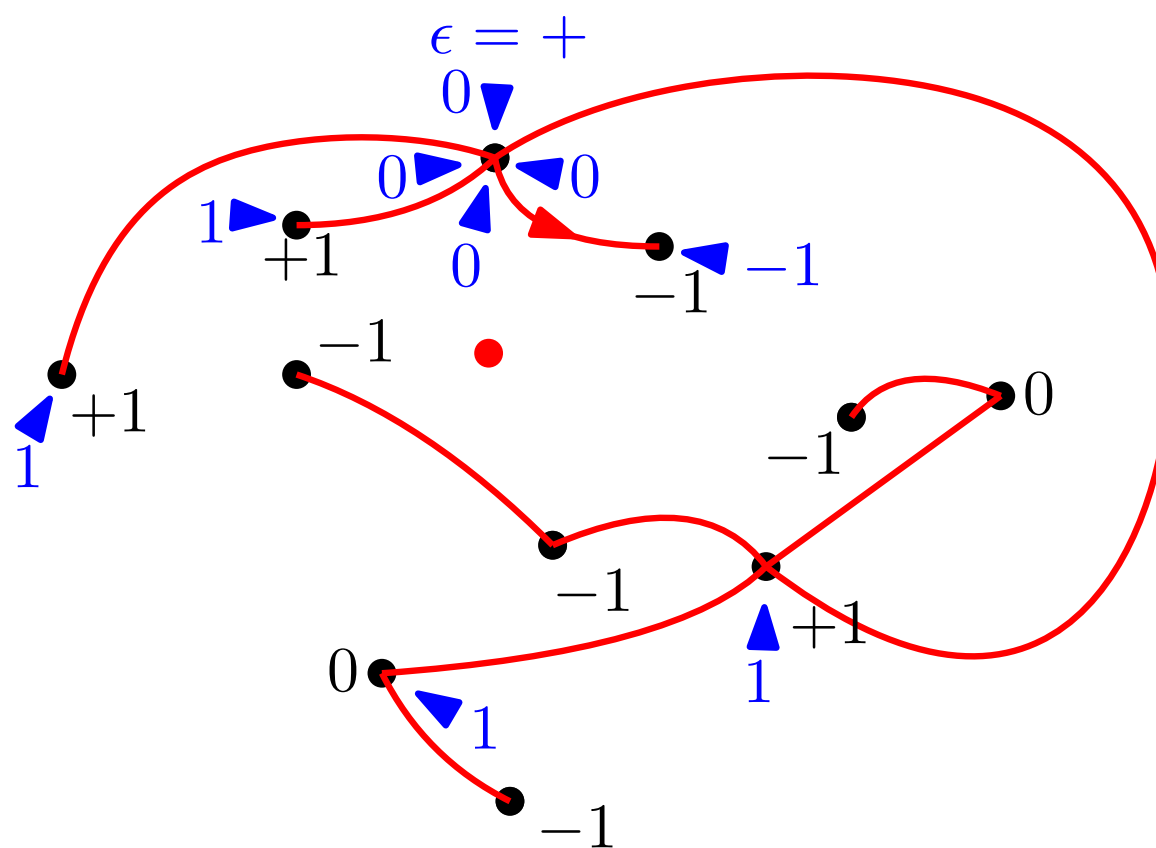
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

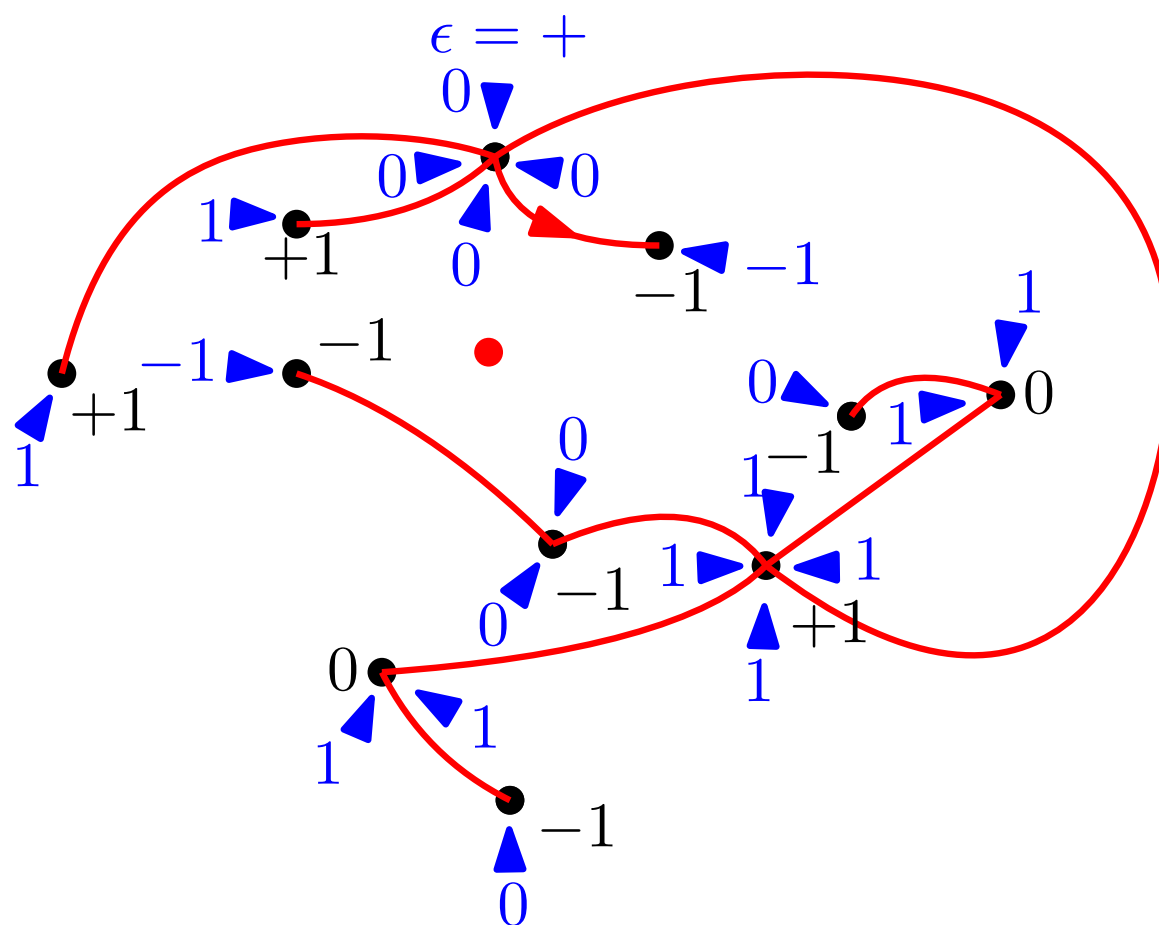
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

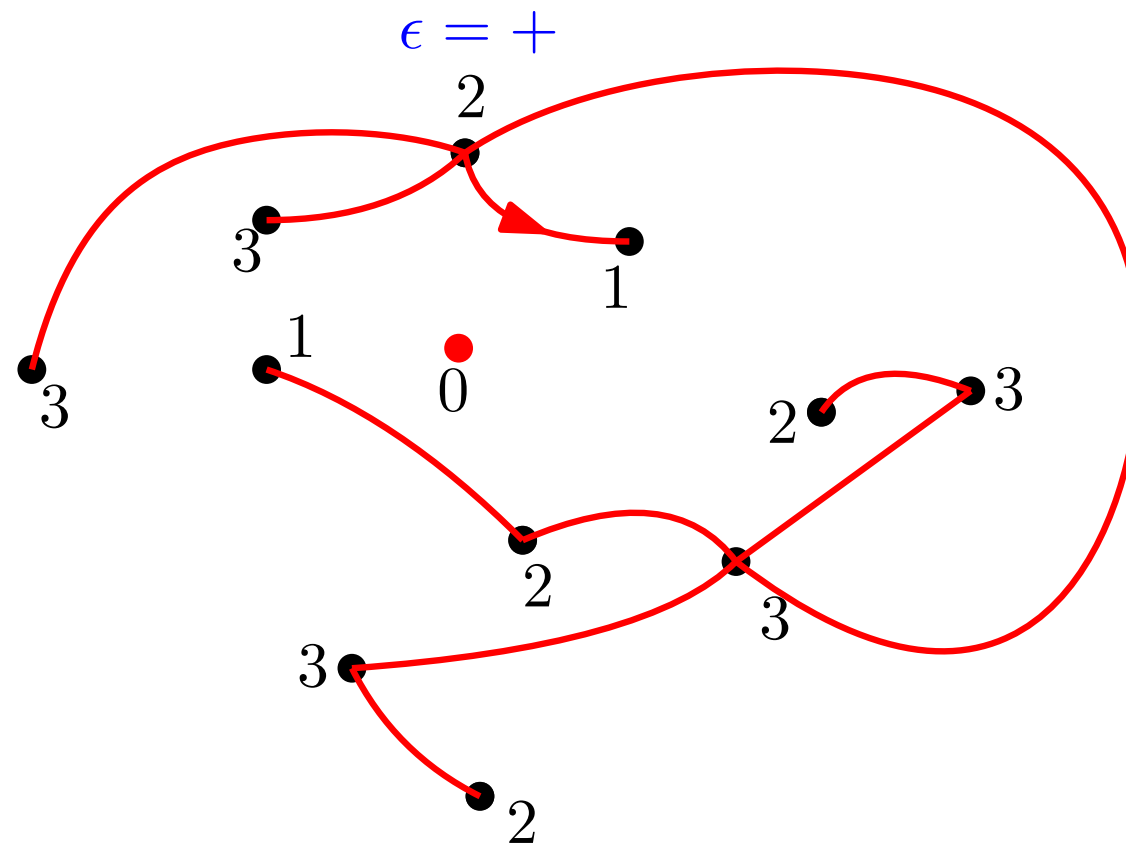
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

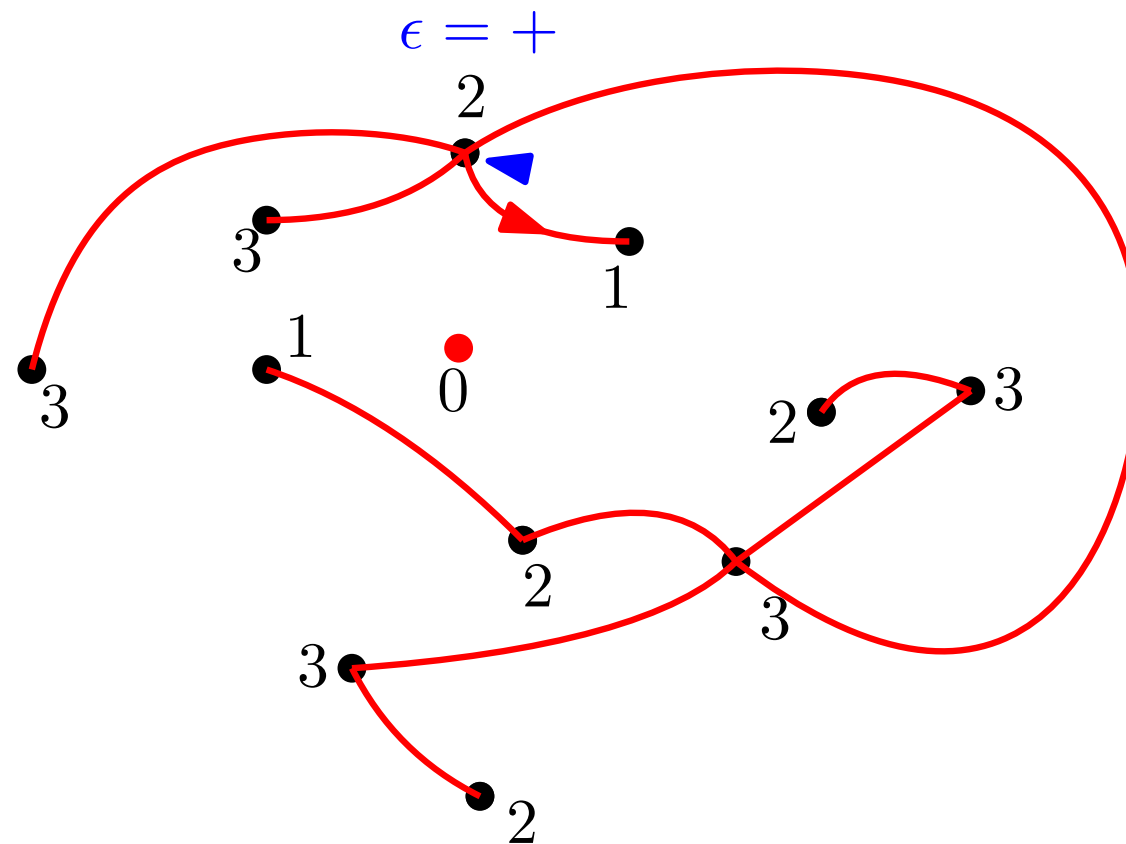
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

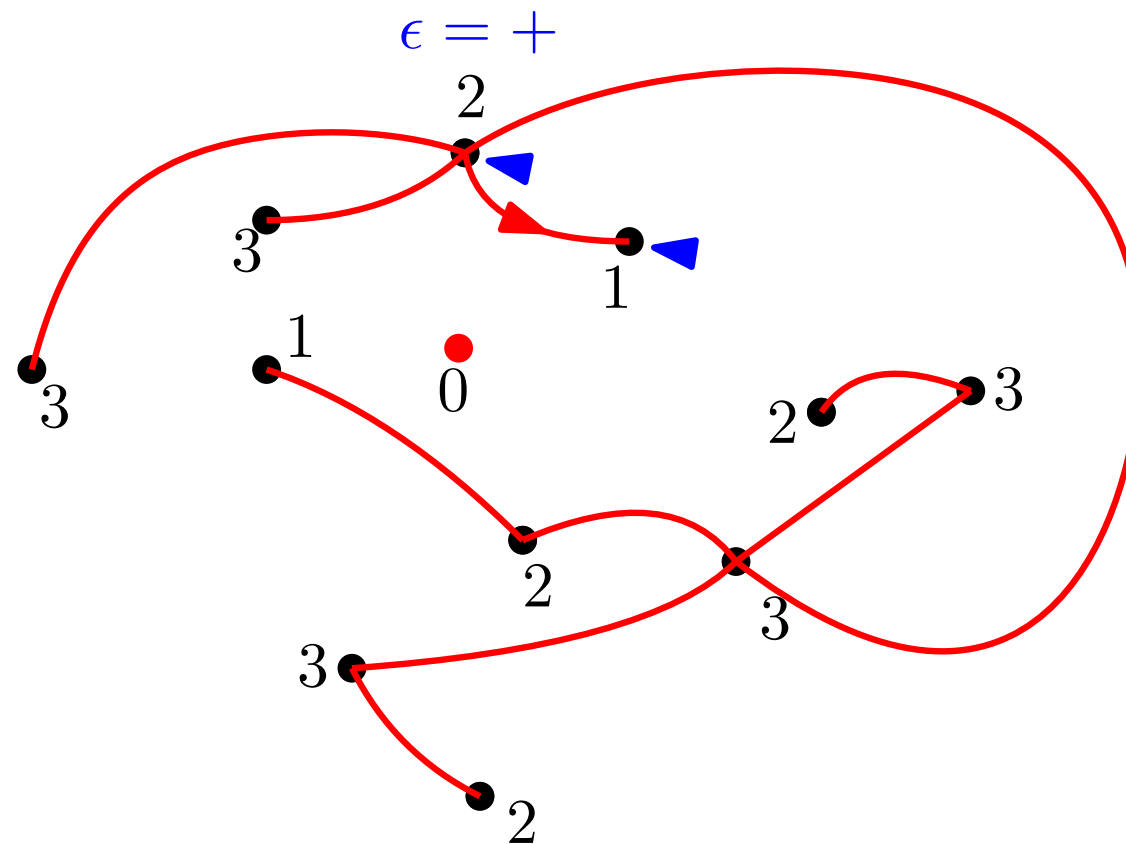
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji

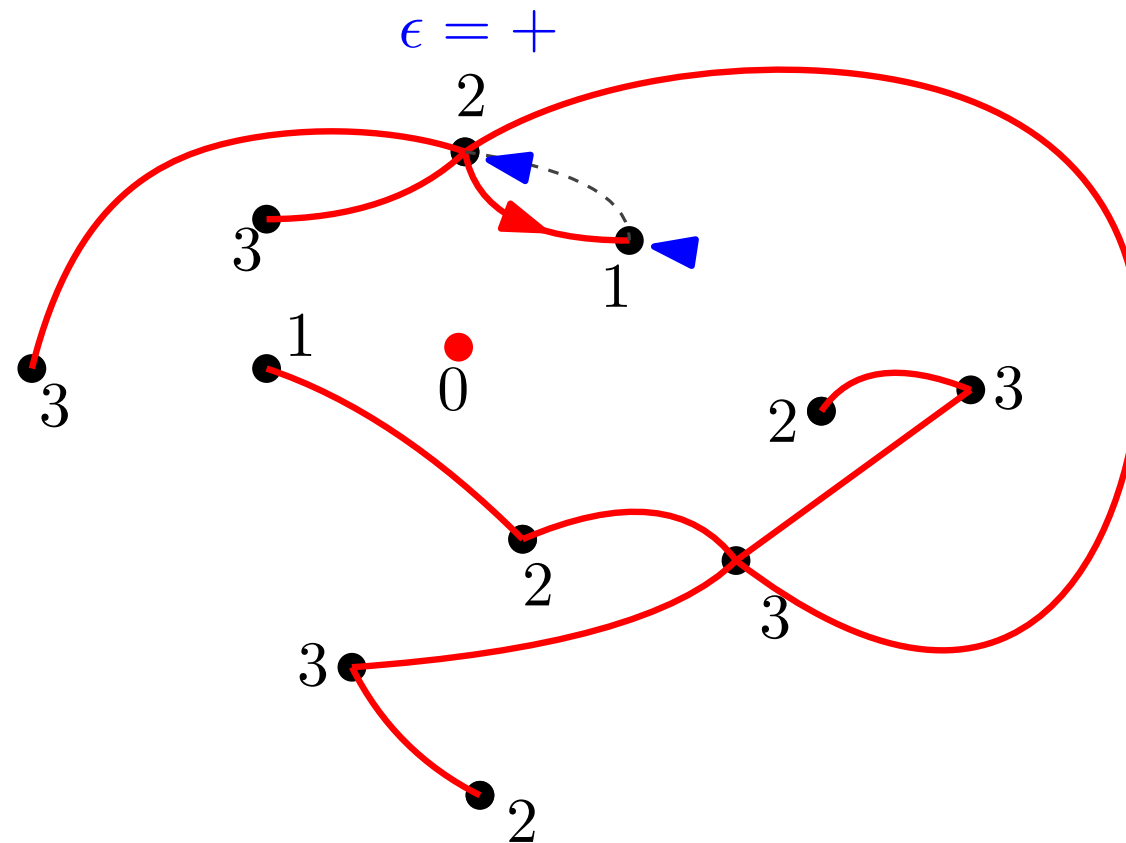




# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

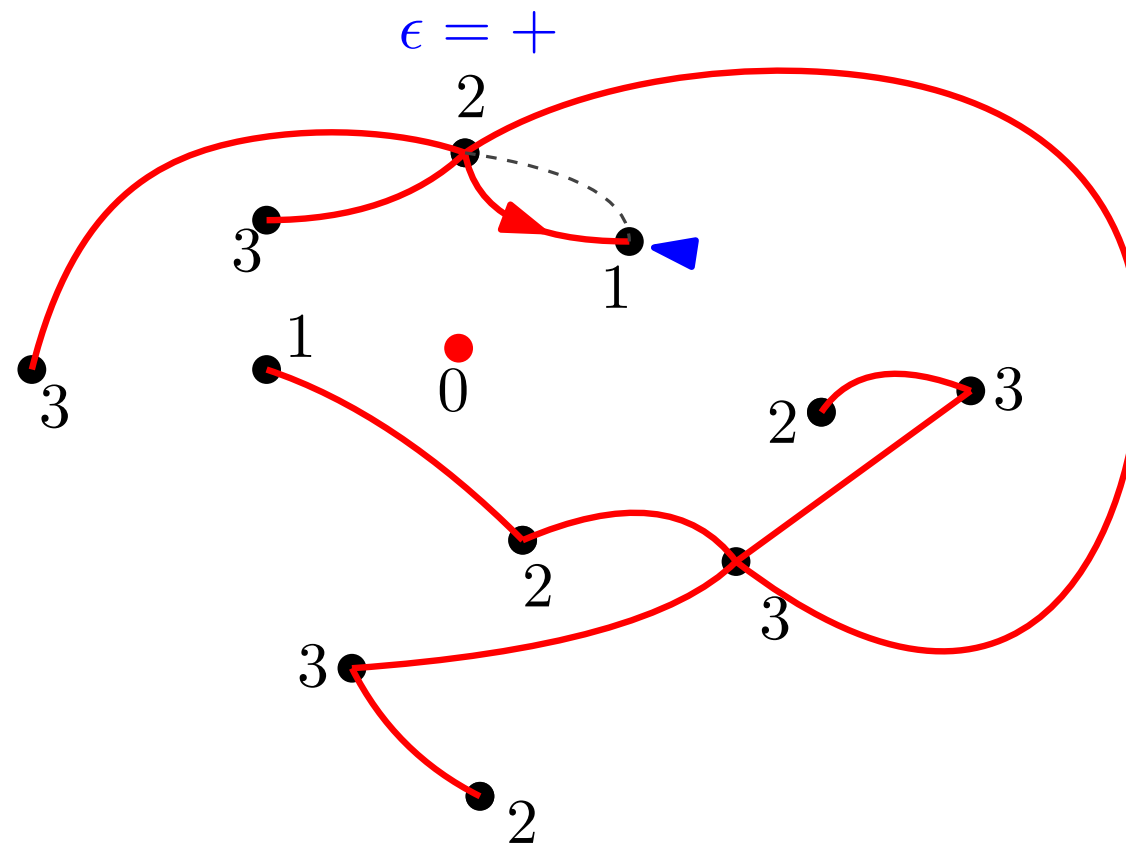
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

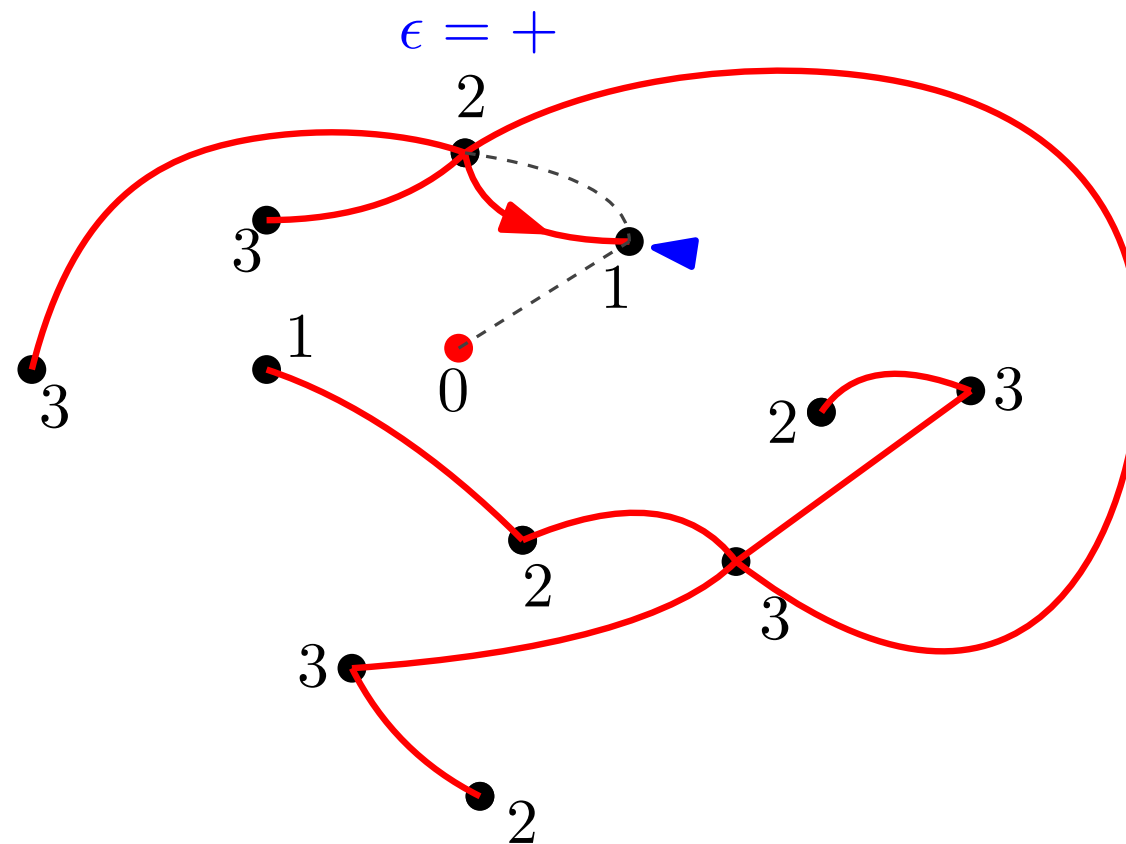
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

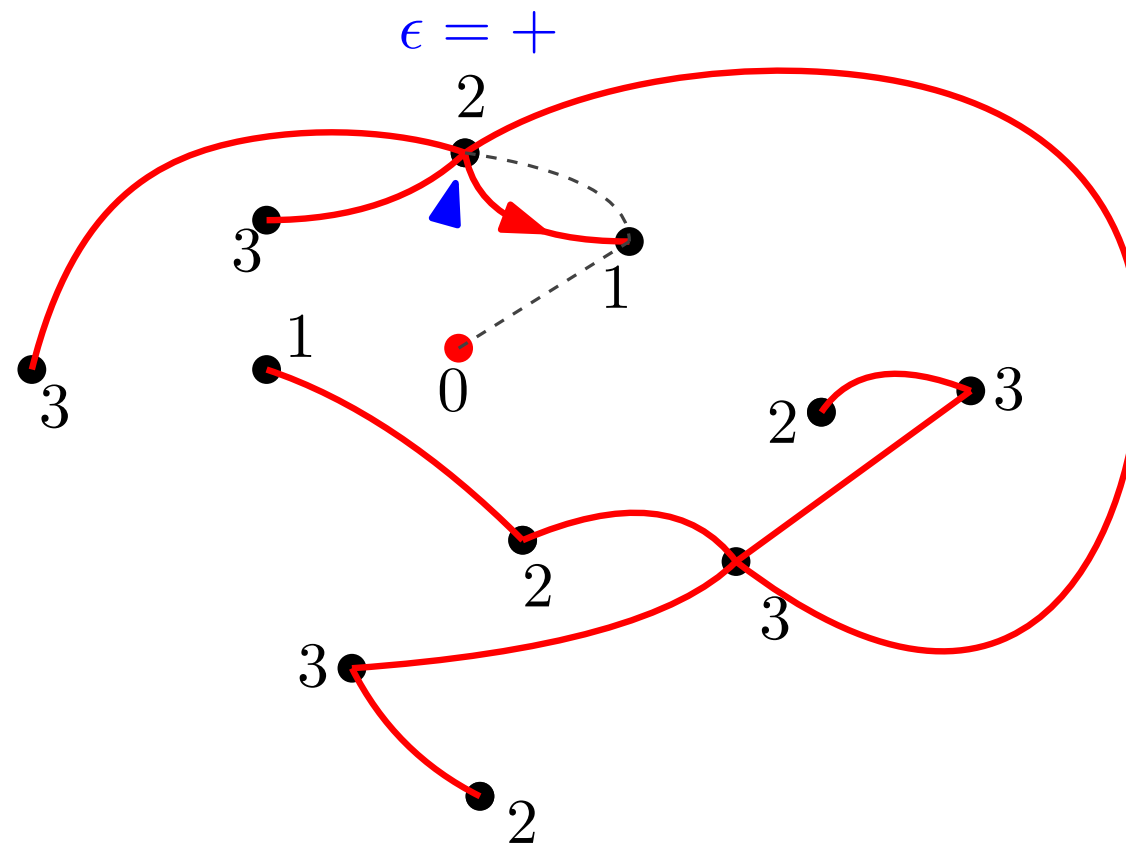
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

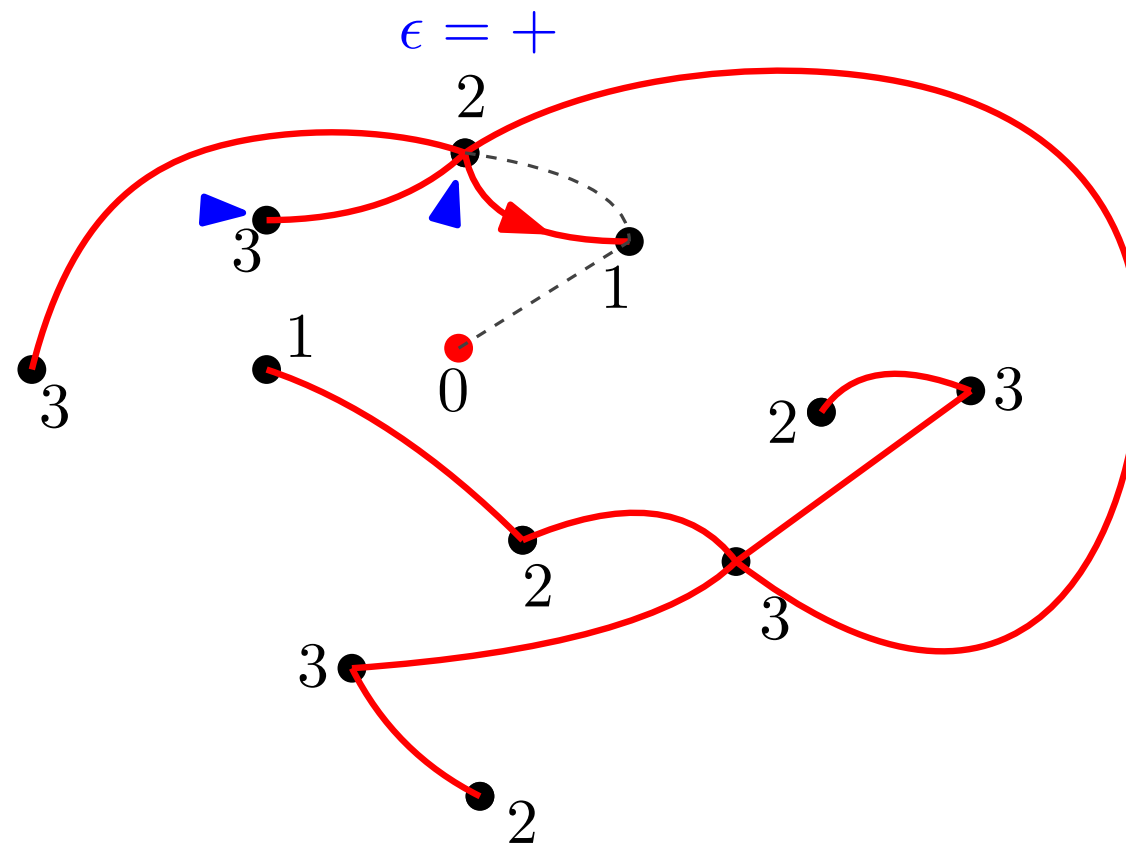
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

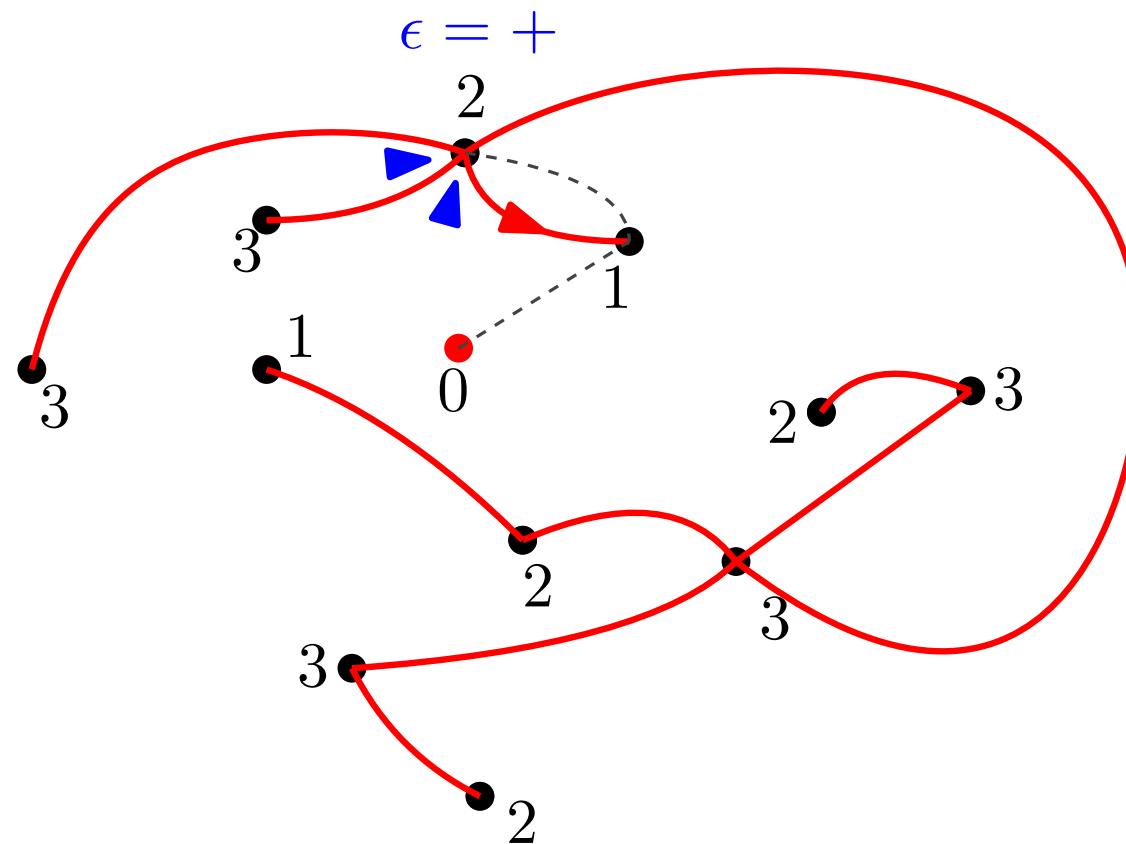
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

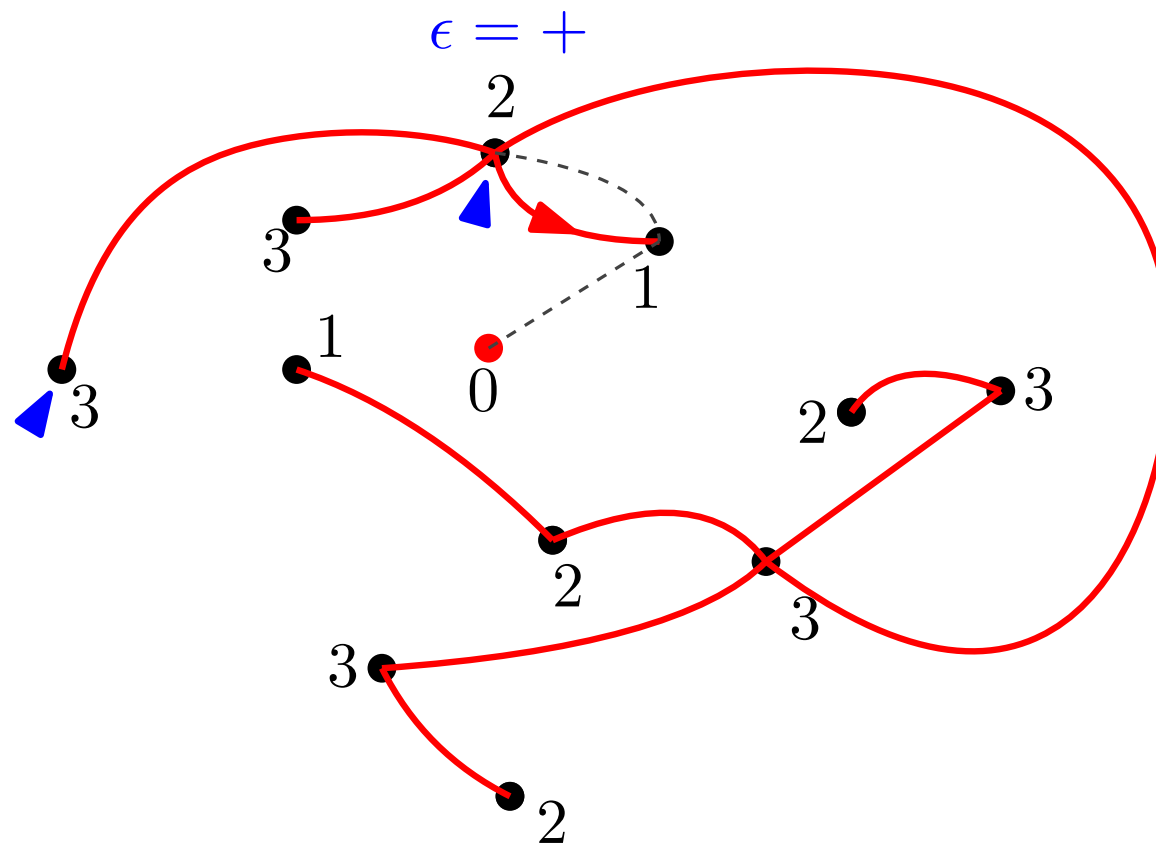
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

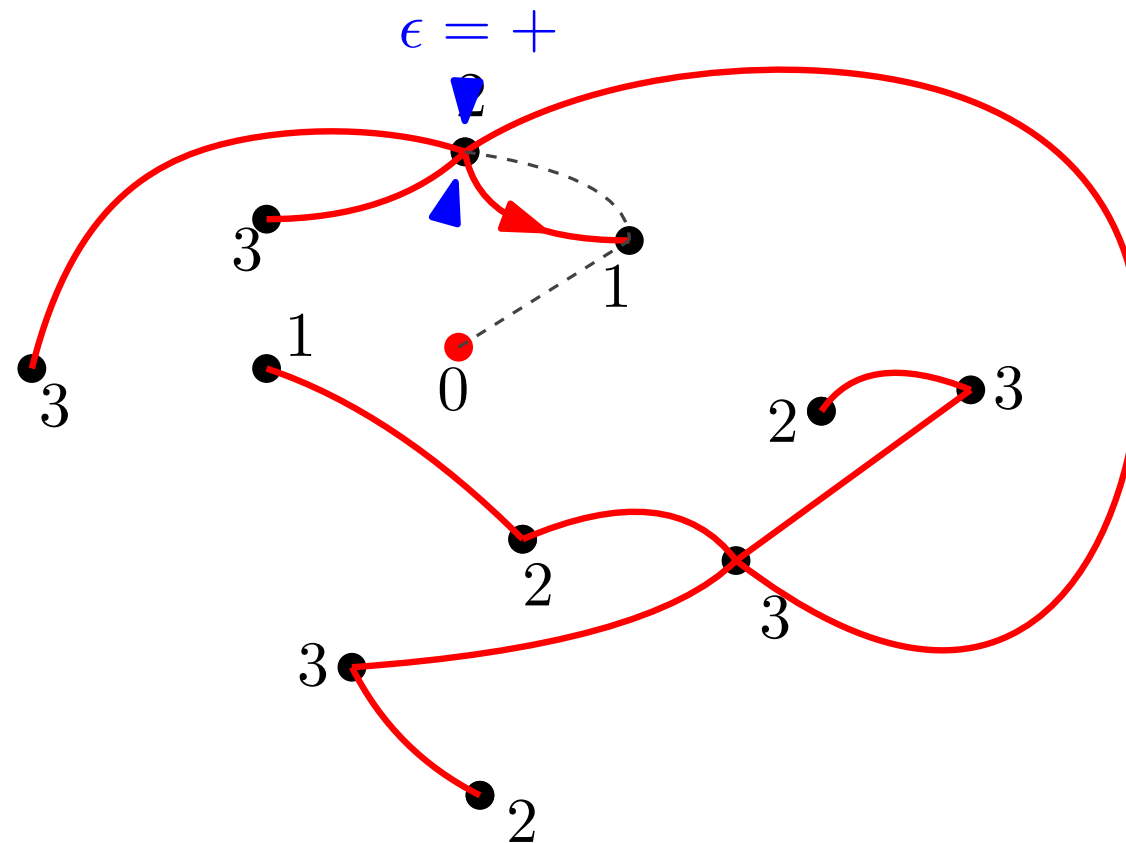
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji

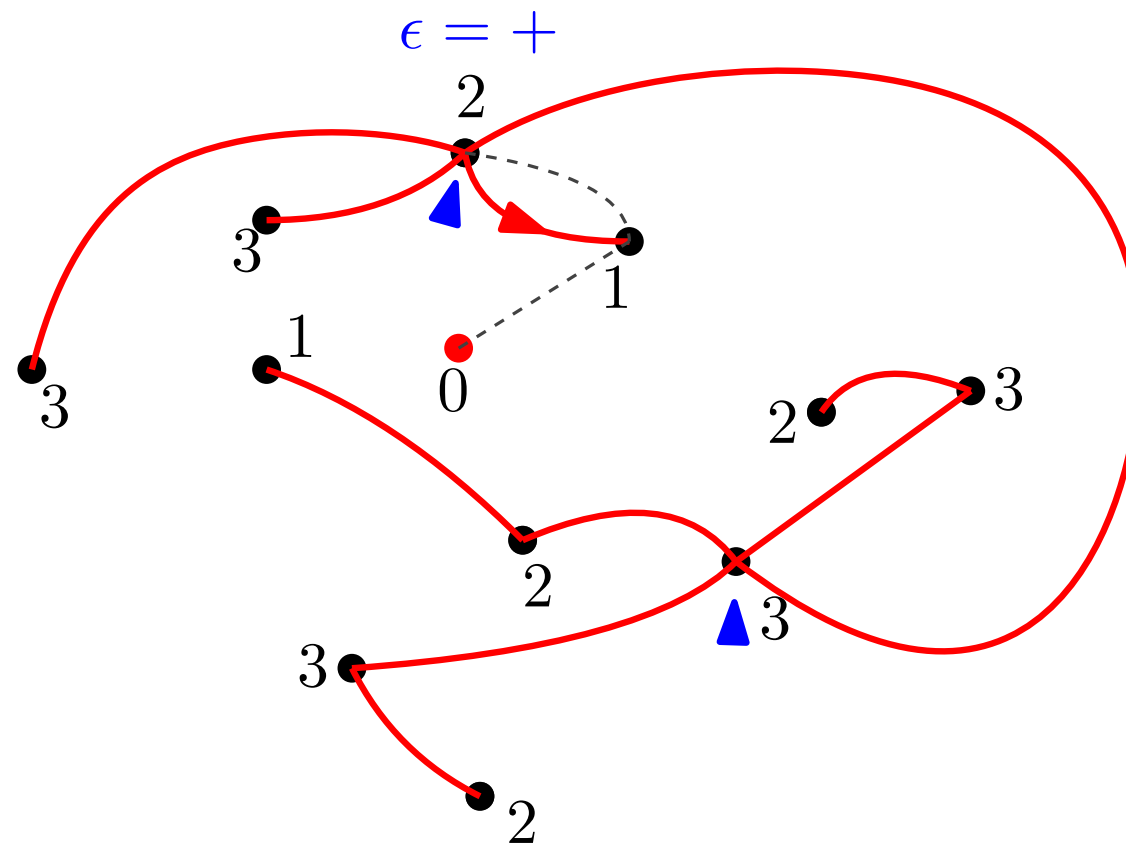




# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

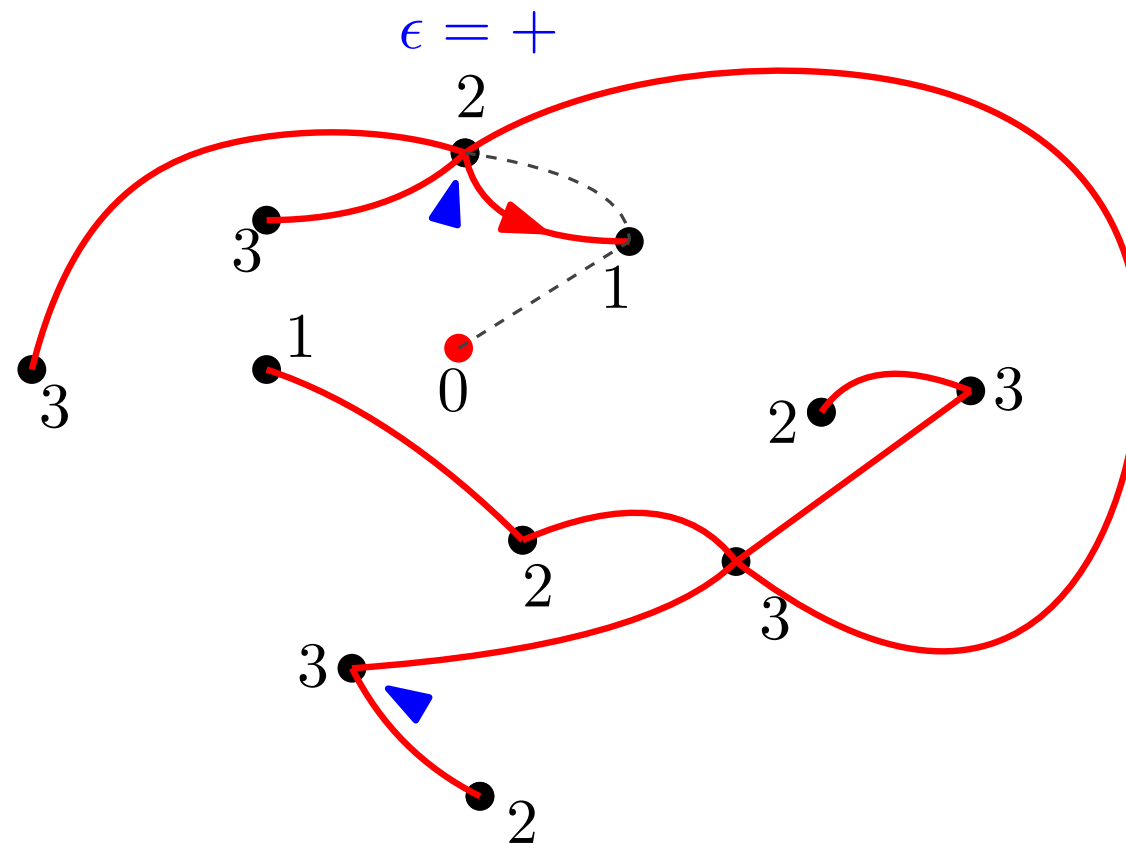
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

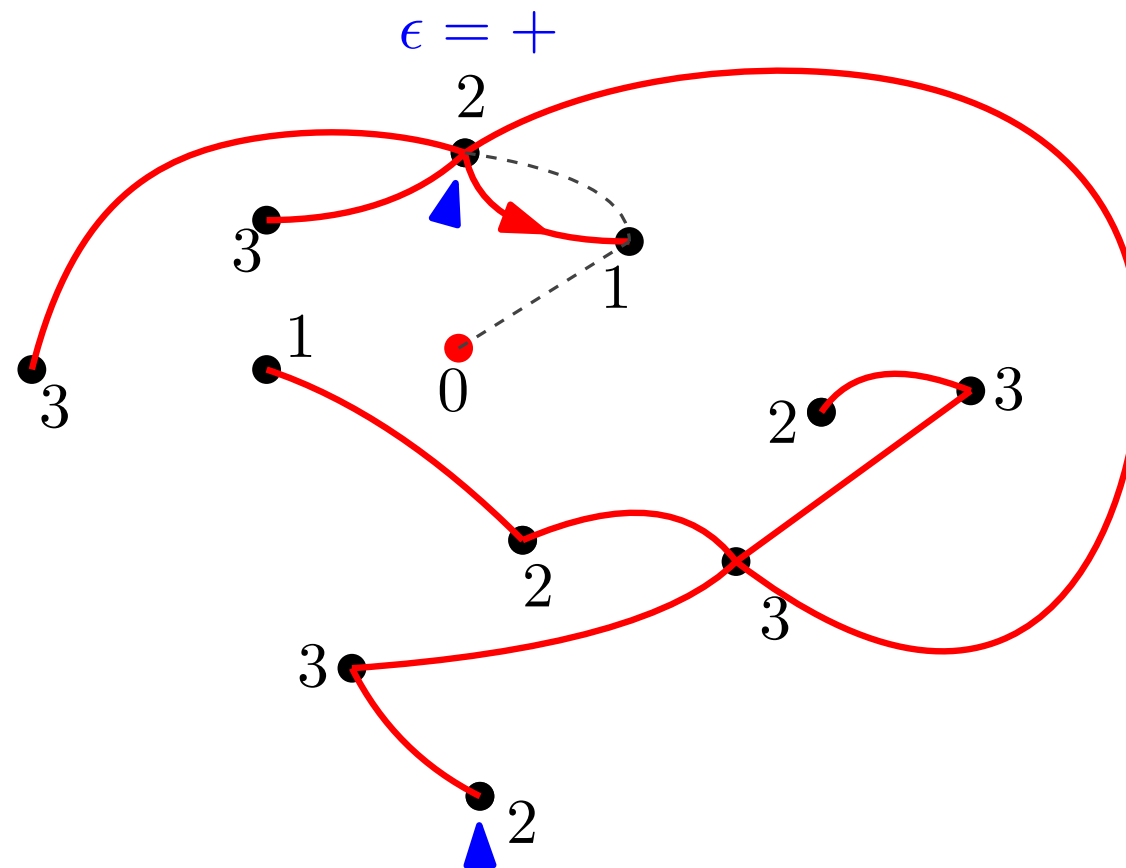
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

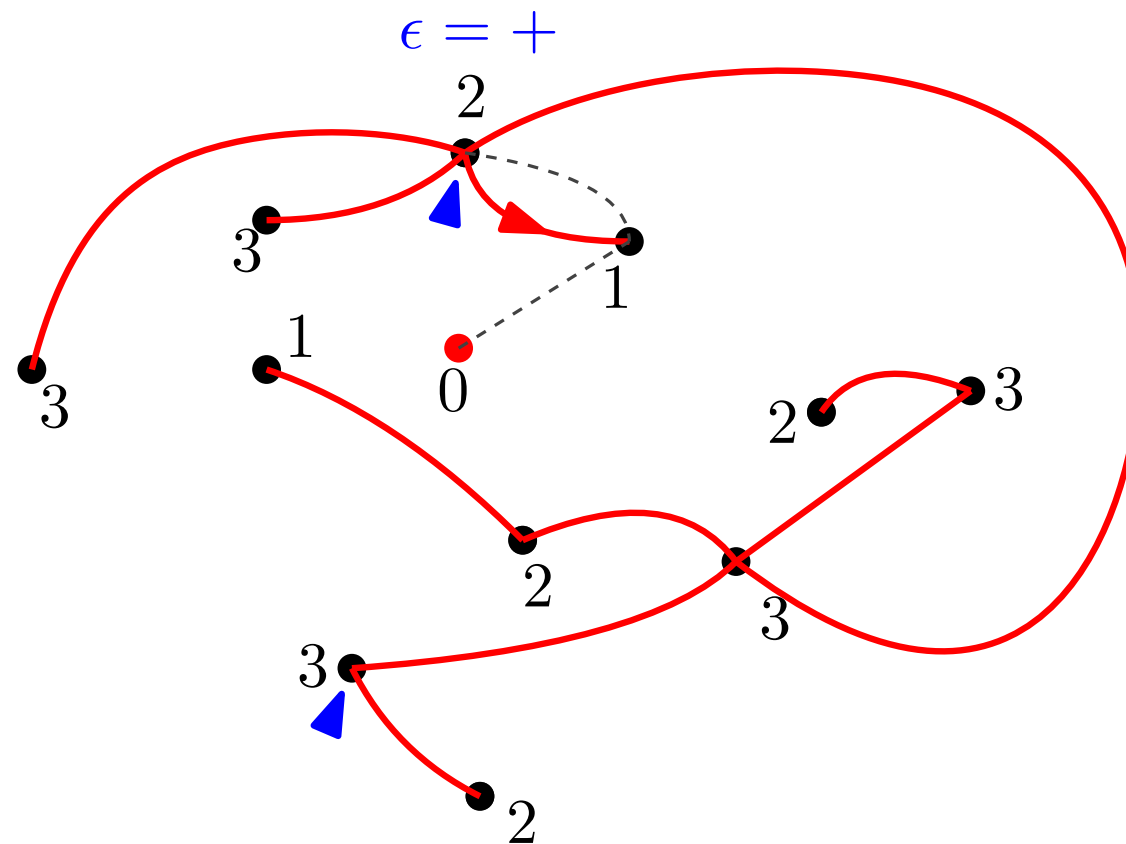
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

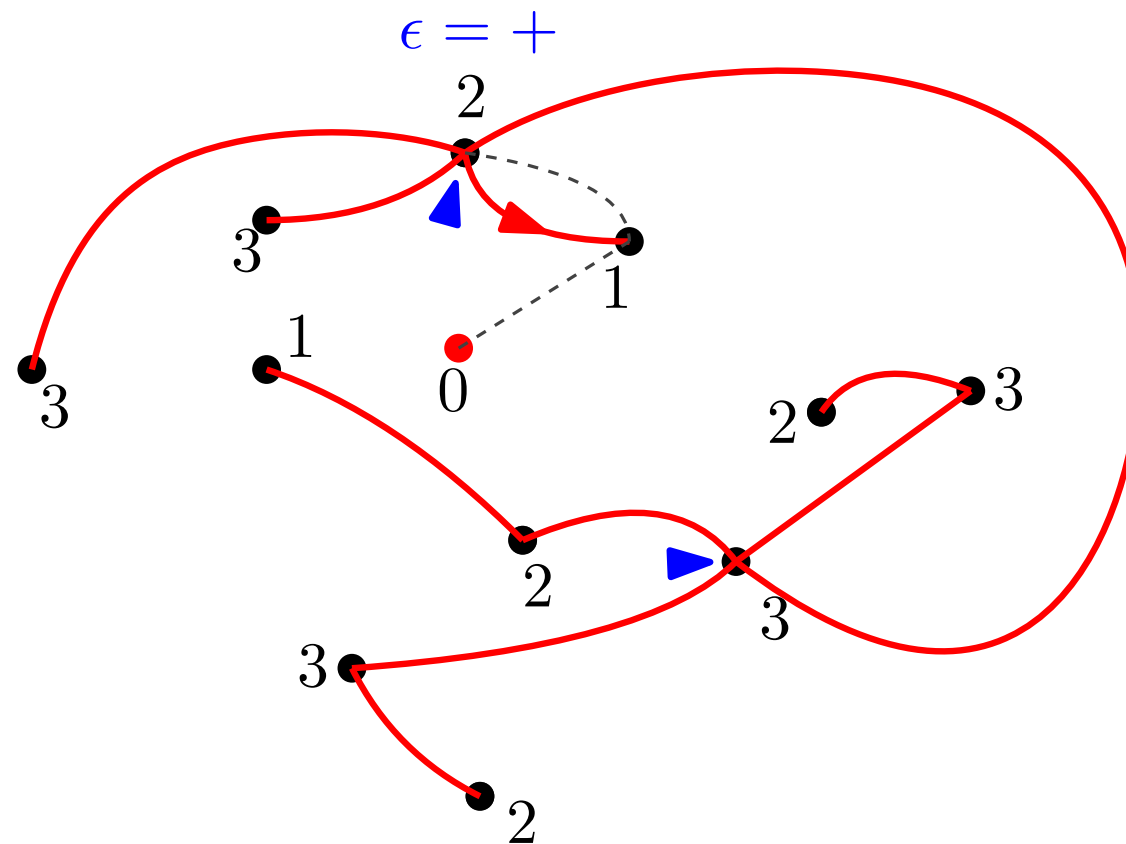
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

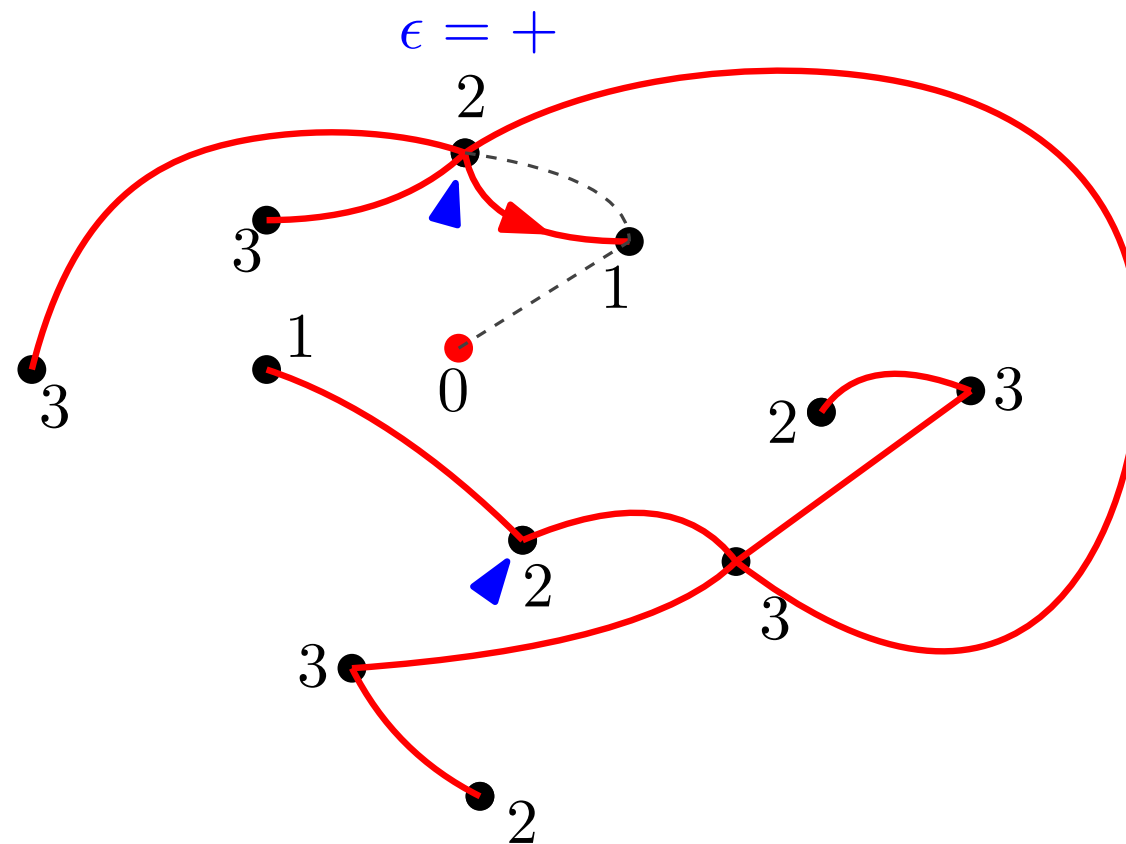
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

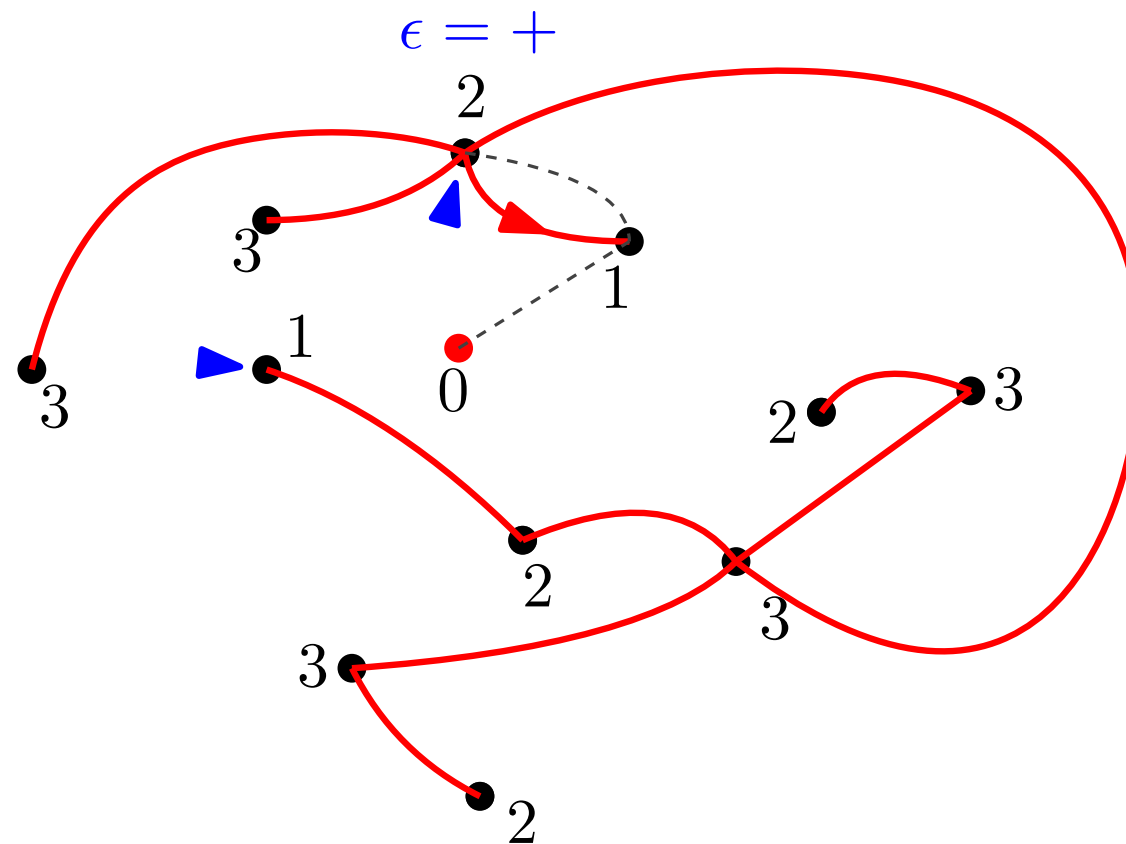
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

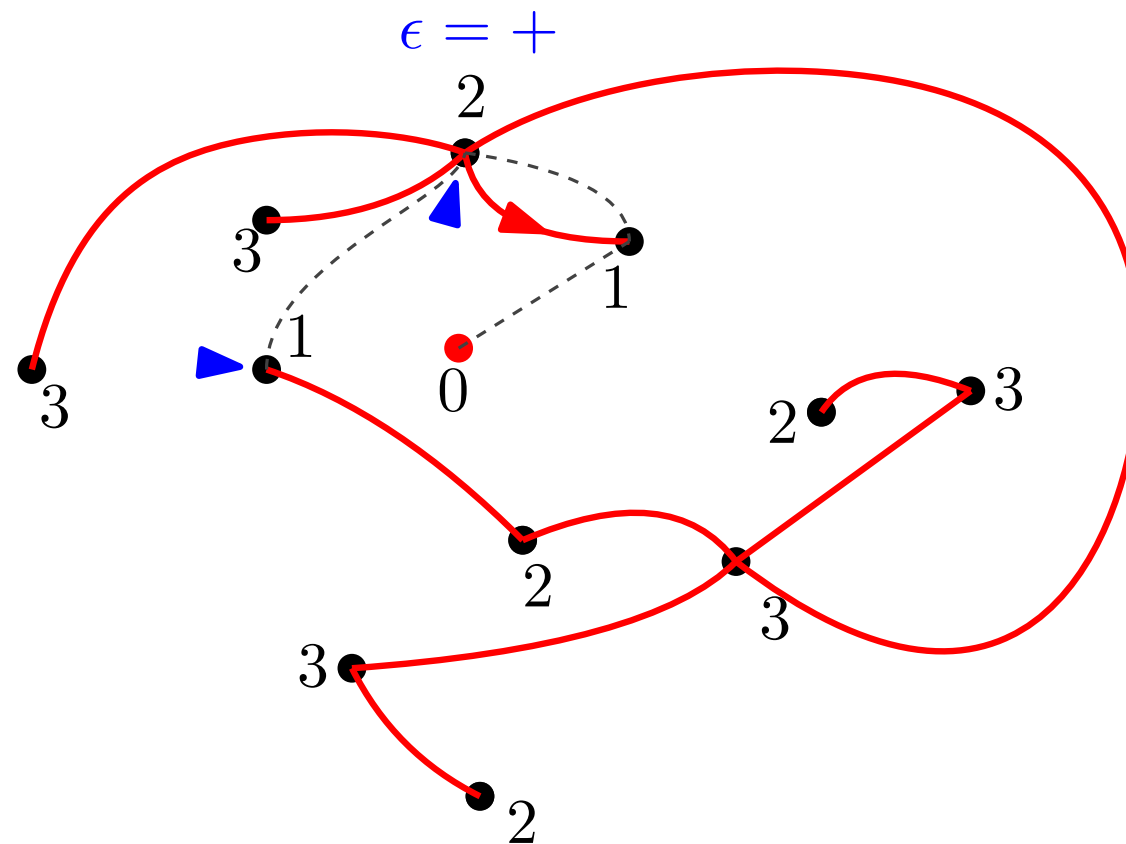
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji

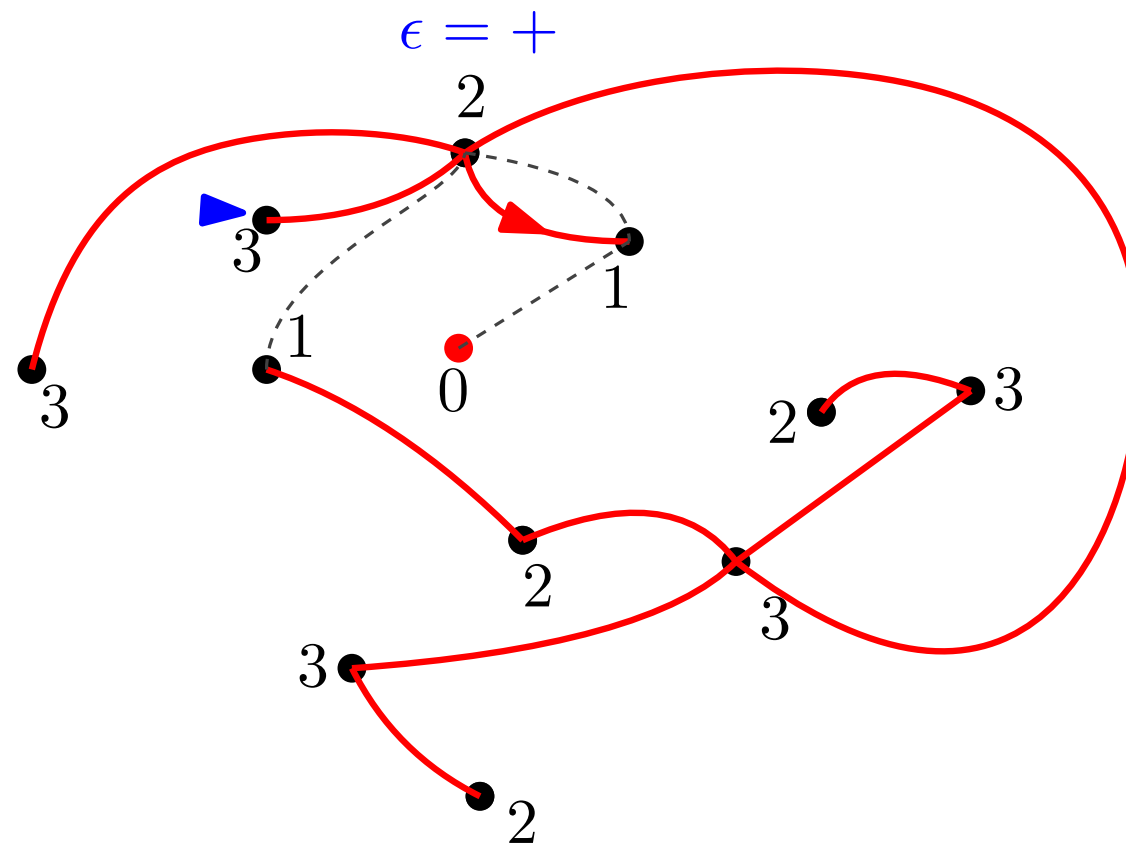




# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

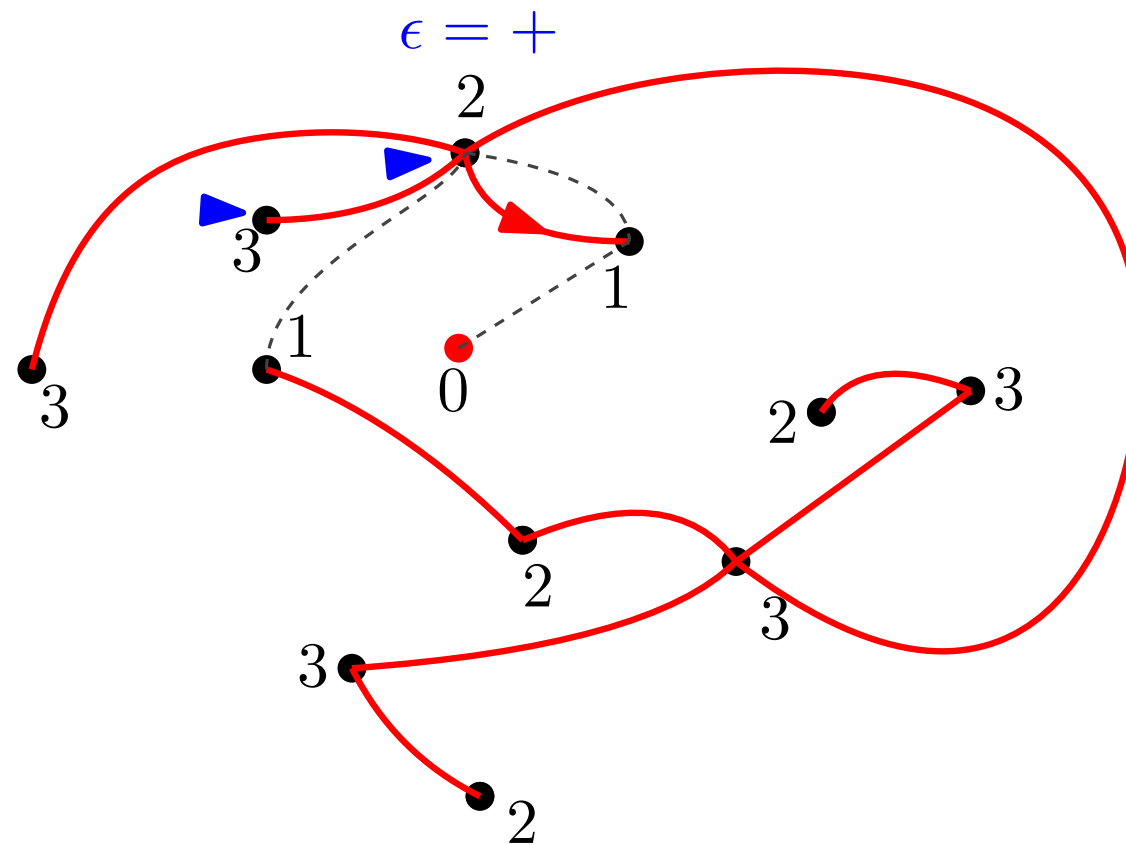
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

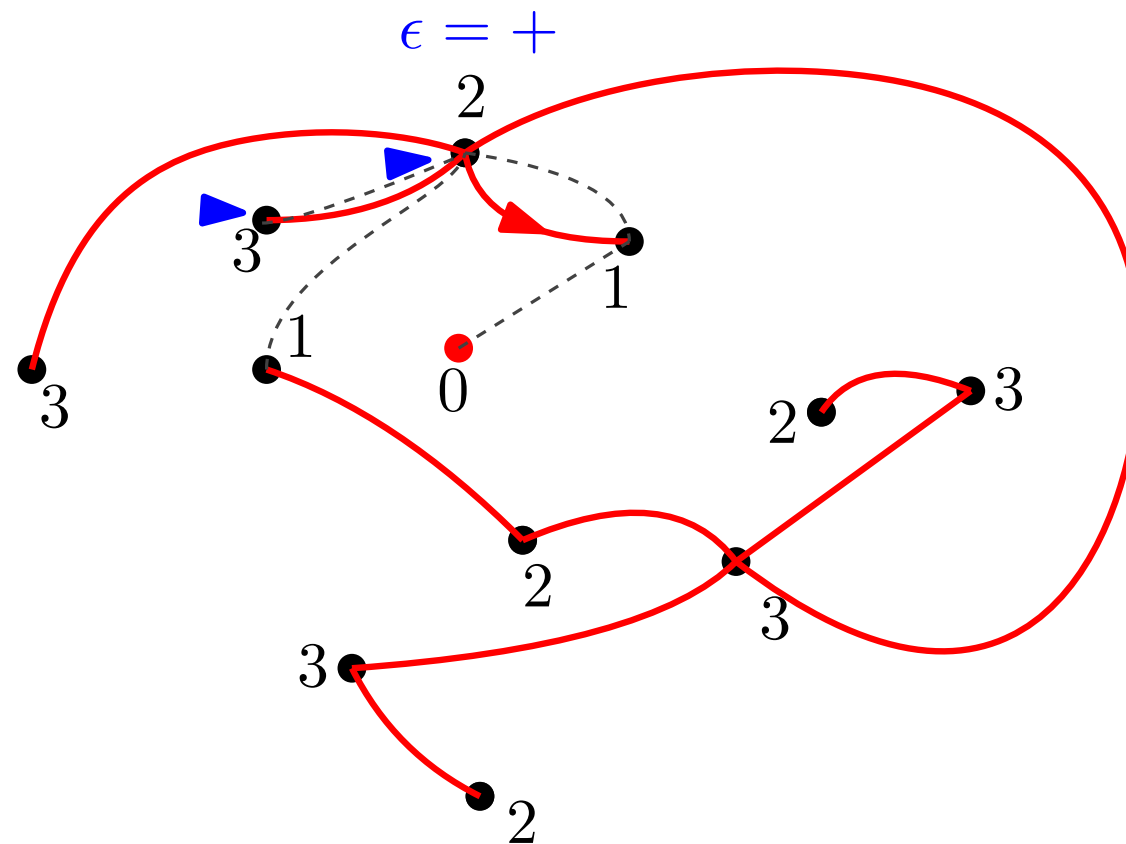
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

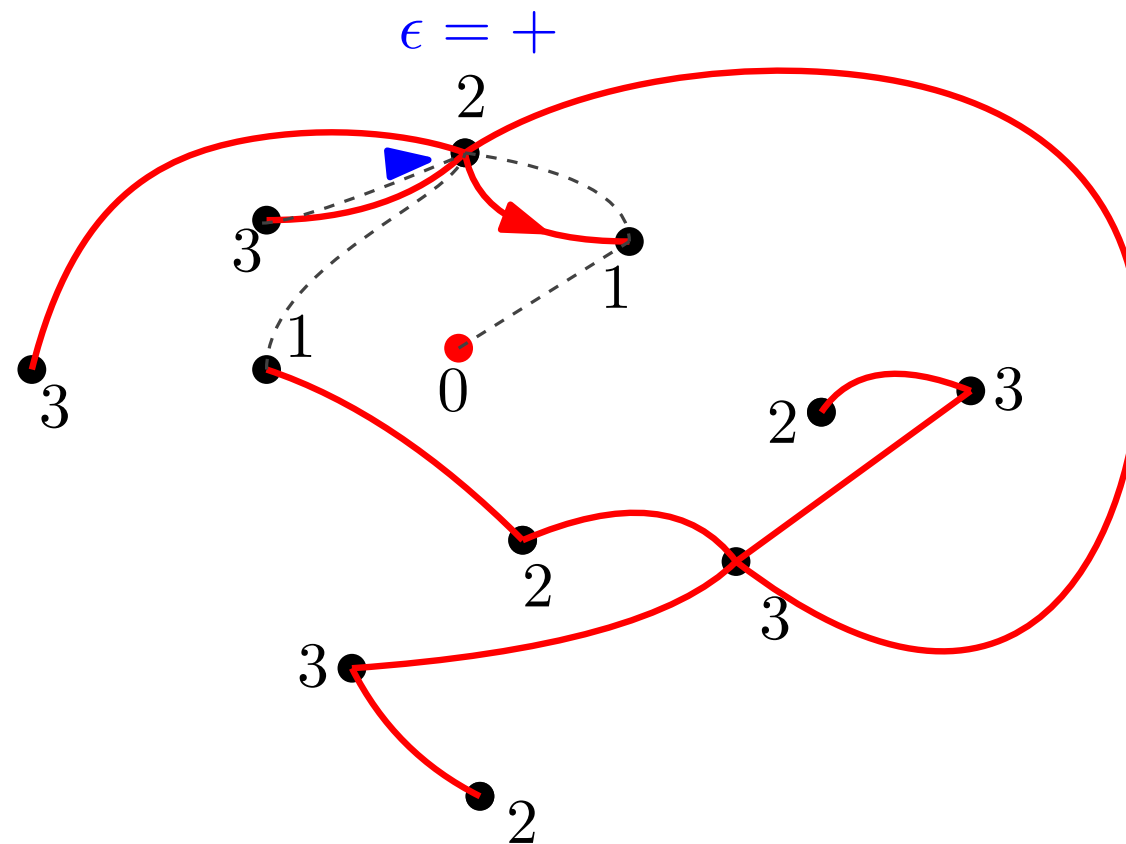
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

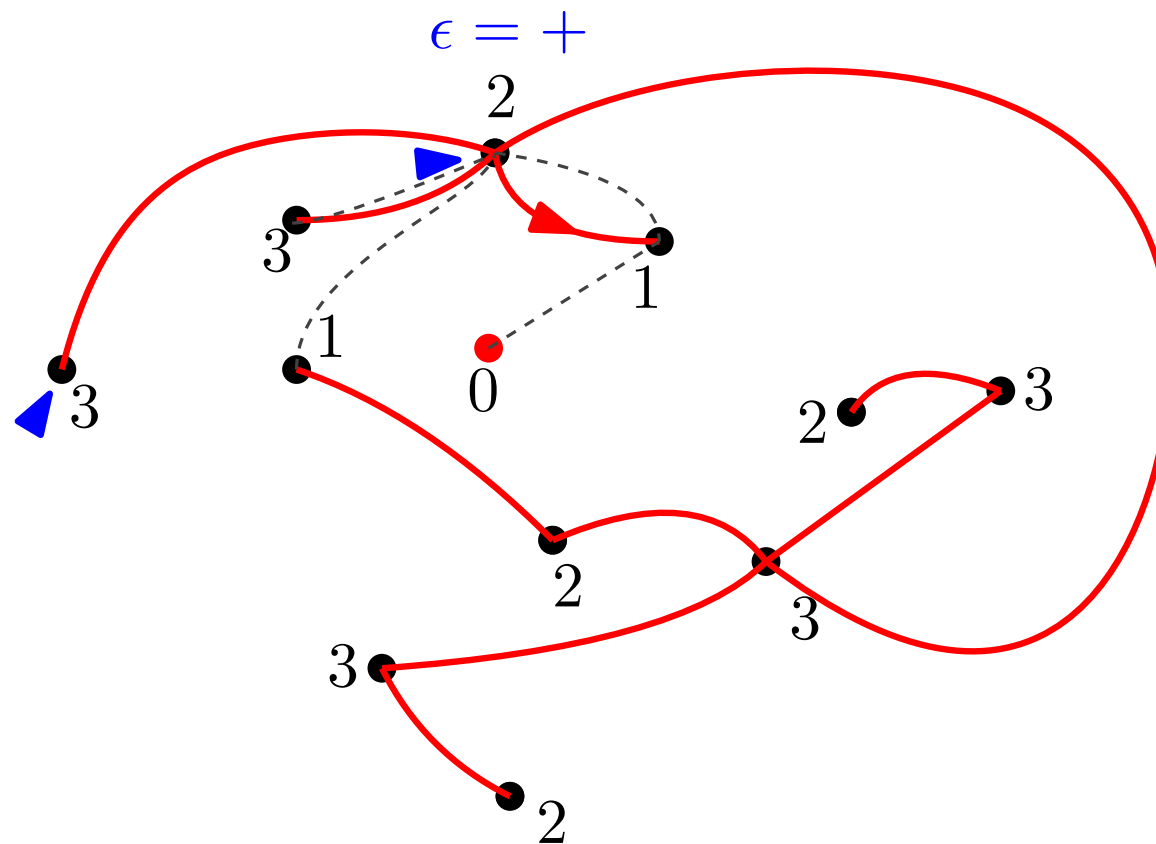
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

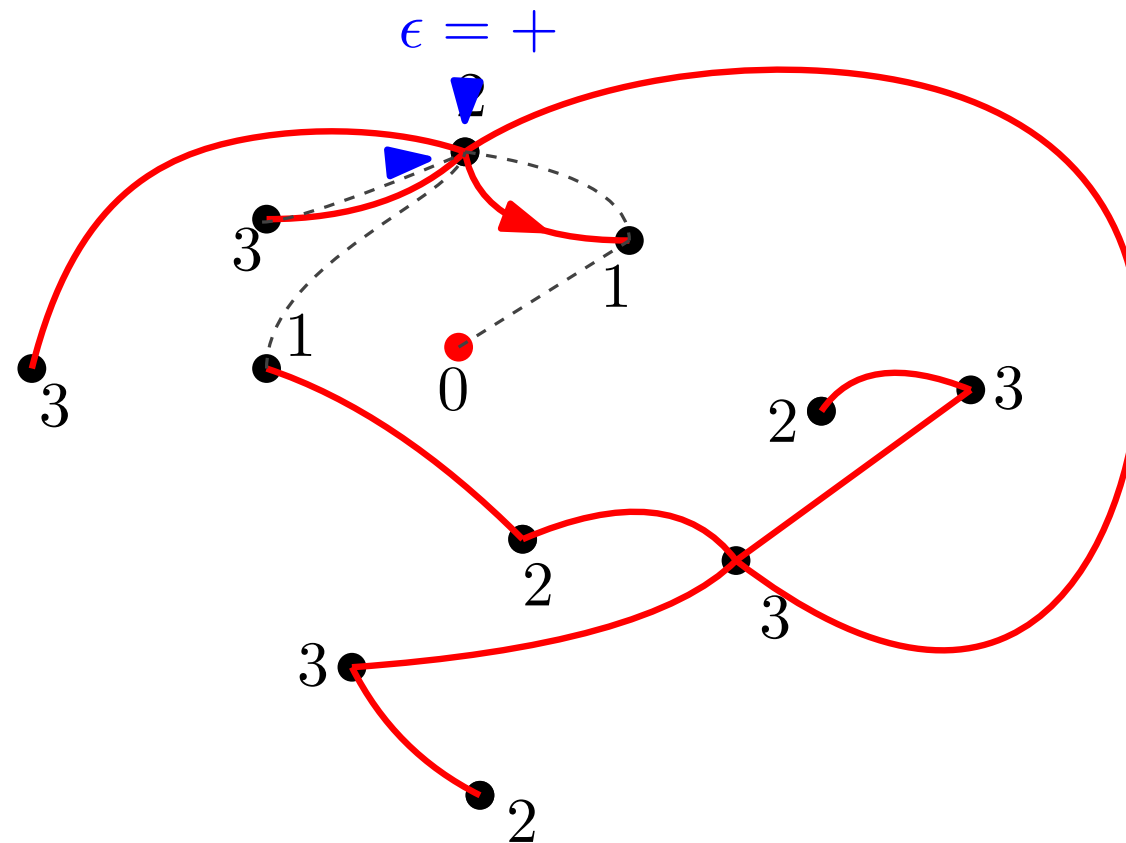
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

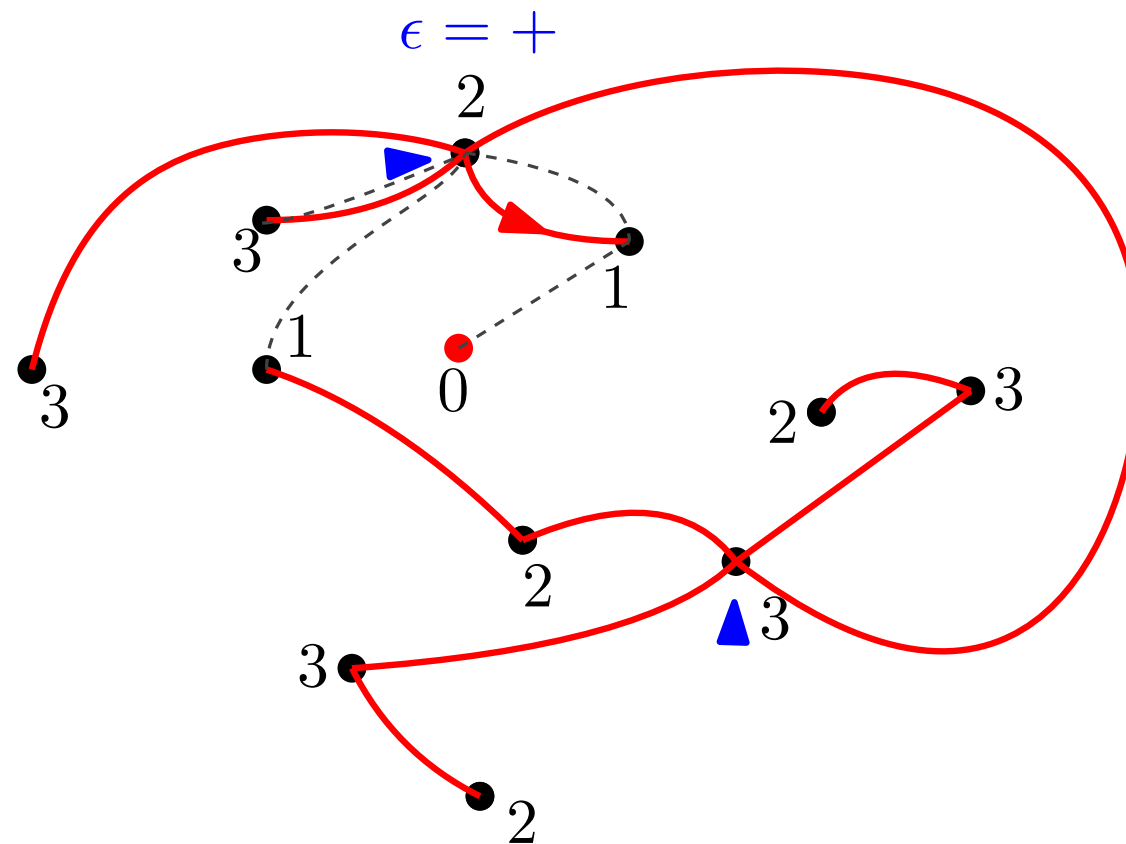
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

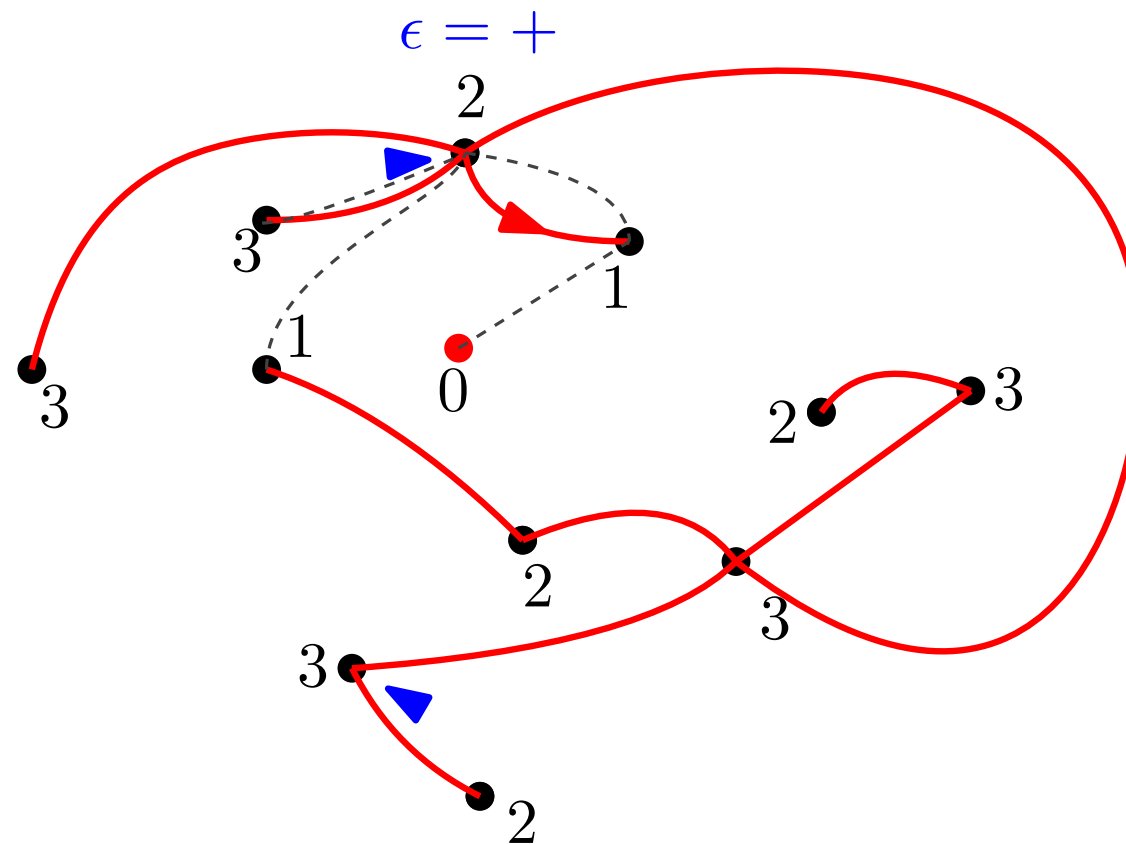
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji

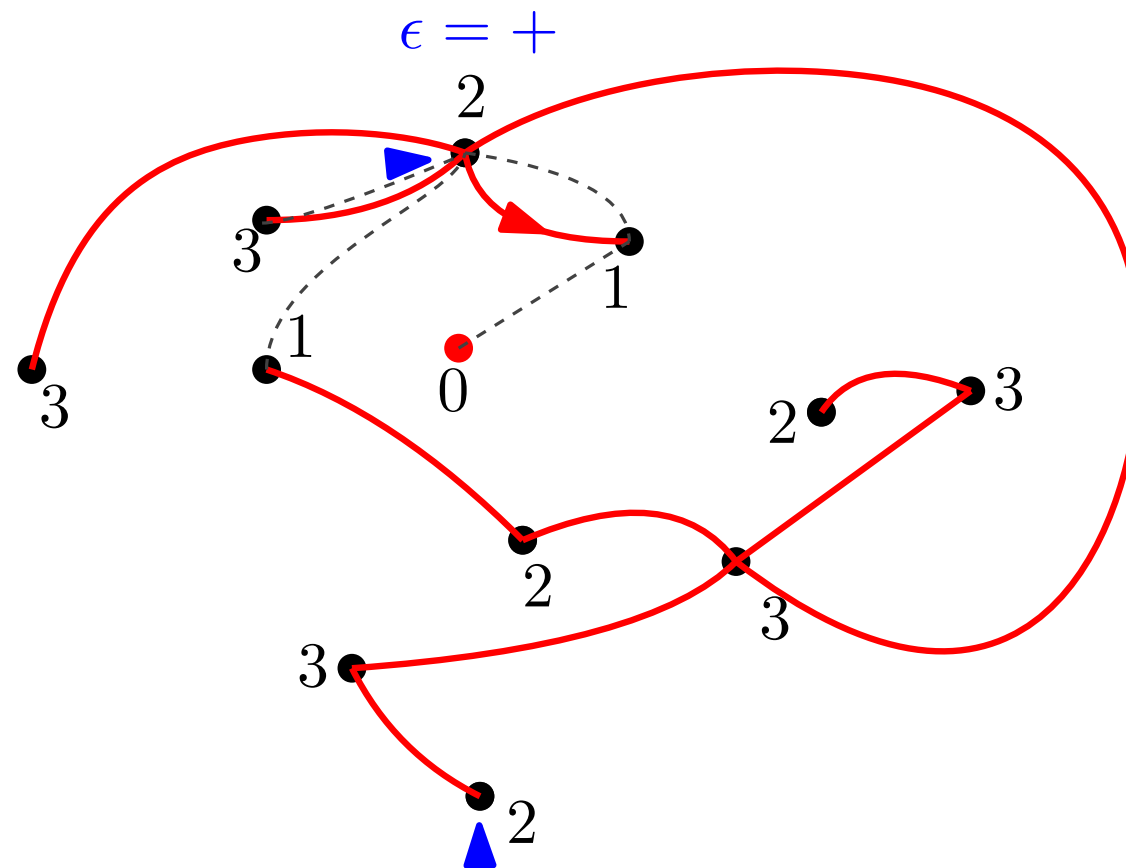




# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

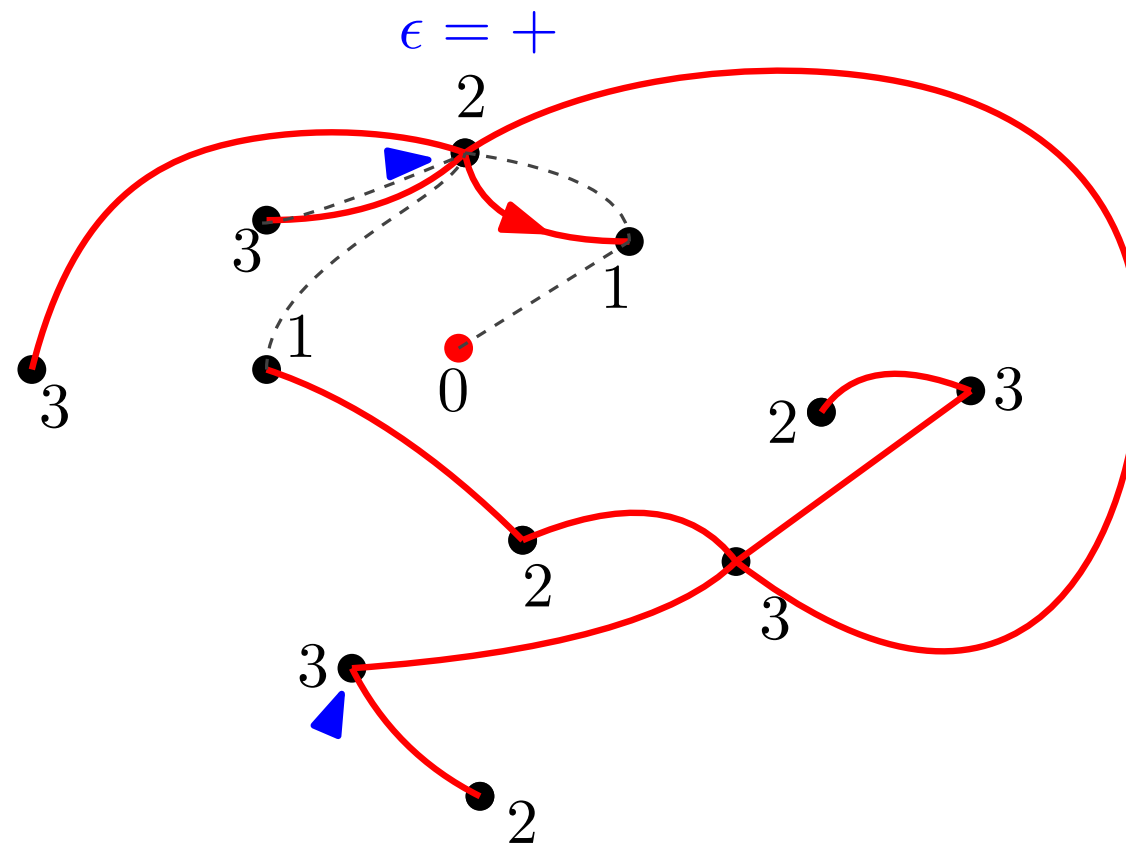
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

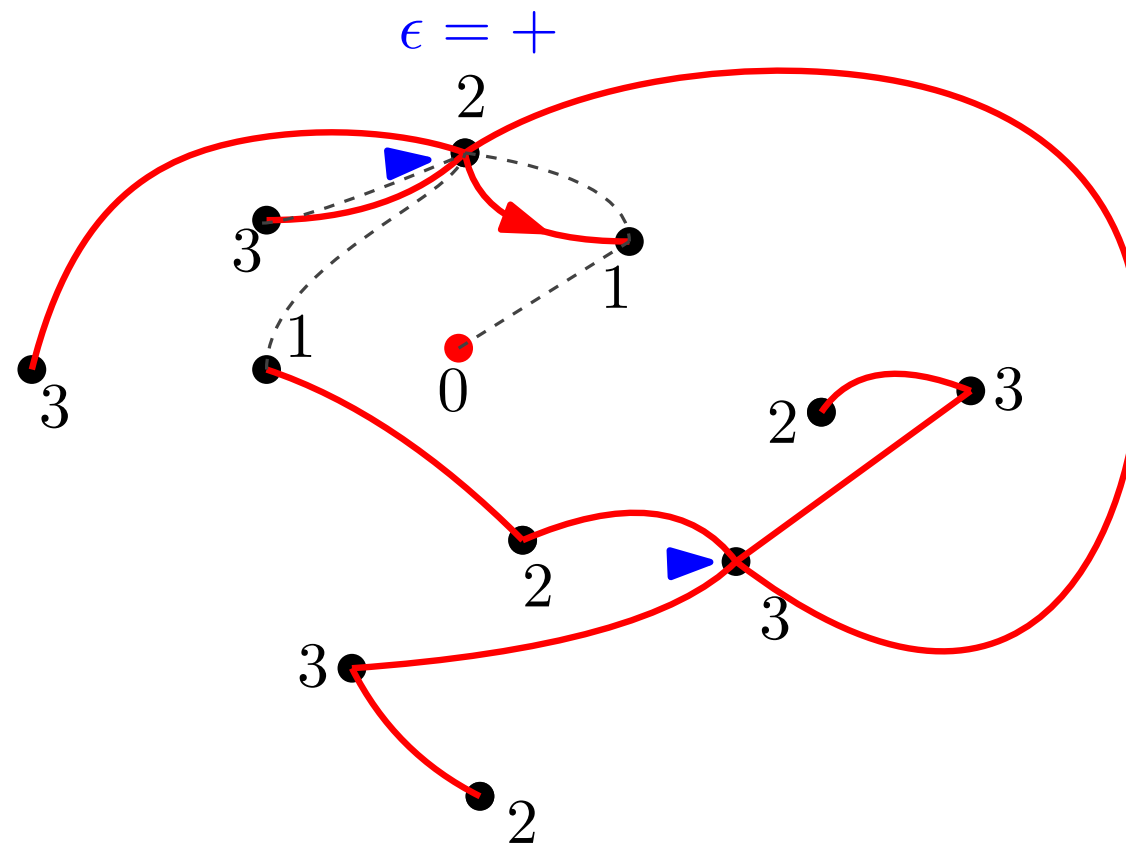
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

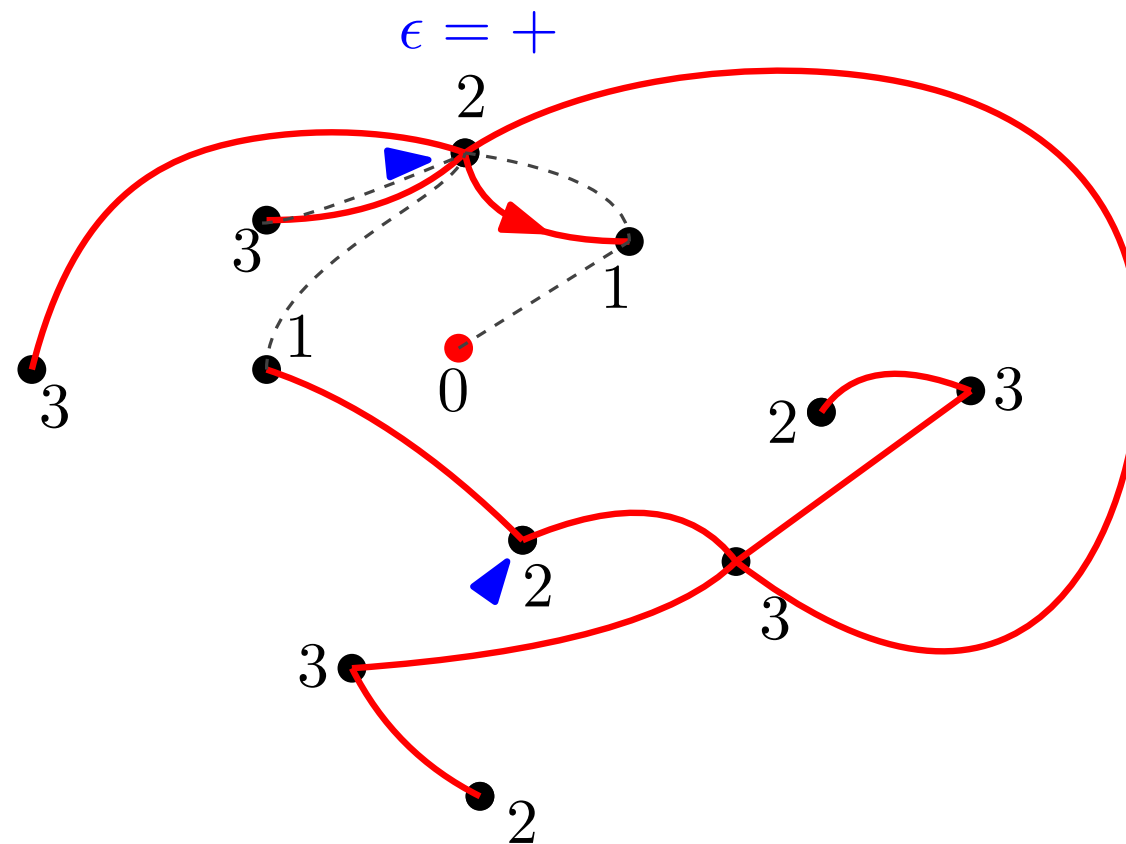
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

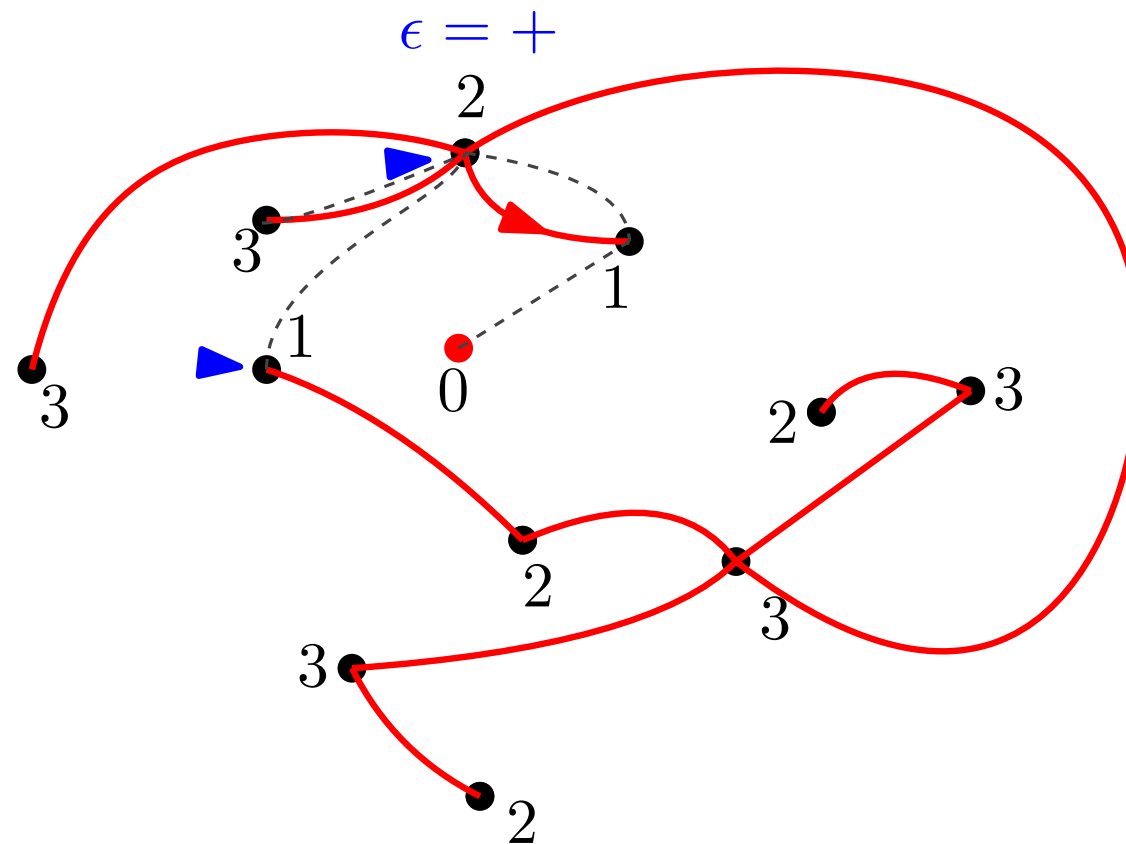
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

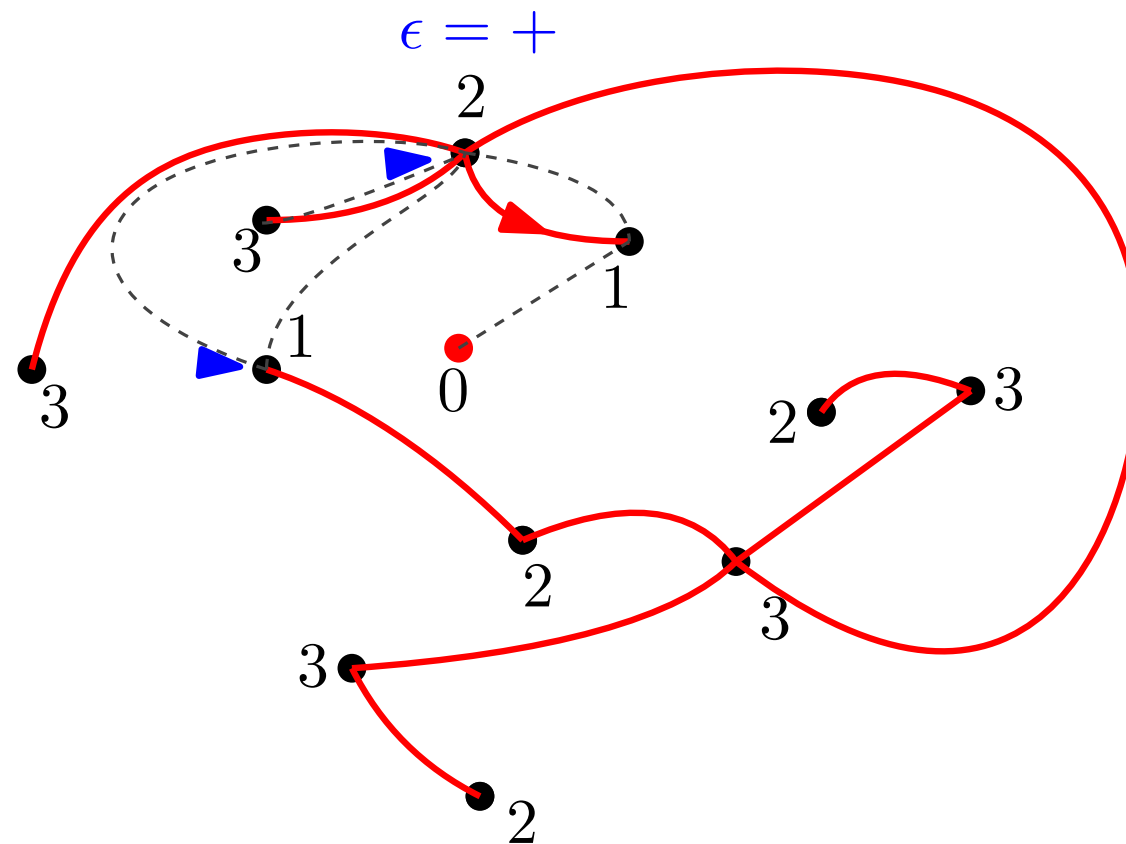
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

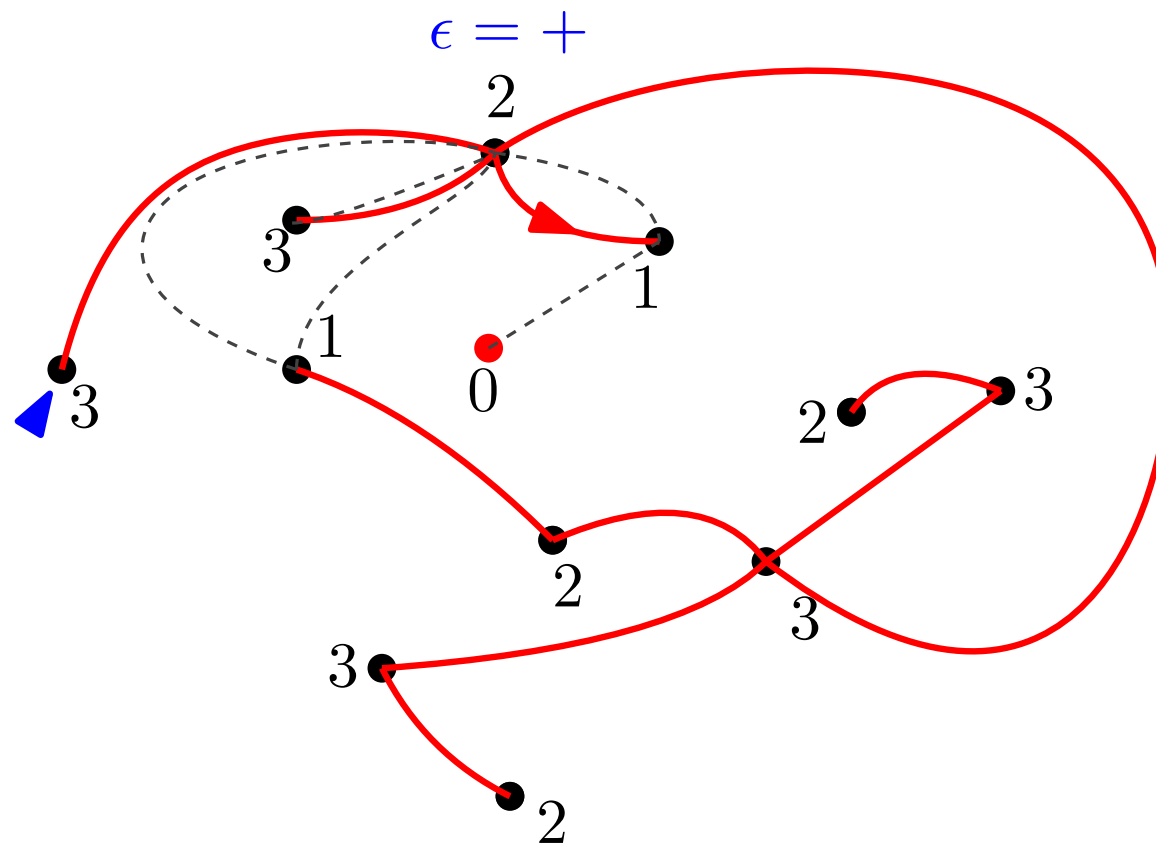
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

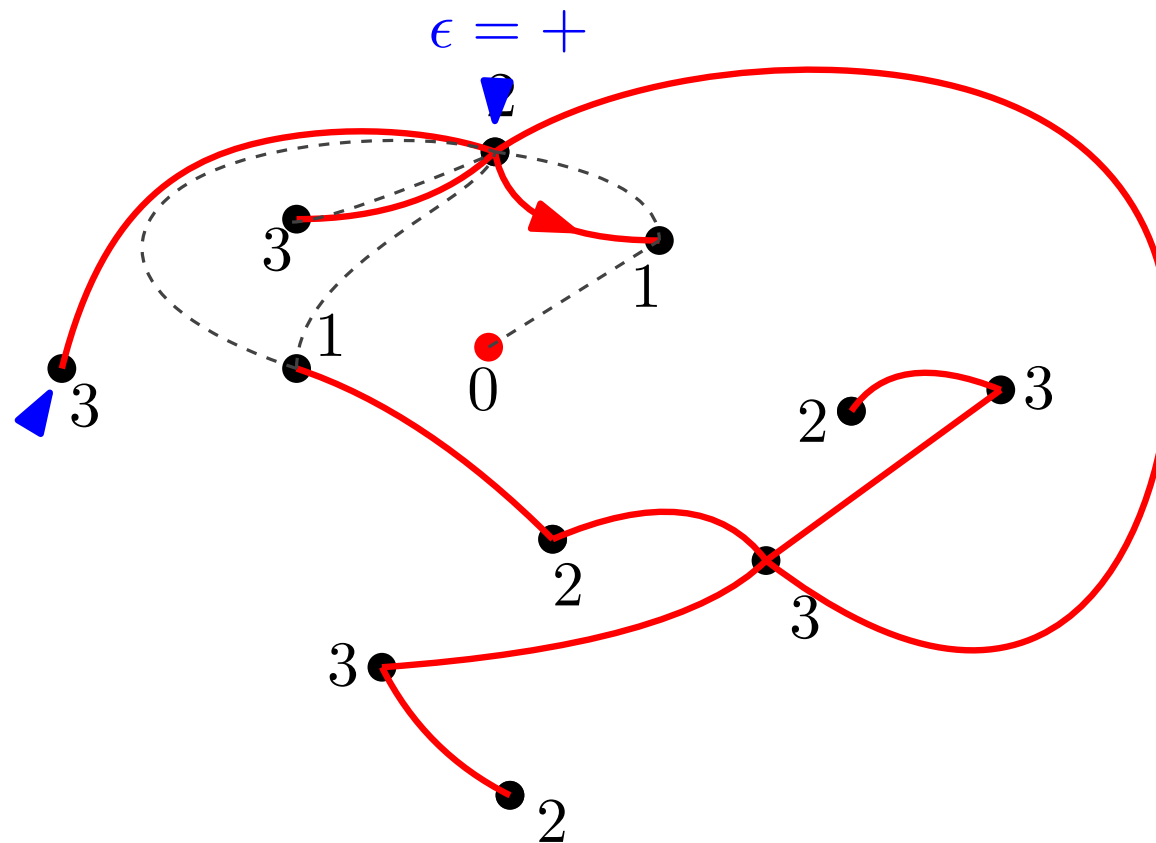
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji

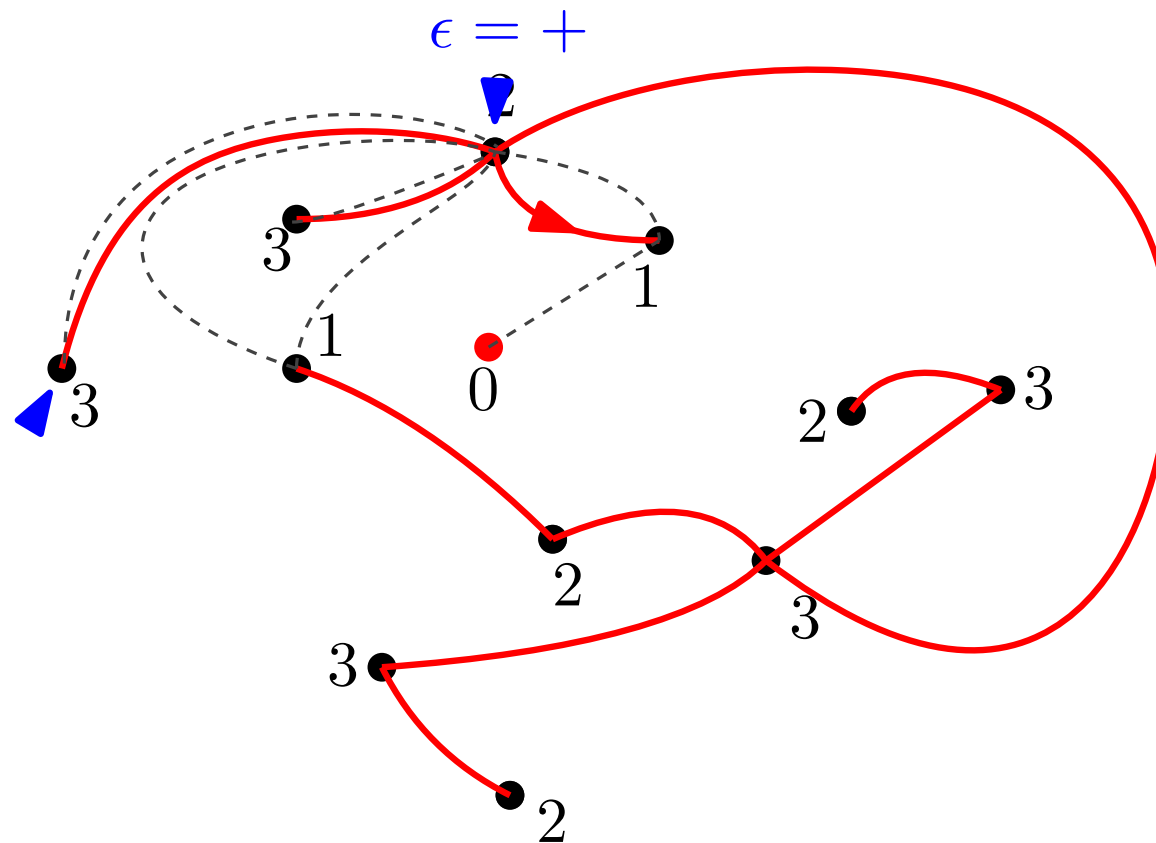




# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

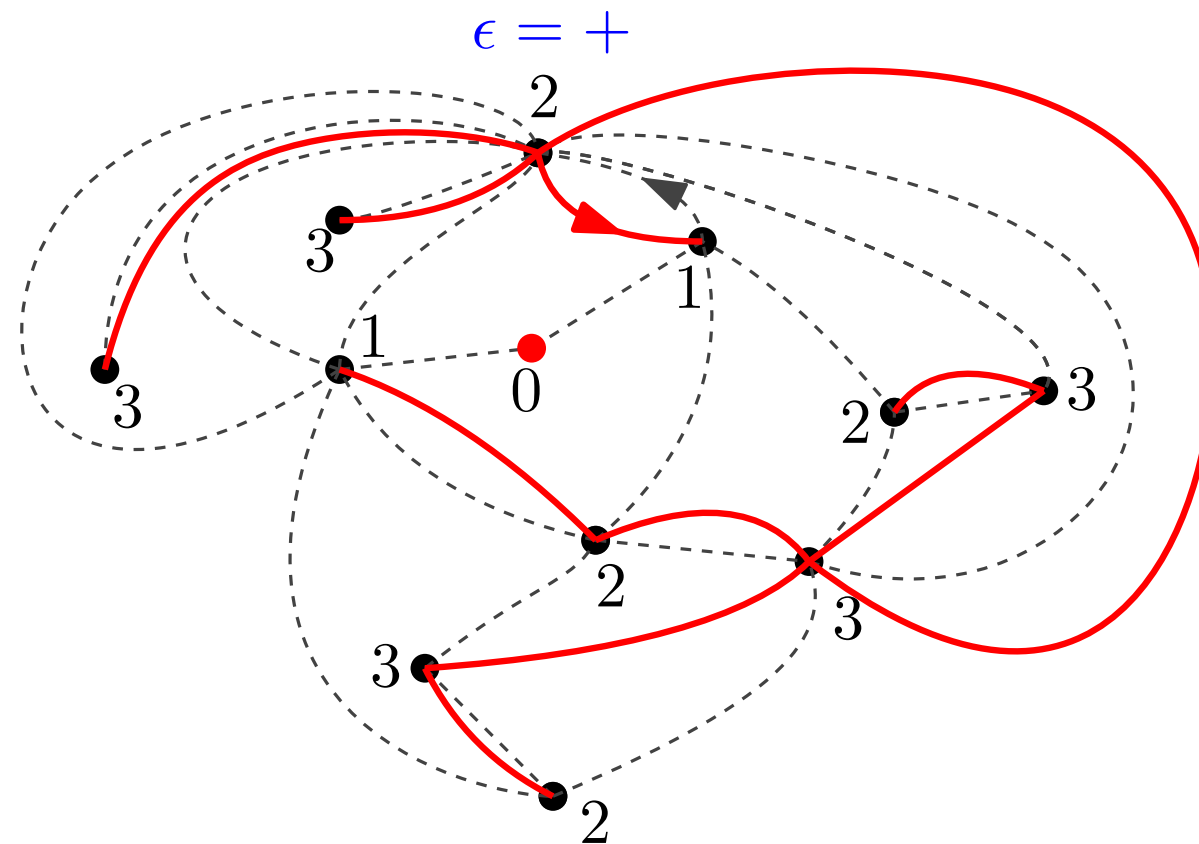
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

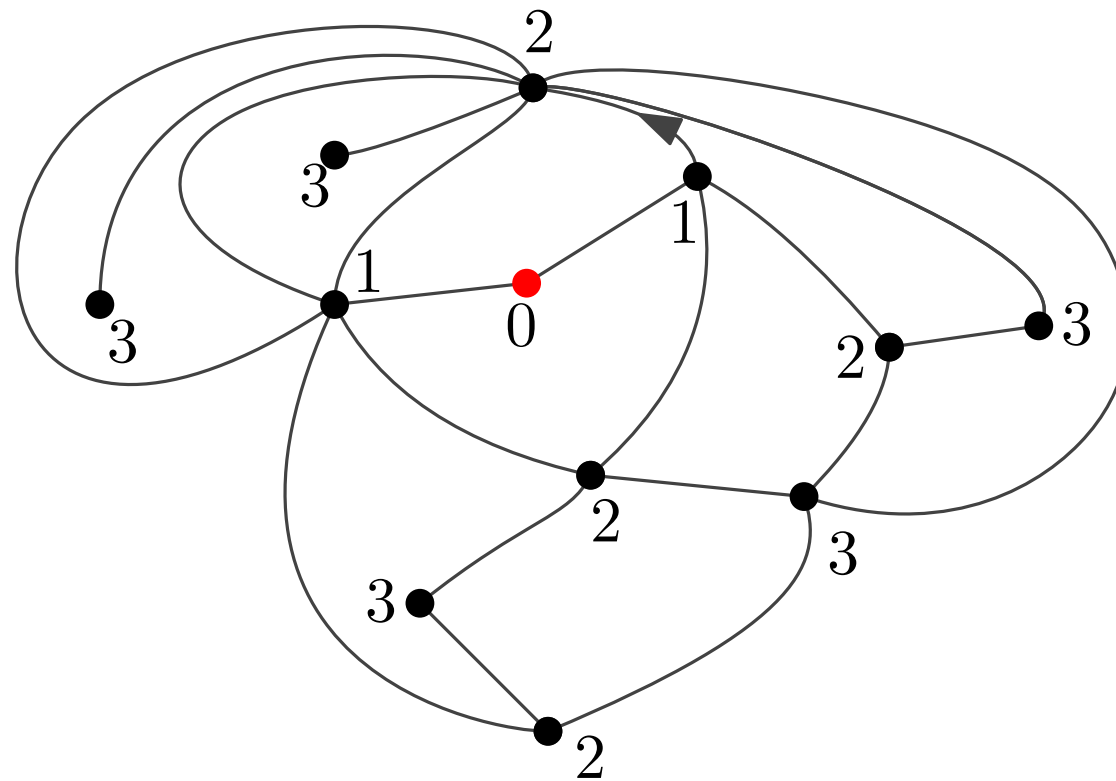
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

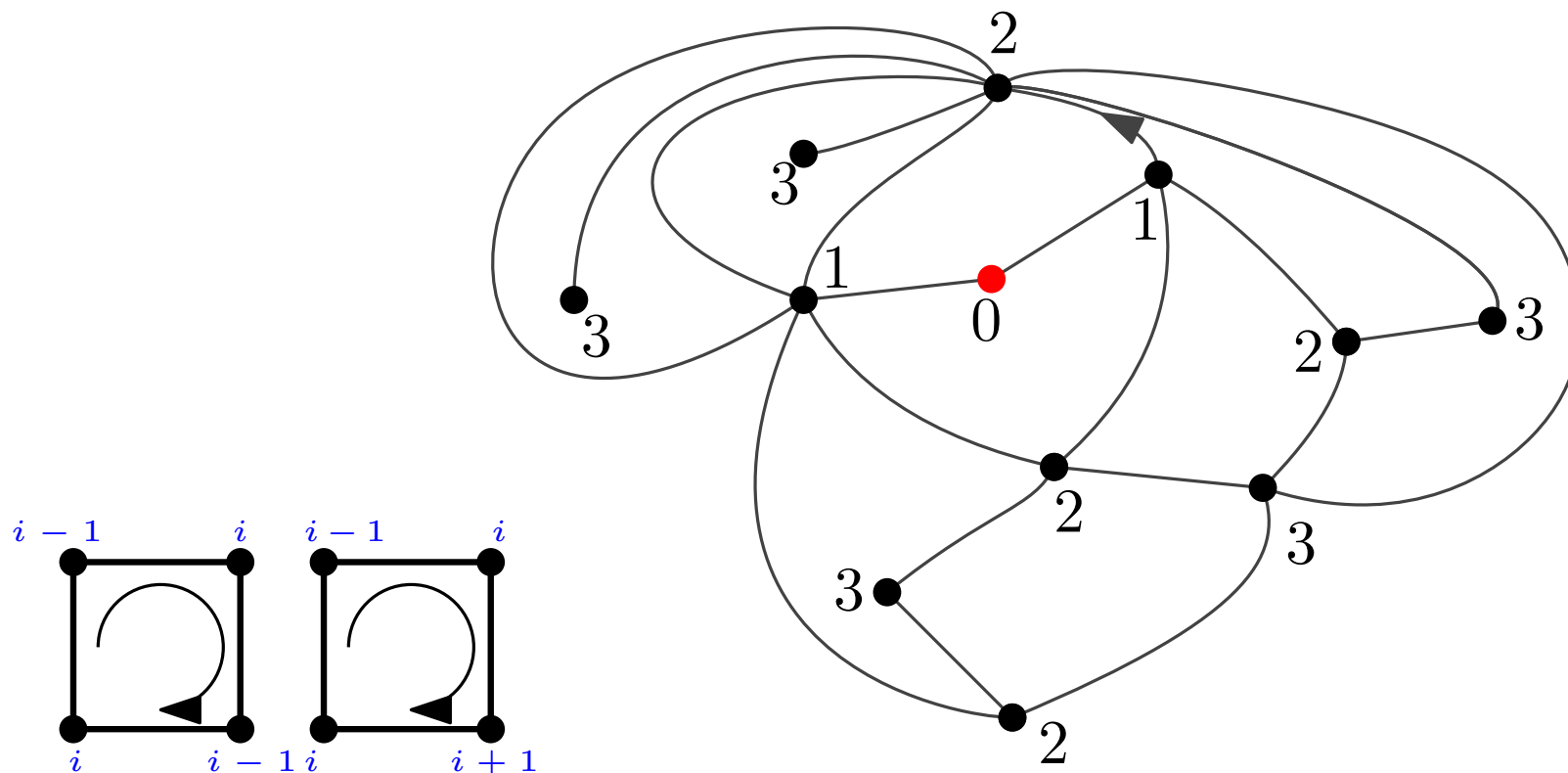
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

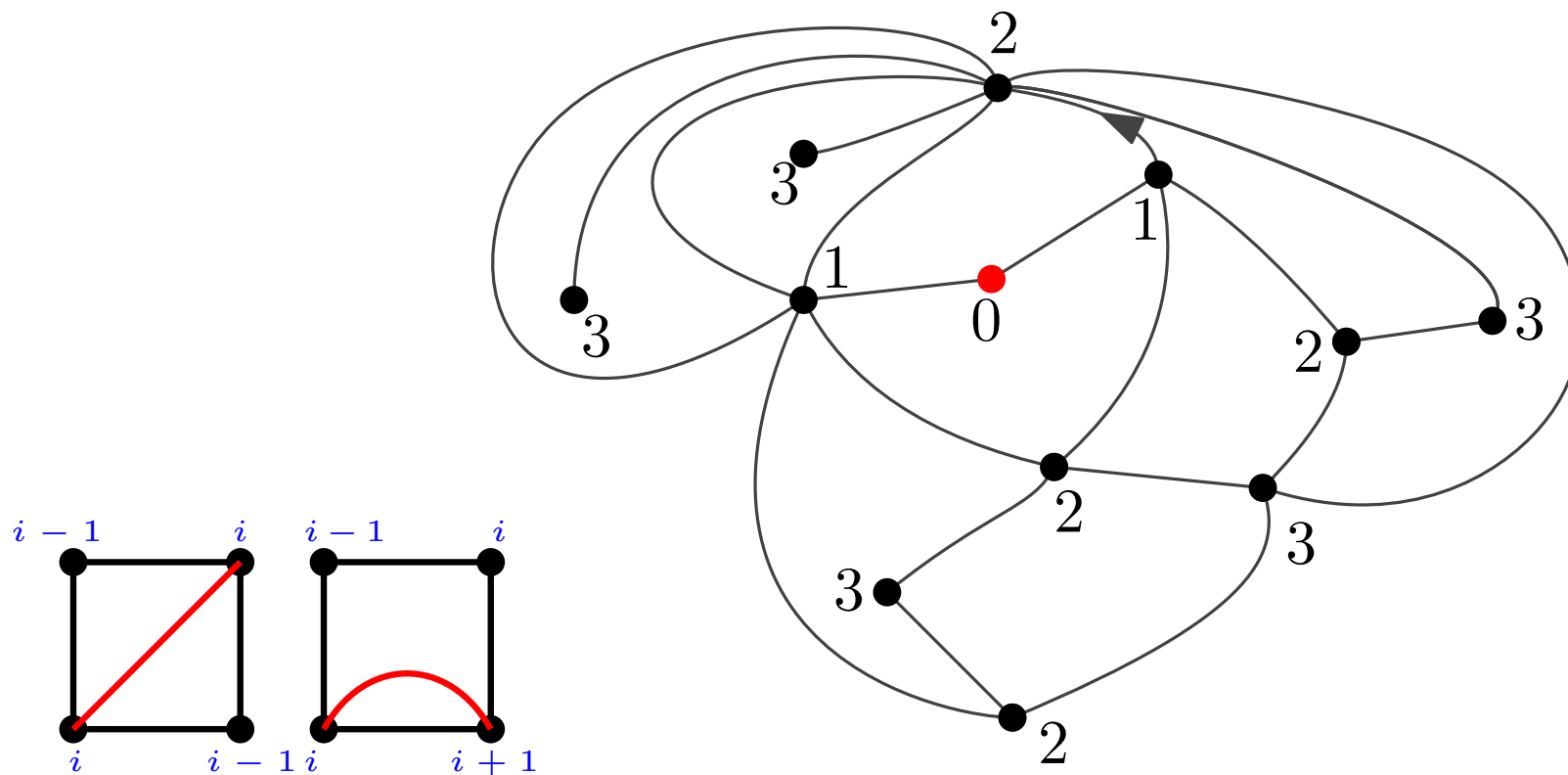
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

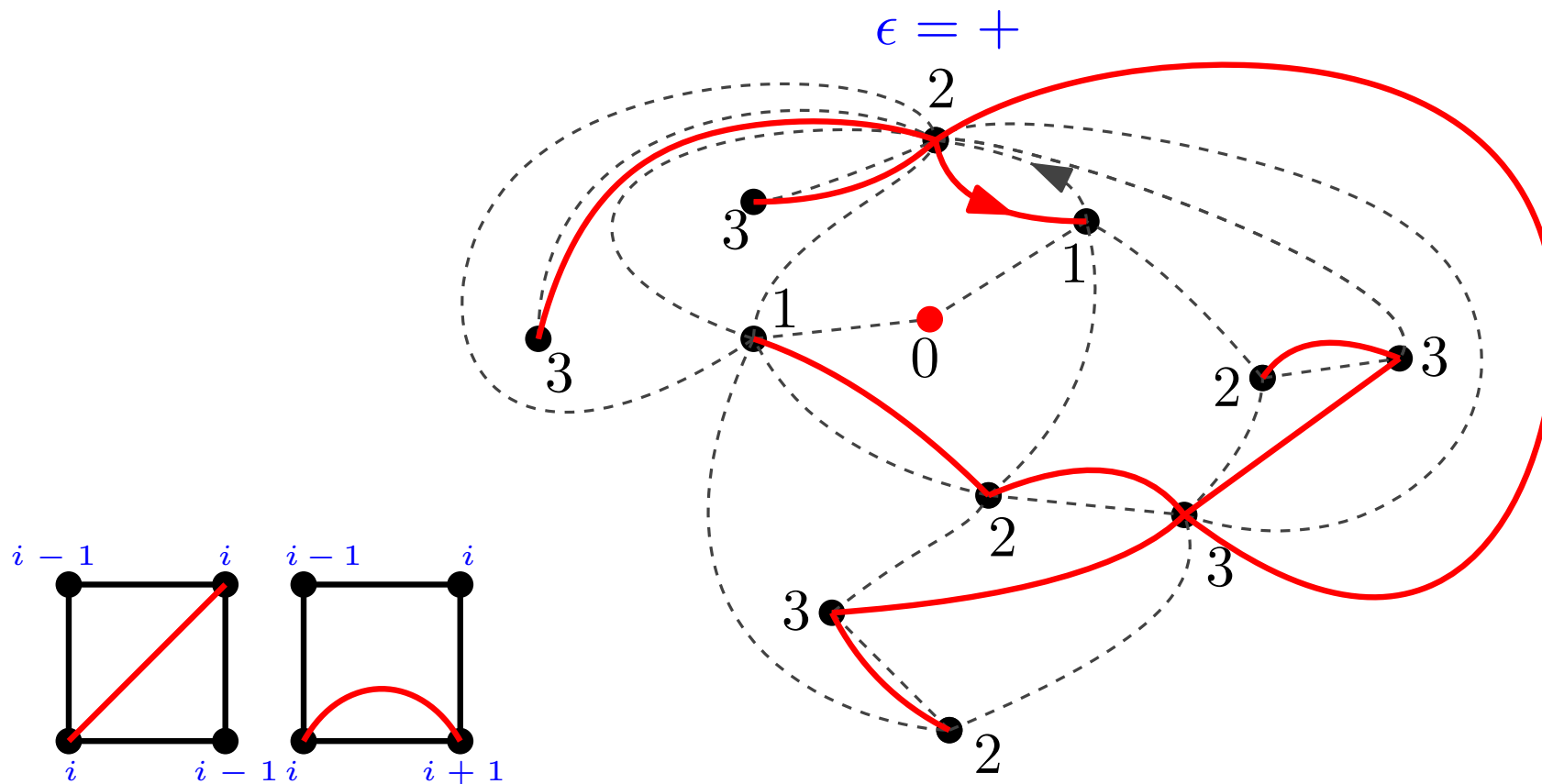
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

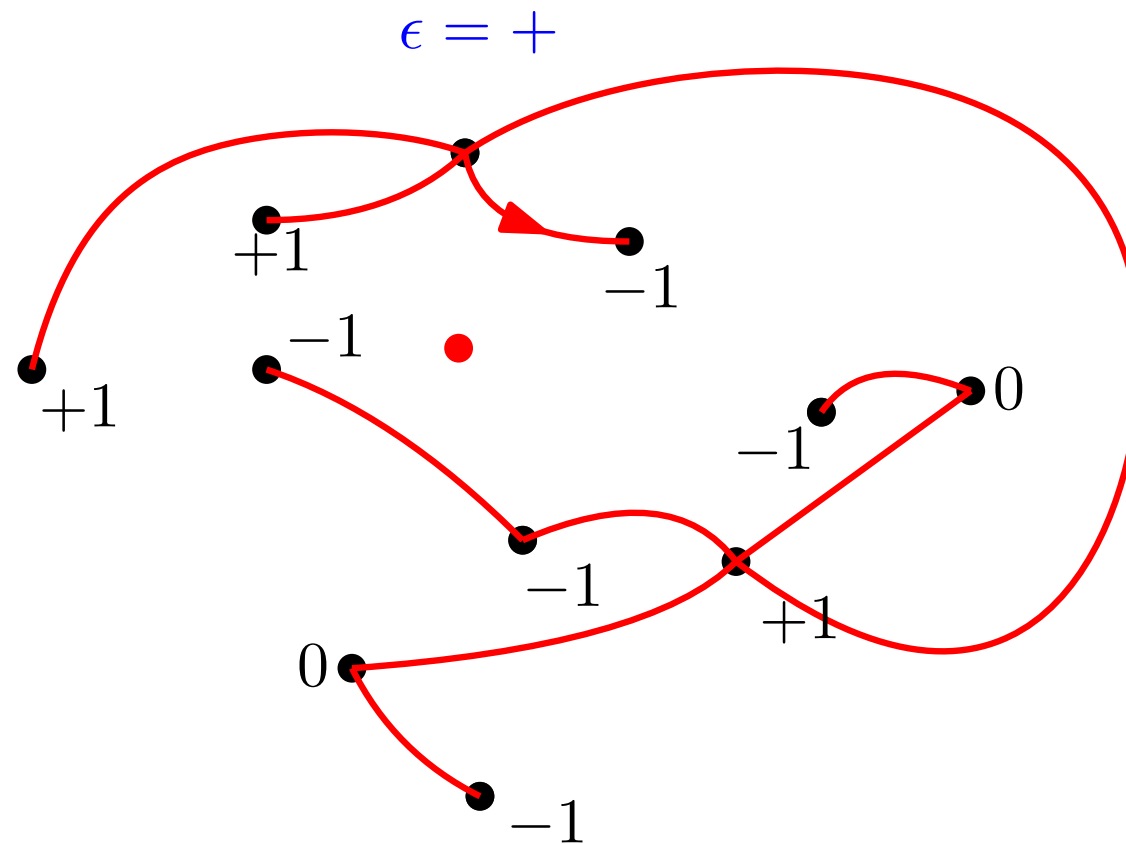
Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Bijekcja

**Twierdzenie** [Cori, Vauquelin 1981 + Schaeffer 1998]

Istnieje bijekcja pomiędzy znakowanymi poetykietowanymi drzewami ukorzenionymi o  $n$  krawędziach, a kwadrangulacjami sfery o  $n$  ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, gdzie etykiety opisują odległości od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji



# Grawitacja kwantowa i losowa geometria sfery

**Pytanie:** jak wygląda losowa metryka na sferze?



# Grawitacja kwantowa i losowa geometria sfery

**Pytanie:** jak wygląda losowa metryka na sferze?

**Kłopot:** Przestrzeń wszystkich metryk riemannowskich na sferze jest za duża!

# Grawitacja kwantowa i losowa geometria sfery

**Pytanie:** jak wygląda losowa metryka na sferze?

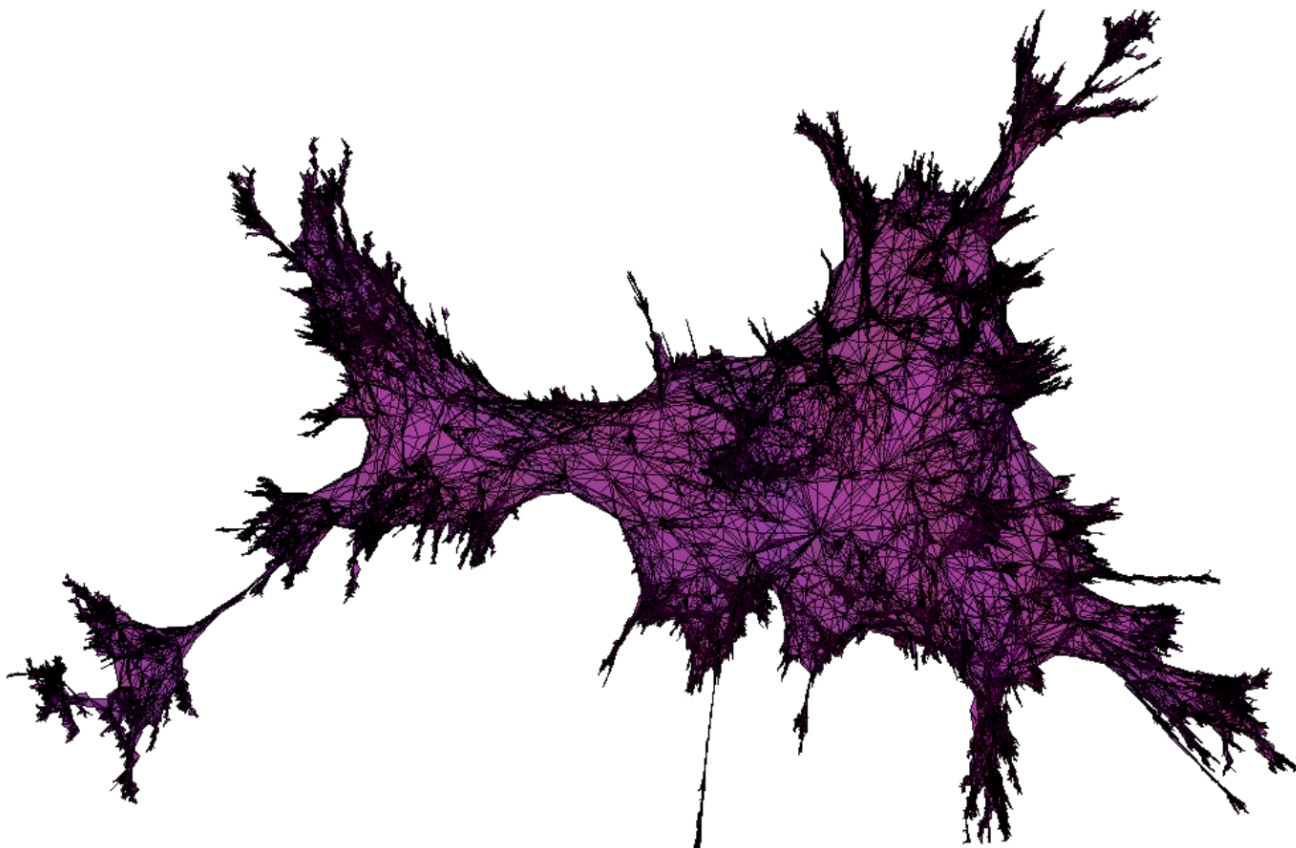
**Kłopot:** Przestrzeń wszystkich metryk riemannowskich na sferze jest za duża!

**Nowe podejście:** Znajdź naturalny dyskretny analogon metryki na sferze, zbadaj co się dzieje w granicy gdy model "dąży do nieskończoności" i zaakceptuj tę granicę jako losową metrykę, jeśli pojawia się ona w uniwersalny sposób (niezależnie od modelu od którego wystartowaliśmy).

# Grawitacja kwantowa i losowa geometria sfery

**Pytanie:** jak wygląda losowa metryka na sferze?

**Nowe podejście:** Znajdź naturalny dyskretny analogon metryki na sferze, zbadaj co się dzieje w granicy gdy model "dąży do nieskończoności" i zaakceptuj tą granicę jako losową metrykę, jeśli pojawia się ona w uniwersalny sposób (niezależnie od modelu od którego wystartowaliśmy).

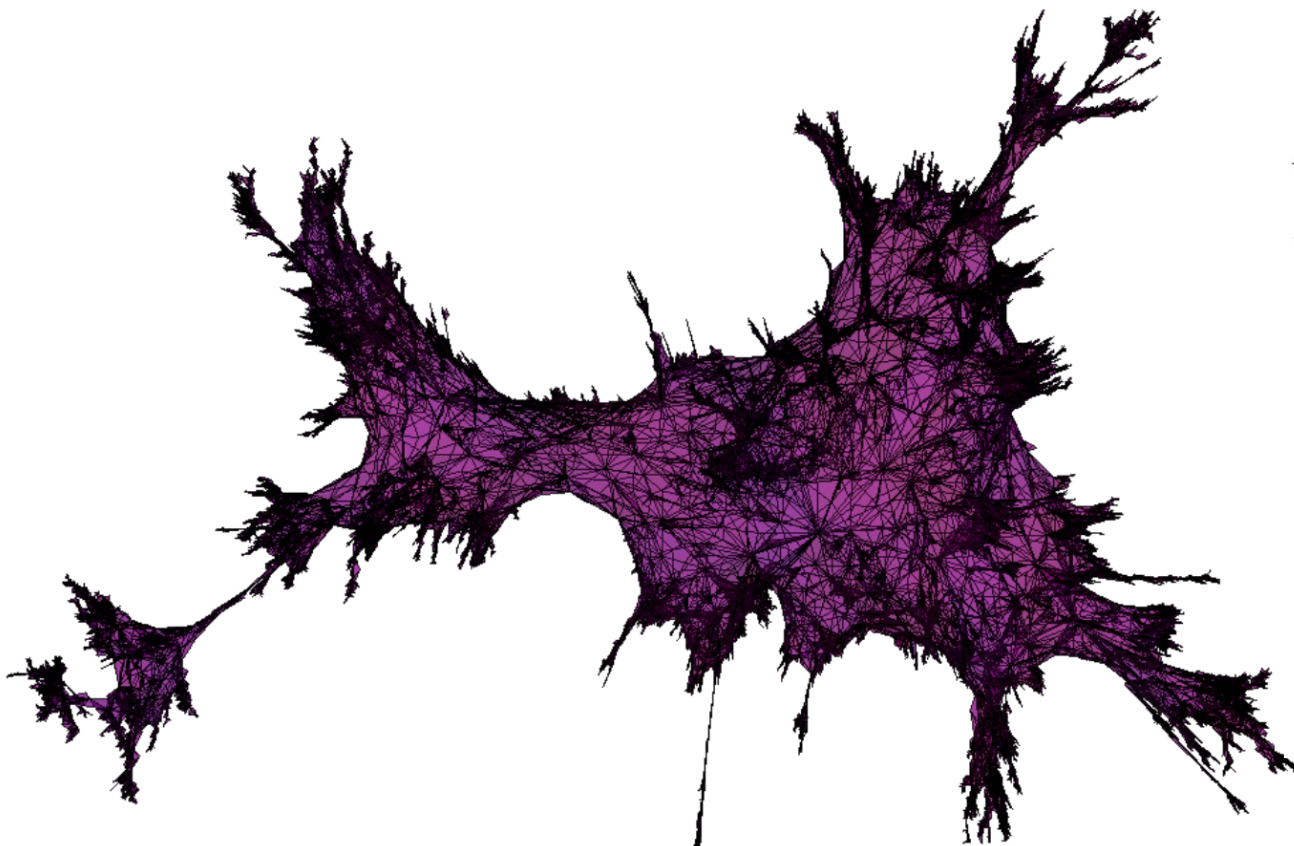


Kwadrangulacja sfery na 20000 czworokątów - J. Bettinelli

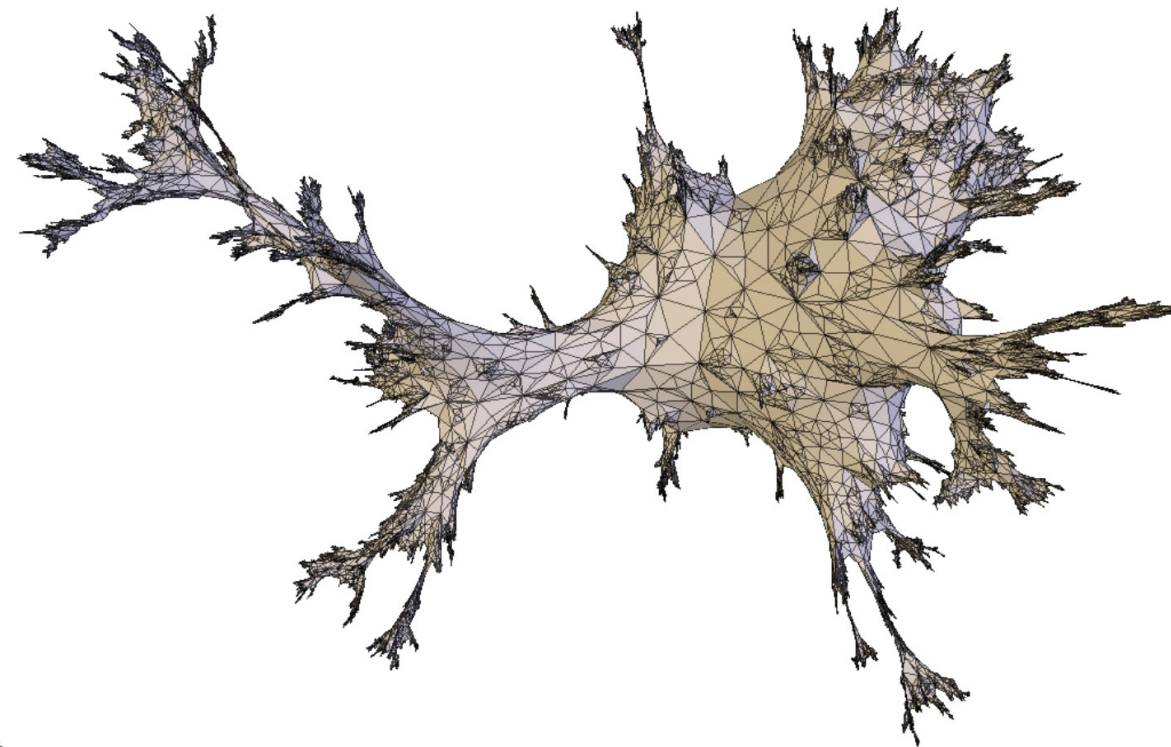
# Grawitacja kwantowa i losowa geometria sfery

**Pytanie:** jak wygląda losowa metryka na sferze?

**Nowe podejście:** Znajdź naturalny dyskretny analogon metryki na sferze, zbadaj co się dzieje w granicy gdy model "dąży do nieskończoności" i zaakceptuj tę granicę jako losową metrykę, jeśli pojawia się ona w uniwersalny sposób (niezależnie od modelu od którego wystartowaliśmy).



Kwadrangulacja sfery na 20000 czworokątów - J. Bettinelli



Triangulacja sfery na 50000 trójkątów - N. Curien

# Grawitacja kwantowa i losowa geometria sfery

**Pytanie:** jak wygląda losowa metryka na sferze?

**Nowe podejście:** Znajdź naturalny dyskretny analogon metryki na sferze, zbadaj co się dzieje w granicy gdy model "dąży do nieskończoności" i zaakceptuj tę granicę jako losową metrykę, jeśli pojawia się ona w uniwersalny sposób (niezależnie od modelu od którego wystartowaliśmy).

**Twierdzenie [Le Gall '13, Miermont '13]:**

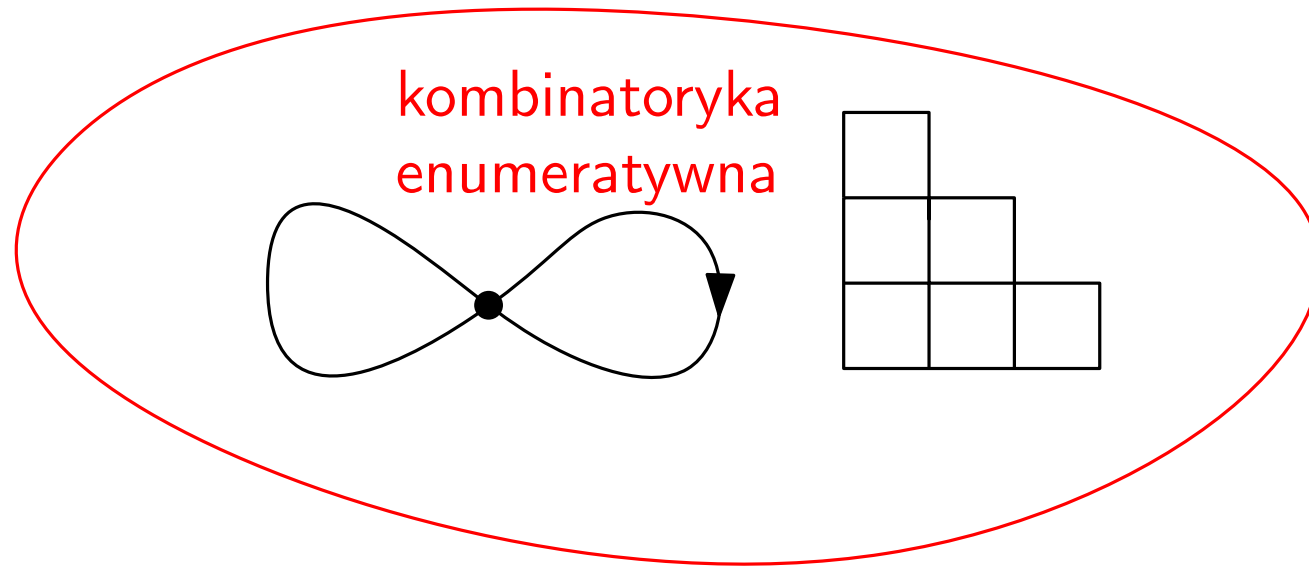
Istnieje zwarta losowa przestrzeń metryczna (tzw. [mapa Browna](#))  $m_\infty$  tżę  $\forall q = 3, 4, 6, 8, \dots$

$$\left( q_n, c_q \cdot \frac{d}{n^{1/4}} \right) \longrightarrow m_\infty$$

as  $n \rightarrow \infty$ , gdzie

- $q_n$  jest losową  $q$ -angulacją sfery o  $n$  ścianach,
- $d$  - metryka grafowa,
- $c_q$  - stała, która zależy tylko od  $q$ ,
- jest to zbieżność według rozkładu w metryce Gromova–Hausdorffa.

# Podsumowanie



# Podsumowanie

