O rozkładzie Newcomba–Benforda i logarytmach

Pytania, refleksje, uwagi...

Leszek Pieniążek

26 sierpnia 2024

Stare zadanie

Problem

Znaleźć wszystkie takie funkcje ciągłe $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, że pole powierzchni pod wykresem f na przedziale $[x, 2x]$ nie zależy od x, i podobnie dla przedziałów $[x, 3x]$.

Rozwiązanie

Pierwsze założenie oznacza, że $\int_x^{2x} f(s)\,ds = \text{const}$, więc $\frac{d}{dx}\int_x^{2x} f(s)\,ds = 2f(2x) - f(x) = 0$ $\iff 2xf(2x) = xf(x)$; podobnie pokazuje się, że $3xf(3x) = xf(x)$.

Rozwiązanie

Pierwsze założenie oznacza, że $\int_x^{2x} f(s)\,ds = \text{const}$, więc $\frac{d}{dx}\int_x^{2x} f(s)\,ds = 2f(2x) - f(x) = 0$ $\iff 2xf(2x) = xf(x)$; podobnie pokazuje się, że $3xf(3x) = xf(x)$.
Niech $g(x) = 2^x f(2^x)$. Widać, że dla dowolnego x

$$g(x+1) = 2^{x+1} f(2^{x+1}) = 2 \cdot 2^x f(2 \cdot 2^x) = 2^x f(2^x) = g(x).$$

Rozwiązanie

Pierwsze założenie oznacza, że $\int_x^{2x} f(s)\,ds = \text{const}$, więc $\frac{d}{dx}\int_x^{2x} f(s)\,ds = 2f(2x) - f(x) = 0$ $\iff 2xf(2x) = xf(x)$; podobnie pokazuje się, że $3xf(3x) = xf(x)$.
Niech $g(x) = 2^x f(2^x)$. Widać, że dla dowolnego x

$$g(x+1) = 2^{x+1} f(2^{x+1}) = 2 \cdot 2^x f(2 \cdot 2^x) = 2^x f(2^x) = g(x).$$

Podobnie

$$g(x + \log_2 3) = 2^{x+\log_2 3} f(2^{x+\log_2 3}) = 3 \cdot 2^x f(3 \cdot 2^x) = g(x).$$

Rozwiązanie

Pierwsze założenie oznacza, że $\int_x^{2x} f(s)\,ds = \text{const}$, więc $\frac{d}{dx}\int_x^{2x} f(s)\,ds = 2f(2x) - f(x) = 0$ $\iff 2xf(2x) = xf(x)$; podobnie pokazuje się, że $3xf(3x) = xf(x)$.
Niech $g(x) = 2^x f(2^x)$. Widać, że dla dowolnego x

$$g(x+1) = 2^{x+1} f(2^{x+1}) = 2 \cdot 2^x f(2 \cdot 2^x) = 2^x f(2^x) = g(x).$$

Podobnie

$$g(x+\log_2 3) = 2^{x+\log_2 3} f(2^{x+\log_2 3}) = 3 \cdot 2^x f(3 \cdot 2^x) = g(x).$$

Otrzymaliśmy więc ciągłą funkcję g z dwoma niewspółmiernymi okresami: 1 oraz $\log_2 3$, a więc g musi być stała na $\mathbb{R}$. To znaczy, że musi być

$$f(x) = f(2^{\log_2 x}) = \frac{g(\log_2 x)}{x} = \frac{C}{x}.$$

Rozwiązanie

Pierwsze założenie oznacza, że $\int_x^{2x} f(s)\,ds = \text{const}$, więc $\frac{d}{dx}\int_x^{2x} f(s)\,ds = 2f(2x) - f(x) = 0$ $\iff 2xf(2x) = xf(x)$; podobnie pokazuje się, że $3xf(3x) = xf(x)$.
Niech $g(x) = 2^x f(2^x)$. Widać, że dla dowolnego x

$$g(x+1) = 2^{x+1} f(2^{x+1}) = 2 \cdot 2^x f(2 \cdot 2^x) = 2^x f(2^x) = g(x).$$

Podobnie

$$g(x + \log_2 3) = 2^{x+\log_2 3} f(2^{x+\log_2 3}) = 3 \cdot 2^x f(3 \cdot 2^x) = g(x).$$

Otrzymaliśmy więc ciągłą funkcję g z dwoma niewspółmiernymi okresami: 1 oraz $\log_2 3$, a więc g musi być stała na $\mathbb{R}$. To znaczy, że musi być

$$f(x) = f(2^{\log_2 x}) = \frac{g(\log_2 x)}{x} = \frac{C}{x}.$$

Proste sprawdzenie pokazuje, że takie funkcje istotnie spełniają założenia. □

Kilka danych statystycznych. Historia.

Prawo Benforda dotyczy częstości występowania poszczególnych cyfr na pierwszej pozycji dziesiętnej danych liczbowych.

Kilka danych statystycznych. Historia.

Prawo Benforda dotyczy częstości występowania poszczególnych cyfr na pierwszej pozycji dziesiętnej danych liczbowych.

Po raz pierwszy zależność ta została zauważona przez astronoma Simona Newcomba w 1881 roku, kiedy przypadkowo spostrzegł nierównomierne zużycie tablic logarytmicznych w bibliotece.

Kilka danych statystycznych. Historia.

Prawo Benforda dotyczy częstości występowania poszczególnych cyfr na pierwszej pozycji dziesiętnej danych liczbowych.

Po raz pierwszy zależność ta została zauważona przez astronoma Simona Newcomba w 1881 roku, kiedy przypadkowo spostrzegł nierównomierne zużycie tablic logarytmicznych w bibliotece.

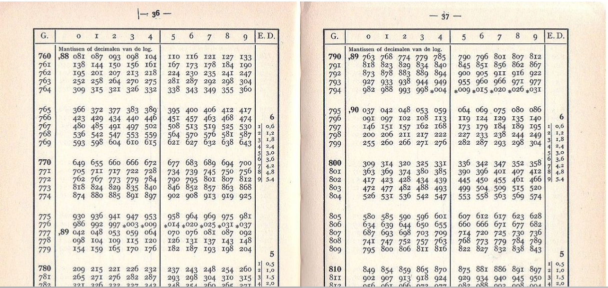
W 1938 ponownie zostało odkryte przez fizyka Franka Benforda przy analizie sporej ilości danych statystycznych.

Kilka danych statystycznych. Historia.

Prawo Benforda dotyczy częstości występowania poszczególnych cyfr na pierwszej pozycji dziesiętnej danych liczbowych.

Po raz pierwszy zależność ta została zauważona przez astronoma Simona Newcomba w 1881 roku, kiedy przypadkowo spostrzegł nierównomierne zużycie tablic logarytmicznych w bibliotece.

W 1938 ponownie zostało odkryte przez fizyka Franka Benforda przy analizie sporej ilości danych statystycznych.



— 36 —

G.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	E. D.
	Mantissen of decimalen van de log.											
760	,88	081	087	093	098	104	110	116	121	127	133	
761		138	144	150	156	161	167	173	178	184	190	
762		195	201	207	213	218	224	230	235	241	247	
763		252	258	264	270	275	281	287	292	298	304	
764		309	315	321	326	332	338	343	349	355	360	
765		366	372	377	383	389	395	400	406	412	417	
766		423	429	434	440	446	451	457	463	468	474	6
767		480	485	491	497	502	508	513	519	525	530	1 0,6
768		536	542	547	553	559	564	570	576	581	587	2 1,2
769		593	598	604	610	615	621	627	632	638	643	3 1,8
												4 2,4 5 3,0 6 3,6
770		649	655	660	666	672	677	683	689	694	700	7 4,2
771		705	711	717	722	728	734	739	745	750	756	8 4,8
772		762	767	773	779	784	790	795	801	807	812	9 5,4
773		818	824	829	835	840	846	852	857	863	868	
774		874	880	885	891	897	902	908	913	919	925	
775		930	936	941	947	953	958	964	969	975	981	
776		986	992	997	*003	*009	*014	*020	*025	*031	*037	
777	,89	042	048	053	059	064	070	076	081	087	092	
778		098	104	109	115	120	126	131	137	143	148	
779		154	159	165	170	176	182	187	193	198	204	5
780		209	215	221	226	232	237	243	248	254	260	1 0,5 2 1,0
781		265	271	276	282	287	293	298	304	310	315	3 1,5
782		321	326	332	337	343	348	354	360	365	371	4 2,0

— 37 —

G.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	E. D.
	Mantissen of decimalen van de log.											
790	,89	763	768	774	779	785	790	796	801	807	812	
791		818	823	829	834	840	845	851	856	862	867	
792		873	878	883	889	894	900	905	911	916	922	
793		927	933	938	944	949	955	960	966	971	977	
794		982	988	993	998	*004	*009	*015	*020	*026	*031	
795	,90	037	042	048	053	059	064	069	075	080	086	
796		091	097	102	108	113	119	124	129	135	140	6
797		146	151	157	162	168	173	179	184	189	195	1 0,6
798		200	206	211	217	222	227	233	238	244	249	2 1,2
799		255	260	266	271	276	282	287	293	298	304	3 1,8
												4 2,4 5 3,0 6 3,6
800		309	314	320	325	331	336	342	347	352	358	7 4,2
801		363	369	374	380	385	390	396	401	407	412	8 4,8
802		417	423	428	434	439	445	450	455	461	466	9 5,4
803		472	477	482	488	493	499	504	509	515	520	
804		526	531	536	542	547	553	558	563	569	574	
805		580	585	590	596	601	607	612	617	623	628	
806		634	639	644	650	655	660	666	671	677	682	
807		687	693	698	703	709	714	720	725	730	736	
808		741	747	752	757	763	768	773	779	784	789	
809		795	800	806	811	816	822	827	832	838	843	5
810		849	854	859	865	870	875	881	886	891	897	1 0,5 2 1,0
811		902	907	913	918	924	929	934	940	945	950	3 1,5
812		956	961	966	972	977	982	988	993	998	[illegible]	4 2,0

Przykład obliczeń

	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	0,000	0,041	0,079	0,114	0,146	0,176	0,204	0,230	0,255	0,279
2	0,301	0,322	0,342	0,362	0,380	0,398	0,415	0,431	0,447	0,462
3	0,477	0,491	0,505	0,519	0,531	0,544	0,556	0,568	0,580	0,591
4	0,602	0,613	0,623	0,633	0,643	0,653	0,663	0,672	0,681	0,690
5	0,699	0,708	0,716	0,724	0,732	0,740	0,748	0,756	0,763	0,771
6	0,778	0,785	0,792	0,799	0,806	0,813	0,820	0,826	0,833	0,839
7	0,845	0,851	0,857	0,863	0,869	0,875	0,881	0,886	0,892	0,898
8	0,903	0,908	0,914	0,919	0,924	0,929	0,934	0,940	0,944	0,949
9	0,954	0,959	0,964	0,968	0,973	0,978	0,982	0,987	0,991	0,996

Przykład obliczeń

	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	0,000	0,041	0,079	0,114	0,146	0,176	0,204	0,230	0,255	0,279
2	0,301	0,322	0,342	0,362	0,380	0,398	0,415	0,431	0,447	0,462
3	0,477	0,491	0,505	0,519	0,531	0,544	0,556	0,568	0,580	0,591
4	0,602	0,613	0,623	0,633	0,643	0,653	0,663	0,672	0,681	0,690
5	0,699	0,708	0,716	0,724	0,732	0,740	0,748	0,756	0,763	0,771
6	0,778	0,785	0,792	0,799	0,806	0,813	0,820	0,826	0,833	0,839
7	0,845	0,851	0,857	0,863	0,869	0,875	0,881	0,886	0,892	0,898
8	0,903	0,908	0,914	0,919	0,924	0,929	0,934	0,940	0,944	0,949
9	0,954	0,959	0,964	0,968	0,973	0,978	0,982	0,987	0,991	0,996

$$\log_{10}\log_{10} 67^{67} = \log_{10}(67\log_{10} 67) = \log_{10} 67 + \log_{10}\log_{10} 67 \approx 1.826 + 0.261 = 2.087$$

Przykład obliczeń

	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	0,000	0,041	0,079	0,114	0,146	0,176	0,204	0,230	0,255	0,279
2	0,301	0,322	0,342	0,362	0,380	0,398	0,415	0,431	0,447	0,462
3	0,477	0,491	0,505	0,519	0,531	0,544	0,556	0,568	0,580	0,591
4	0,602	0,613	0,623	0,633	0,643	0,653	0,663	0,672	0,681	0,690
5	0,699	0,708	0,716	0,724	0,732	0,740	0,748	0,756	0,763	0,771
6	0,778	0,785	0,792	0,799	0,806	0,813	0,820	0,826	0,833	0,839
7	0,845	0,851	0,857	0,863	0,869	0,875	0,881	0,886	0,892	0,898
8	0,903	0,908	0,914	0,919	0,924	0,929	0,934	0,940	0,944	0,949
9	0,954	0,959	0,964	0,968	0,973	0,978	0,982	0,987	0,991	0,996

$$\log_{10}\log_{10} 67^{67} = \log_{10}(67\log_{10} 67) = \log_{10} 67 + \log_{10}\log_{10} 67 \approx 1.826 + 0.261 = 2.087$$

$$\log_{10} 67^{67} \approx 10^{2.087} = 10^2 \cdot 10^{0.087} \approx 100 \cdot 1.24 = 124$$

Przykład obliczeń

	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	0,000	0,041	0,079	0,114	0,146	0,176	0,204	0,230	0,255	0,279
2	0,301	0,322	0,342	0,362	0,380	0,398	0,415	0,431	0,447	0,462
3	0,477	0,491	0,505	0,519	0,531	0,544	0,556	0,568	0,580	0,591
4	0,602	0,613	0,623	0,633	0,643	0,653	0,663	0,672	0,681	0,690
5	0,699	0,708	0,716	0,724	0,732	0,740	0,748	0,756	0,763	0,771
6	0,778	0,785	0,792	0,799	0,806	0,813	0,820	0,826	0,833	0,839
7	0,845	0,851	0,857	0,863	0,869	0,875	0,881	0,886	0,892	0,898
8	0,903	0,908	0,914	0,919	0,924	0,929	0,934	0,940	0,944	0,949
9	0,954	0,959	0,964	0,968	0,973	0,978	0,982	0,987	0,991	0,996

$$\log_{10}\log_{10} 67^{67} = \log_{10}(67\log_{10} 67) = \log_{10} 67 + \log_{10}\log_{10} 67 \approx 1.826 + 0.261 = 2.087$$

$$\log_{10} 67^{67} \approx 10^{2.087} = 10^2 \cdot 10^{0.087} \approx 100 \cdot 1.24 = 124$$

$$67^{67} \approx 10^{124}$$

Przykład obliczeń

	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	0,000	0,041	0,079	0,114	0,146	0,176	0,204	0,230	0,255	0,279
2	0,301	0,322	0,342	0,362	0,380	0,398	0,415	0,431	0,447	0,462
3	0,477	0,491	0,505	0,519	0,531	0,544	0,556	0,568	0,580	0,591
4	0,602	0,613	0,623	0,633	0,643	0,653	0,663	0,672	0,681	0,690
5	0,699	0,708	0,716	0,724	0,732	0,740	0,748	0,756	0,763	0,771
6	0,778	0,785	0,792	0,799	0,806	0,813	0,820	0,826	0,833	0,839
7	0,845	0,851	0,857	0,863	0,869	0,875	0,881	0,886	0,892	0,898
8	0,903	0,908	0,914	0,919	0,924	0,929	0,934	0,940	0,944	0,949
9	0,954	0,959	0,964	0,968	0,973	0,978	0,982	0,987	0,991	0,996

$$\log_{10}\log_{10}67^{67} = \log_{10}(67\log_{10}67) = \log_{10}67 + \log_{10}\log_{10}67 \approx 1.826 + 0.261 = 2.087$$

$$\log_{10}67^{67} \approx 10^{2.087} = 10^2 \cdot 10^{0.087} \approx 100 \cdot 1.24 = 124$$

$$67^{67} \approx 10^{124}$$

$67^{67} \approx 2.22337 \cdot 10^{122}$ w WolframAlpha

Sformułowanie prawa Benforda

Rozkład Benforda (albo Newcomba–Benforda) to rozkład dyskretny, w którym prawdopodobieństwa wystąpienia liczb $n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ wynosi

$$P(X = n) = p_n = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log_{10}(n + 1) - \log_{10}(n).$$

Przybliżone wartości opisuje tabela

n	p_n
1	0,301029996
2	0,176091259
3	0,124938737
4	0,096910013
5	0,079181246
6	0,066946790
7	0,057991947
8	0,051152522
9	0,045757491

Sformułowanie prawa Benforda

Rozkład Benforda (albo Newcomba–Benforda) to rozkład dyskretny, w którym prawdopodobieństwa wystąpienia liczb $n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ wynosi

$$P(X = n) = p_n = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log_{10}(n + 1) - \log_{10}(n).$$

Przybliżone wartości opisuje tabela

n	p_n
1	0,301029996
2	0,176091259
3	0,124938737
4	0,096910013
5	0,079181246
6	0,066946790
7	0,057991947
8	0,051152522
9	0,045757491

Prawdopodobieństwa z rozkładu Benforda pojawiają się w naturalny sposób kiedy analizujemy pierwszą cyfrę liczb.

Sformułowanie prawa Benforda

Rozkład Benforda (albo Newcomba–Benforda) to rozkład dyskretny, w którym prawdopodobieństwa wystąpienia liczb $n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ wynosi

$$P(X = n) = p_n = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log_{10}(n+1) - \log_{10}(n).$$

Przybliżone wartości opisuje tabela

n	p_n
1	0,301029996
2	0,176091259
3	0,124938737
4	0,096910013
5	0,079181246
6	0,066946790
7	0,057991947
8	0,051152522
9	0,045757491

Prawdopodobieństwa z rozkładu Benforda pojawiają się w naturalny sposób kiedy analizujemy pierwszą cyfrę liczb. Zasadniczymi założeniami, przy których faktycznie mamy do czynienia z takim rozkładem jest

1. w miarę ciągły rozkład prawdopodobieństwa;
2. zbiór przyjmowanych wartości obejmuje kilka rzędów wielkości.

Rozkład Benforda można uzyskać bezpośrednio z rozkładu ciągłego (dalej będziemy go nazywać ciągłym rozkładem Benforda) o gęstości

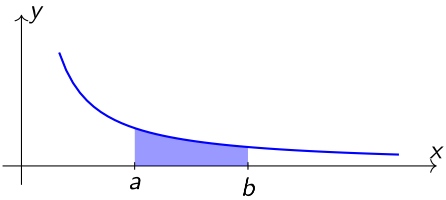
$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{t \ln 10} & \text{dla } t \in [1, 10], \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Rozkład Benforda można uzyskać bezpośrednio z rozkładu ciągłego (dalej będziemy go nazywać ciągłym rozkładem Benforda) o gęstości

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{t \ln 10} & \text{dla } t \in [1, 10], \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo tego, że wartości Y znajdą się w przedziale $[a, b]$ dostajemy całkując gęstość:

$$P(Y \in [a, b]) = \int_a^b f_Y(t)\, dt = \log_{10} b - \log_{10} a.$$

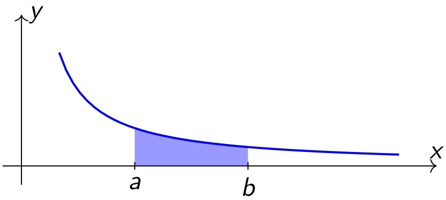


Rozkład Benforda można uzyskać bezpośrednio z rozkładu ciągłego (dalej będziemy go nazywać ciągłym rozkładem Benforda) o gęstości

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{t \ln 10} & \text{dla } t \in [1, 10], \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

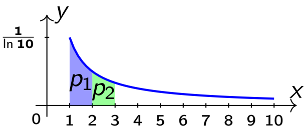
Prawdopodobieństwo tego, że wartości Y znajdą się w przedziale $[a, b]$ dostajemy całkując gęstość:

$$P(Y \in [a, b]) = \int_a^b f_Y(t)\, dt = \log_{10} b - \log_{10} a.$$



Liczby z rozkładu Benforda to część całkowita z wylosowanej wartości z rozkładu ciągłego.

To znaczy, że prawdopodobieństwo uzyskania w rozkładzie Benforda liczby n jest dokładnie prawdopodobieństwem, że w ciągłym rozkładzie Benforda wylosujemy liczbę z przedziału $[n, n+1]$.



Sprawdzenie dla pewnych rozkładów

Za pomocą arkusza kalkulacyjnego możemy sprawdzić, czy i w jakim stopniu popularne rozkłady prawdopodobieństwa dają rozkład zbliżony do rozkładu Benforda.

Prawa skalowania i potęgowania

Definicja

Każdą liczbę dodatnią x można zapisać w postaci $x = m \cdot 10^c$, gdzie $c \in \mathbb{Z}$ zaś $m \in [1, 10)$. Wielkość $m = m(x)$ nazywamy *mantysą* x.

Prawa skalowania i potęgowania

Definicja

Każdą liczbę dodatnią x można zapisać w postaci $x = m \cdot 10^c$, gdzie $c \in \mathbb{Z}$ zaś $m \in [1, 10)$. Wielkość $m = m(x)$ nazywamy *mantysą* x.

Prawem niezmienniczości skalowania mantysy ze stałą $k > 0$ będziemy nazywać następującą własność rozkładu Z:

Jeśli $I = [a, b] \subset [1, 10]$ *to prawdopodobieństwo* $P(m(Z) \in I) = P(m(kZ) \in I)$.

Prawa skalowania i potęgowania

Definicja

Każdą liczbę dodatnią x można zapisać w postaci $x = m \cdot 10^c$, gdzie $c \in \mathbb{Z}$ zaś $m \in [1, 10)$. Wielkość $m = m(x)$ nazywamy *mantysą* x.

Prawem niezmienniczości skalowania mantysy ze stałą $k > 0$ będziemy nazywać następującą własność rozkładu Z:

Jeśli $I = [a, b] \subset [1, 10]$ *to prawdopodobieństwo* $P(m(Z) \in I) = P(m(kZ) \in I)$.

Prawem niezmienniczości skalowania potęgowania z wykładnikiem $p \in \mathbb{N}^+$ nazwiemy następującą własność rozkładu Z:

Jeśli $I = [a, b] \subset [1, 10]$, *to prawdopodobieństwo* $P(m(Z) \in I) = P(m(Z^p) \in I)$.

Lemat

Ciągły rozkład Benforda ma własność niezmienniczości skalowania z dowolną stałą dodatnią i potęgowania z dowolnym wykładnikiem.

Lemat

Ciągły rozkład Benforda ma własność niezmienniczości skalowania z dowolną stałą dodatnią i potęgowania z dowolnym wykładnikiem.

Dla skalowania możemy założyć, że $1 < k < 10$.
Pokażemy najtrudniejszy przypadek, gdy $a < k < b$. Wtedy

$$\begin{aligned} P(m(kY) \in I) &= P(kY \in [a,b] \cup [10a, 10b]) = P\left(Y \in \left[1, \tfrac{b}{k}\right] \cup \left[\tfrac{10a}{k}, 10\right]\right) \\ &= \log_{10} \tfrac{b}{k} - \log_{10} 1 + \log_{10} 10 - \log_{10} \tfrac{10a}{k} = \log_{10} b - \log_{10} a = P(Y \in I). \end{aligned}$$

Lemat

Ciągły rozkład Benforda ma własność niezmienniczości skalowania z dowolną stałą dodatnią i potęgowania z dowolnym wykładnikiem.

Dla skalowania możemy założyć, że $1 < k < 10$.
Pokażemy najtrudniejszy przypadek, gdy $a < k < b$. Wtedy

$$P(m(kY) \in I) = P(kY \in [a, b] \cup [10a, 10b]) = P(Y \in \left[1, \tfrac{b}{k}\right] \cup \left[\tfrac{10a}{k}, 10\right])$$
$$= \log_{10} \tfrac{b}{k} - \log_{10} 1 + \log_{10} 10 - \log_{10} \tfrac{10a}{k} = \log_{10} b - \log_{10} a = P(Y \in I).$$

Pokażemy prawo potęgowania dla $p = 2$.

$$P(m(Y^2) \in I) = P(Y^2 \in [a, b] \cup [10a, 10b]) = P(Y \in \left[\sqrt{a}, \sqrt{b}\right] \cup \left[\sqrt{10a}, \sqrt{10b}\right])$$
$$= \log_{10} \sqrt{b} - \log_{10} \sqrt{a} + \log_{10} \sqrt{10b} - \log_{10} \sqrt{10a} = \log_{10} b - \log_{10} a = P(Y \in I).$$

Lemat

Ciągły rozkład Benforda ma własność niezmienniczości skalowania z dowolną stałą dodatnią i potęgowania z dowolnym wykładnikiem.

Dla skalowania możemy założyć, że $1 < k < 10$.
Pokażemy najtrudniejszy przypadek, gdy $a < k < b$. Wtedy

$$
\begin{aligned}
P(m(kY) \in I) &= P(kY \in [a, b] \cup [10a, 10b]) = P\left(Y \in \left[1, \tfrac{b}{k}\right] \cup \left[\tfrac{10a}{k}, 10\right]\right) \\
&= \log_{10} \tfrac{b}{k} - \log_{10} 1 + \log_{10} 10 - \log_{10} \tfrac{10a}{k} = \log_{10} b - \log_{10} a = P(Y \in I).
\end{aligned}
$$

Pokażemy prawo potęgowania dla $p = 2$.

$$
\begin{aligned}
P(m(Y^2) \in I) &= P(Y^2 \in [a, b] \cup [10a, 10b]) = P\left(Y \in \left[\sqrt{a}, \sqrt{b}\right] \cup \left[\sqrt{10a}, \sqrt{10b}\right]\right) \\
&= \log_{10} \sqrt{b} - \log_{10} \sqrt{a} + \log_{10} \sqrt{10b} - \log_{10} \sqrt{10a} = \log_{10} b - \log_{10} a = P(Y \in I).
\end{aligned}
$$

Co więcej, ciągły rozkład Benforda jest niezmienniczy przy odwracaniu ($P(10/Y \in I) = P(Y \in I)$) oraz mnożeniu rozkładów niezależnych ($P(m(Y_1 Y_2) \in I) = P(Y \in I)$).

Czy własność niezmienniczości przy skalowaniu wystarcza?

Pytanie

Czy założenie, że rozkład ma własność niezmienniczości już implikuje jakiś związek z rozkładem Benforda?

Logarytmy są wszędzie

1. System zapisu pozycyjnego liczb w swej istocie jest wykładniczy (odwrotność logarytmicznego), co jest źródłem rozkładu Benforda.

Logarytmy są wszędzie

1. System zapisu pozycyjnego liczb w swej istocie jest wykładniczy (odwrotność logarytmicznego), co jest źródłem rozkładu Benforda.
2. Postrzeganie wartości monetarnych (bardziej ogólnie: liczbowych) opisywane jest skalą logarytmiczną.

Logarytmy są wszędzie

1. System zapisu pozycyjnego liczb w swej istocie jest wykładniczy (odwrotność logarytmicznego), co jest źródłem rozkładu Benforda.
2. Postrzeganie wartości monetarnych (bardziej ogólnie: liczbowych) opisywane jest skalą logarytmiczną.
3. Postrzeganie wysokości dźwięku w zależności od częstotliwości jest logarytmiczne.

Logarytmy są wszędzie

1. System zapisu pozycyjnego liczb w swej istocie jest wykładniczy (odwrotność logarytmicznego), co jest źródłem rozkładu Benforda.
2. Postrzeganie wartości monetarnych (bardziej ogólnie: liczbowych) opisywane jest skalą logarytmiczną.
3. Postrzeganie wysokości dźwięku w zależności od częstotliwości jest logarytmiczne.
4. Skala natężenia dźwięku w decybelach jest logarytmiczna.

Logarytmy są wszędzie

1. System zapisu pozycyjnego liczb w swej istocie jest wykładniczy (odwrotność logarytmicznego), co jest źródłem rozkładu Benforda.
2. Postrzeganie wartości monetarnych (bardziej ogólnie: liczbowych) opisywane jest skalą logarytmiczną.
3. Postrzeganie wysokości dźwięku w zależności od częstotliwości jest logarytmiczne.
4. Skala natężenia dźwięku w decybelach jest logarytmiczna.
5. Wrażliwość oka ludzkiego na światło jest logarytmiczna (w konsekwencji na przykład tak samo jest ze skalą jasności gwiazdowych).

Logarytmy są wszędzie

1. System zapisu pozycyjnego liczb w swej istocie jest wykładniczy (odwrotność logarytmicznego), co jest źródłem rozkładu Benforda.
2. Postrzeganie wartości monetarnych (bardziej ogólnie: liczbowych) opisywane jest skalą logarytmiczną.
3. Postrzeganie wysokości dźwięku w zależności od częstotliwości jest logarytmiczne.
4. Skala natężenia dźwięku w decybelach jest logarytmiczna.
5. Wrażliwość oka ludzkiego na światło jest logarytmiczna (w konsekwencji na przykład tak samo jest ze skalą jasności gwiazdowych).
6. Wydaje się, że podobnie jest z innymi zmysłami ludzkimi.