

Od mozaik do hiperbolicznego origami

Jolanta Marzec-Ballesteros



67. Szkoła Matematyki Poglądowej
Na początku było pytanie

23 – 26 sierpnia 2024, Siedlce

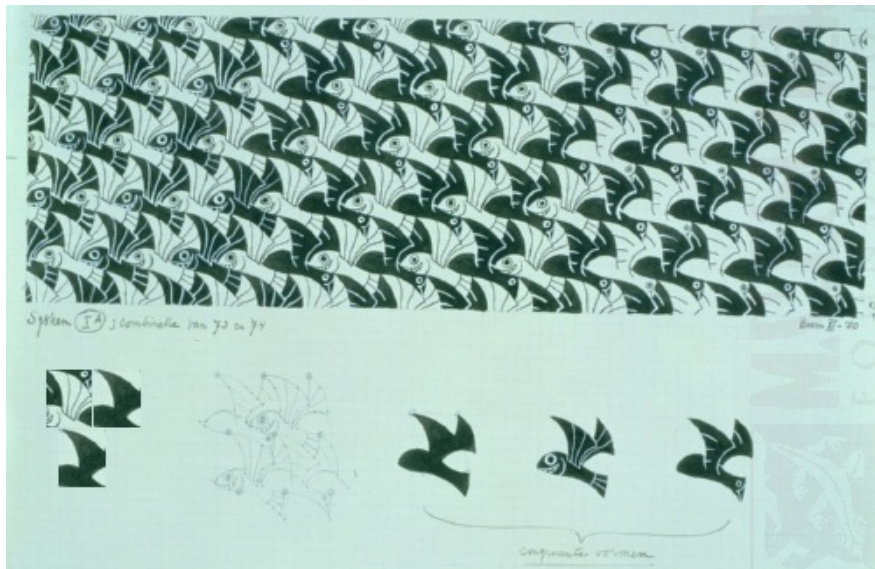
Jak Escher to narysował?

Problem: Utworzyć wzór, który powtarzałby się w ∞ w ograniczonej figurze.



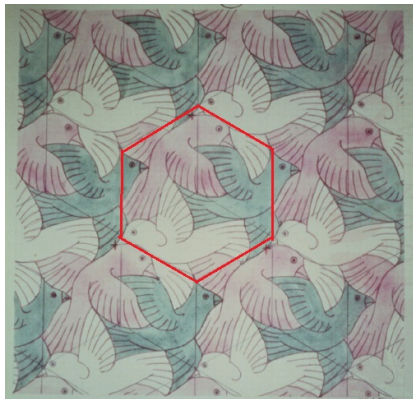
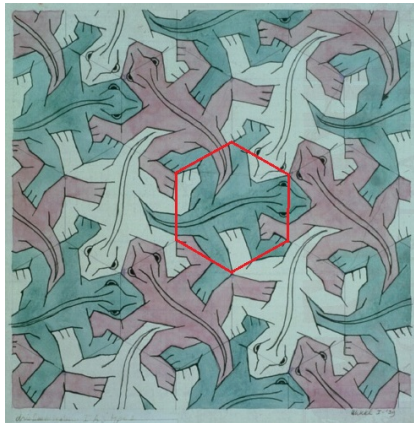
Źródło: <https://mcescher.com/gallery/symmetry/>

Jak Escher to narysował?



Źródło: <https://mcescher.com/gallery/symmetry/>

Jak Escher to narysował?



Źródło: <https://mcescher.com/gallery/symmetry/>

Definicja

Dziedziną fundamentalną dla grupy $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ taki, że

- $\forall_{g_1, g_2 \in G} (g_1 \neq g_2 \Rightarrow g_1 \mathcal{D} \cap g_2 \mathcal{D} = \emptyset),$
- $\forall_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \exists!_{(x_0, y_0) \in \mathcal{D}} \exists_{g \in G} (x, y) = g(x_0, y_0).$

Definicja

Dziedziną fundamentalną dla grupy $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ taki, że

- $\forall_{g_1, g_2 \in G} (g_1 \neq g_2 \Rightarrow g_1 \mathcal{D} \cap g_2 \mathcal{D} = \emptyset),$
- $\forall_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \exists!_{(x_0, y_0) \in \mathcal{D}} \exists_{g \in G} (x, y) = g(x_0, y_0).$

→ My dodatkowo chcemy, aby G zachowywała odległości, tzn.

$$\forall_{A, B \in \mathbb{R}^2} \forall_{g \in G} d(gA, gB) = d(A, B).$$

Definicja

Dziedziną fundamentalną dla grupy $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ taki, że

- $\forall_{g_1, g_2 \in G} (g_1 \neq g_2 \Rightarrow g_1 \mathcal{D} \cap g_2 \mathcal{D} = \emptyset),$
- $\forall_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \exists!_{(x_0, y_0) \in \mathcal{D}} \exists_{g \in G} (x, y) = g(x_0, y_0).$

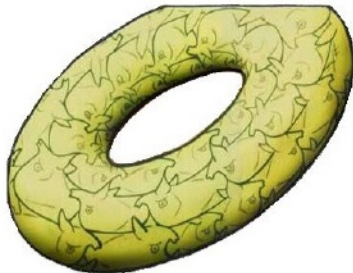
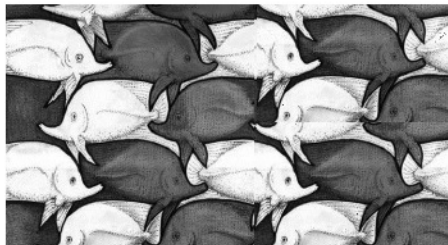
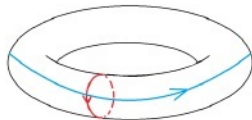
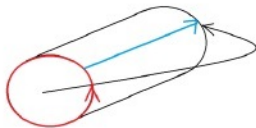
→ My dodatkowo chcemy, aby G zachowywała odległości, tzn.

$$\forall_{A, B \in \mathbb{R}^2} \forall_{g \in G} d(gA, gB) = d(A, B).$$

Na płaszczyźnie taka grupa G składa się tylko ze złożień:

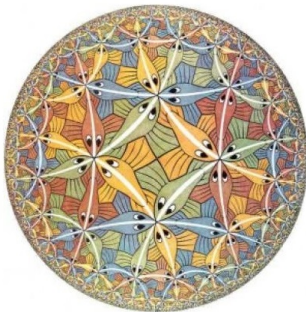
translacji, obrotów i odbić symetrycznych.

Origami na płaszczyźnie



Źródło: Diana Krawczyńska, "O pewnej klasie regularnych parkietaży z dwoma rodzajami płytek". Wrocław 2019. (Praca mgr.)

Mozaiki hiperboliczne



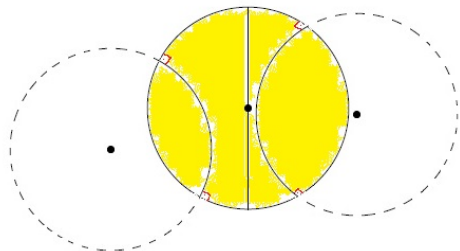
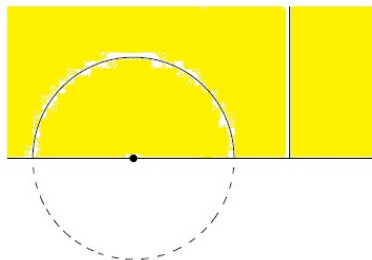
Źródło: <https://mcescher.com/gallery/symmetry/>

Odległość na płaszczyźnie hiperbolicznej

\mathbb{H} płaszczyzna hiperboliczna

$d_{\mathbb{H}}(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \text{długość linii geodezyjnej łączącej punkty } A, B \in \mathbb{H}$

Linie geodezyjne na \mathbb{H} :



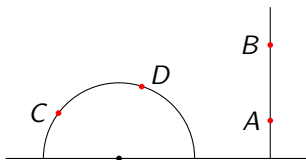
Odległość na płaszczyźnie hiperbolicznej

$d_{\mathbb{H}}(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \text{długość linii geodezyjnej łączącej}$
punkty $A = x_A + iy_A, B = x_B + iy_B$

$$= \int_{\sigma} \frac{1}{\text{Im}(z)} dz = \int_a^b \frac{|\sigma'(t)|}{\text{Im}(\sigma(t))} dt$$

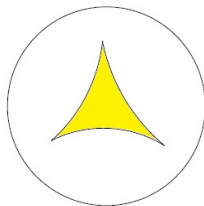
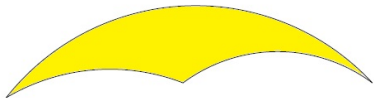
(tutaj $\sigma : [y_A, y_B] \rightarrow [A, B], \sigma(t) = x_A + it$)

$$= \int_{y_A}^{y_B} \frac{1}{t} dt = \ln(y_B) - \ln(y_A)$$



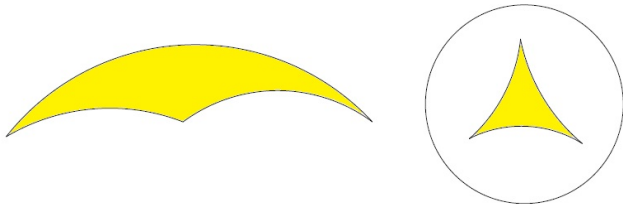
Cel: użyć wielokątów wypukłych do pokrycia płaszczyzny hiperbolicznej \mathbb{H} .

→ Boki wielokąta wypukłego są liniami geodezyjnymi.



Cel: użyć wielokątów wypukłych do pokrycia płaszczyzny hiperbolicznej \mathbb{H} .

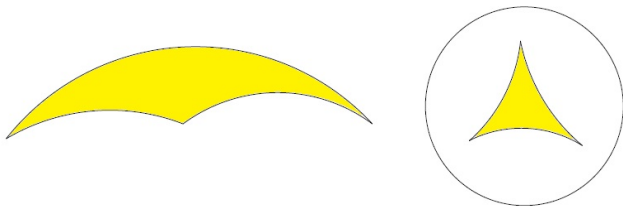
→ Boki wielokąta wypukłego są liniami geodezyjnymi.



Kiedy dany wielokąt wypukły jest dziedziną fundamentalną dla jakiejś grupy $G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$?

Cel: użyć wielokątów wypukłych do pokrycia płaszczyzny hiperbolicznej \mathbb{H} .

→ Boki wielokąta wypukłego są liniami geodezyjnymi.



Kiedy dany wielokąt wypukły jest dziedziną fundamentalną dla jakiejś grupy $G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$?

Jak znaleźć taką grupę, gdy mamy kandydata na taki wielokąt?

Grupa izometrii \mathbb{H}

Grupa izometrii \mathbb{H}

Jest nią

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{translacje}}, \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}}_{\text{dylatacje}}, \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{\text{obroty wokół } i} : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha \in [0, 2\pi) \right\rangle.$$

Dla $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $z = x + iy \in \mathbb{H}$ definiujemy

$$g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = (az + b)(cz + d)^{-1}.$$

Grupa izometrii \mathbb{H}

Jest nią

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{translacje}}, \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}}_{\text{dylatacje}}, \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{\text{obroty wokół } i} : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha \in [0, 2\pi) \right\rangle.$$

Dla $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $z = x + iy \in \mathbb{H}$ definiujemy

$$g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = (az + b)(cz + d)^{-1}.$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = (1 \cdot z + 1)(0 \cdot z + 1)^{-1} = z + 1 = x + 1 + iy$

Grupa izometrii \mathbb{H}

Jest nią

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{translacje}}, \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}}_{\text{dylatacje}}, \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{\text{obroty wokół } i} : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha \in [0, 2\pi) \right\rangle.$$

Dla $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $z = x + iy \in \mathbb{H}$ definiujemy

$$g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = (az + b)(cz + d)^{-1}.$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = (1 \cdot z + 1)(0 \cdot z + 1)^{-1} = z + 1 = x + 1 + iy$
- $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} z = az(a^{-1})^{-1} = a^2 z = a^2 x + ia^2 y$

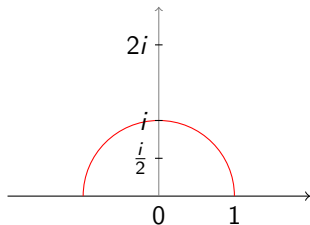
Przykład

Niech $\Gamma = \langle T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Poszukamy dziedziny fundamentalnej \mathcal{D} dla Γ zawierającej punkt $p = 2i$.

Przykład

Niech $\Gamma = \langle T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Poszukamy dziedziny fundamentalnej \mathcal{D} dla Γ zawierającej punkt $p = 2i$.

$$S : z \mapsto \frac{-1}{z}, \quad 2i \mapsto \frac{i}{2}$$

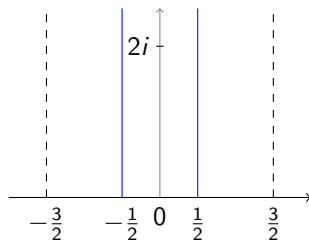
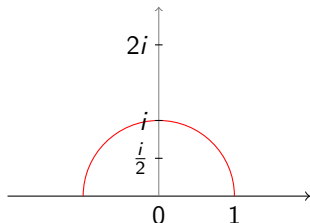


Przykład

Niech $\Gamma = \langle T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Poszukamy dziedziny fundamentalnej \mathcal{D} dla Γ zawierającej punkt $p = 2i$.

$$S : z \mapsto \frac{-1}{z}, \quad 2i \mapsto \frac{i}{2}$$

$$T : z \mapsto z + 1, \quad T^{-1} : z \mapsto z - 1$$

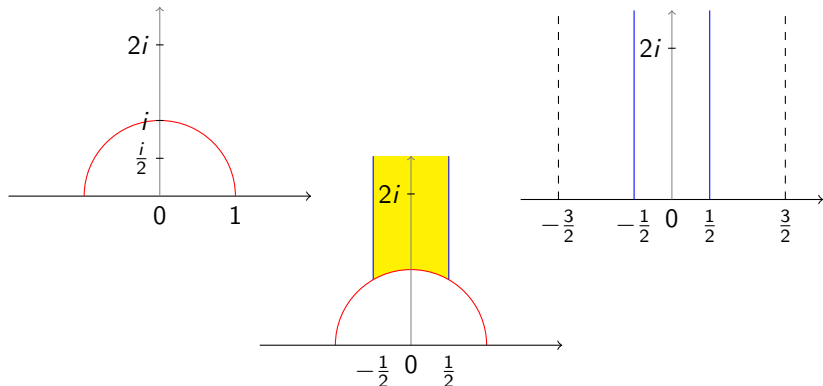


Przykład

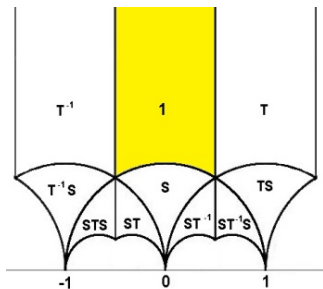
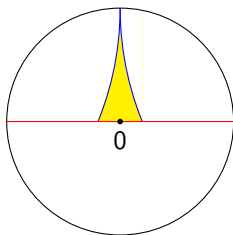
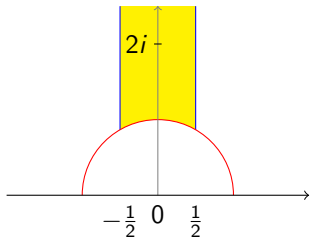
Niech $\Gamma = \langle T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Poszukamy dziedziny fundamentalnej \mathcal{D} dla Γ zawierającej punkt $p = 2i$.

$$S : z \mapsto \frac{-1}{z}, \quad 2i \mapsto \frac{i}{2}$$

$$T : z \mapsto z + 1, \quad T^{-1} : z \mapsto z - 1$$

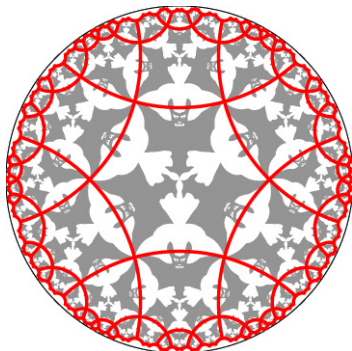


Otrzymaliśmy wielokąt Dirichleta w punkcie $p = 2i$:



Źródło: J. Costa, L. Salamatian, A. Ferreira Costa, "Visualising modular forms".

Escher: circle limit IV



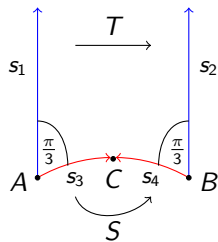
Źródło: <https://web.colby.edu/thegeometricviewpoint/2016/12/21/tessellations-of-the-hyperbolic-plane-and-m-c-escher/>

<https://web.colby.edu/thegeometricviewpoint/2016/12/21/tessellations-of-the-hyperbolic-plane-and-m-c-escher/>

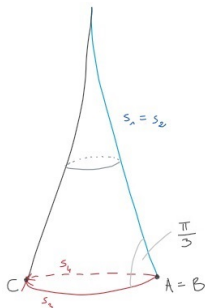
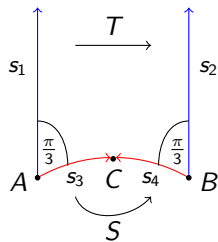
Jak Escher to narysował?

Zobacz: Bill Casselman, "How did Escher do it?", AMS Feature Column, <https://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-circle-limit>

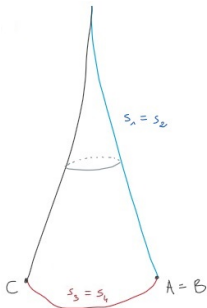
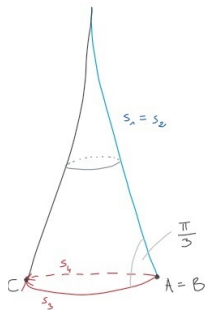
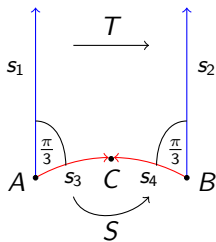
Hiperboliczne origami z trójkąta



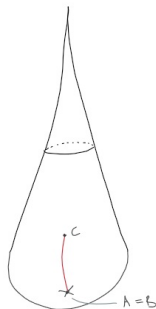
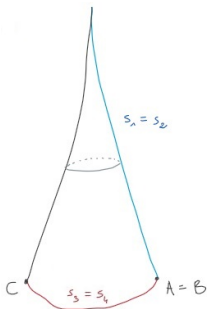
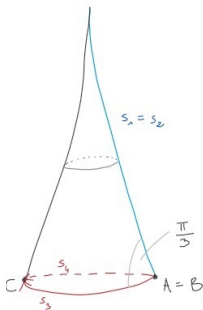
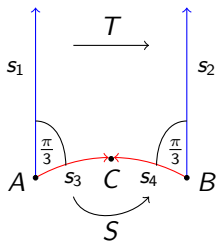
Hiperboliczne origami z trójkąta



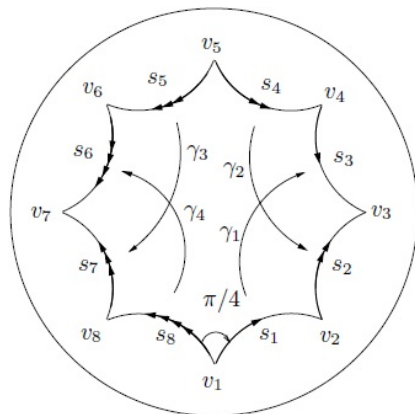
Hiperboliczne origami z trójkąta



Hiperboliczne origami z trójkąta



Hiperboliczne origami z ośmiokąta foremnego



Źródło: Charles Walkden, "Hyperbolic geometry" (skrypt wykładu).

Animacja Jos Leys, od ośmiokąta do powierzchni 3-wymiarowej: [▶ Link](#)

Ogólne konstrukcje: wielokąt Dirichleta

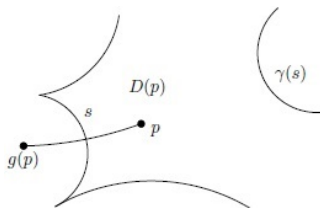
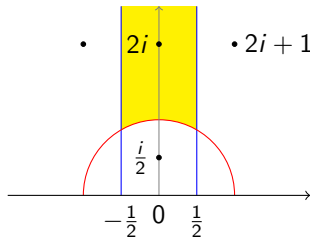
Założenia:

- $\Gamma \subset \text{SL}_2(\mathbb{R})$: grupa dyskretna, $\forall z, w \in \mathbb{H} \exists \gamma \in \Gamma w = \gamma z$
- $p \in \mathbb{H}$: $\gamma p \neq p$ dla $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$

Obszarem Dirichleta w punkcie p nazywamy zbiór

$$\begin{aligned} D(p) &= \{z \in \mathbb{H} : \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\} d_{\mathbb{H}}(z, p) < d_{\mathbb{H}}(z, \gamma p)\} \\ &= \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} \text{płaszczyzna(środkowa } [p, \gamma p]) \end{aligned}$$

Jeśli pole $D(p)$ jest skończone, to $D(p)$ jest wielokątem wypukłym.

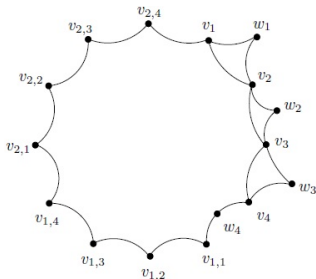


$$\gamma = g^{-1}$$

Ogólne konstrukcje: twierdzenie Poincaré

Cel: konstrukcja powierzchni z g “dziurami” i r “ostrymi punktami”.

- 1 kreślimy n -kąt foremny dla $n = 4g + r$
(o kącie wewnętrznym $\alpha < \frac{\pi(n-2)}{n}$)
- 2 dodajemy r punktów (tak by ich kąty wew. α_j dzieliły 2π)



Rysunek dla $g = 2$, $r = 4$.

Źródło:

Charles Walkden, “Hyperbolic geometry” (skrypt wykładu).

- 3 jeśli $2g - 2 + \sum_{j=1}^r (1 - \frac{\alpha_j}{2\pi}) > 0$,
to otrzymamy szukaną powierzchnię.