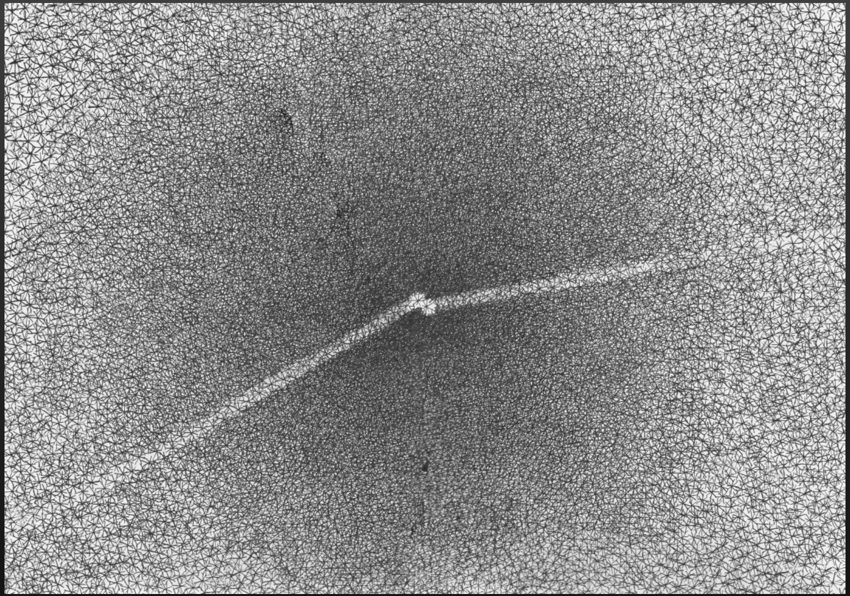
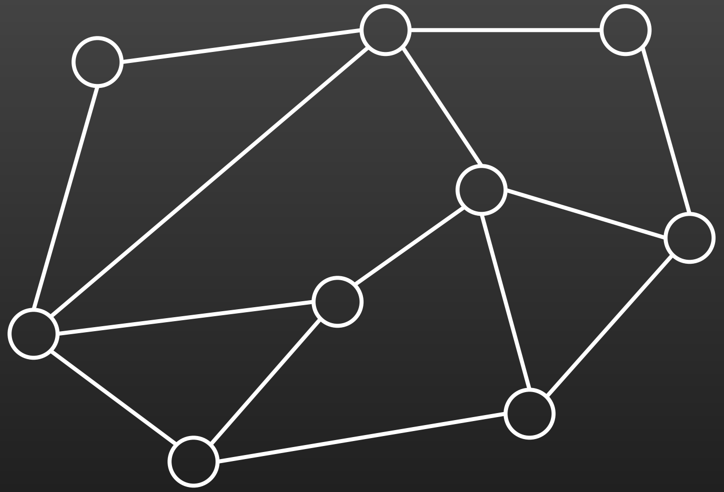
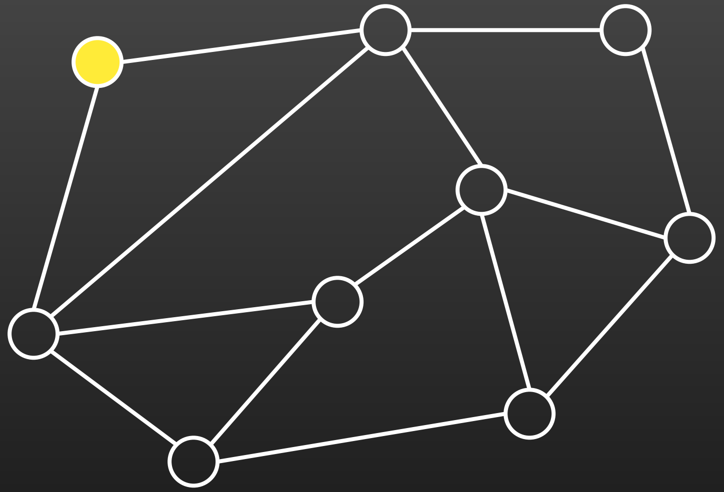
O przyjaźni, rozwadze i szczęściu w teorii grafów

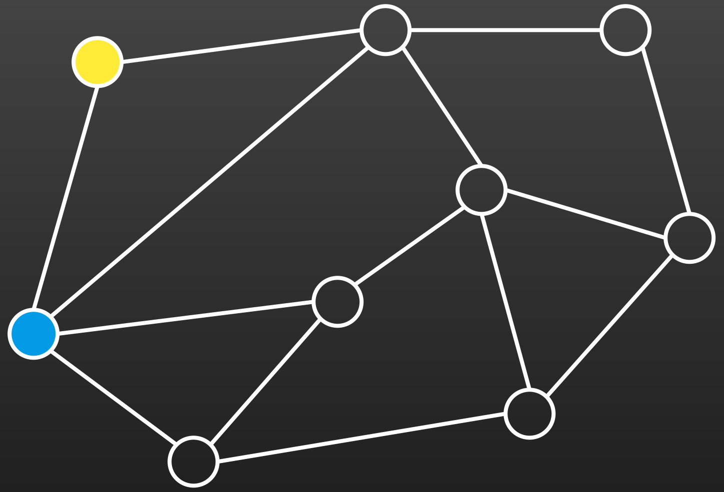


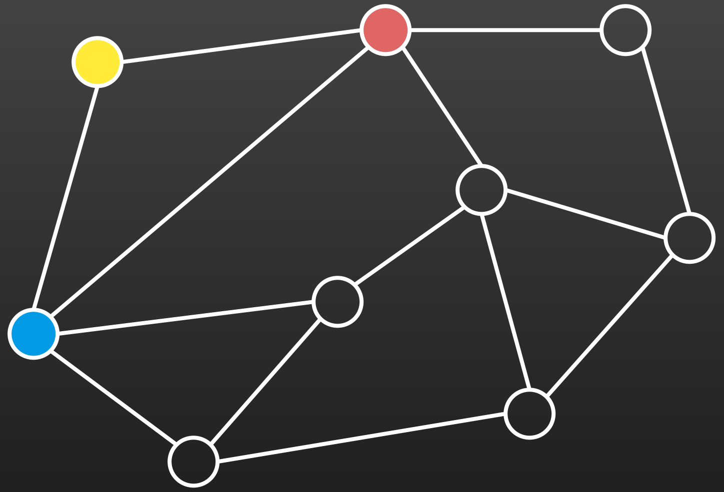
Jarosław Grytczuk
Politechnika Warszawska

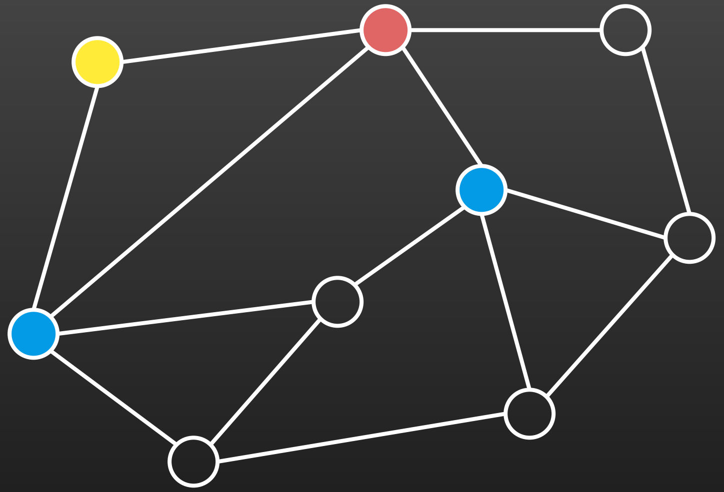
Kolorowanie grafu

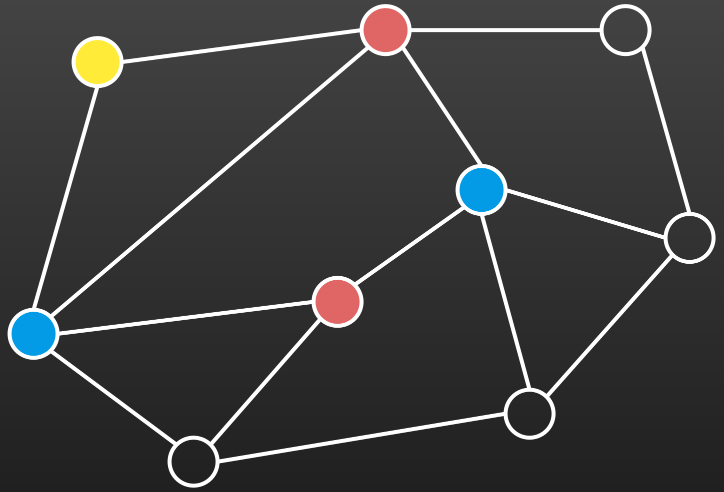


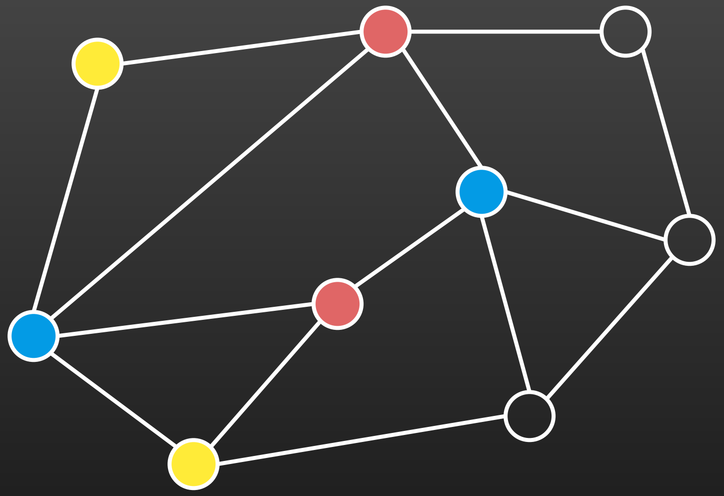


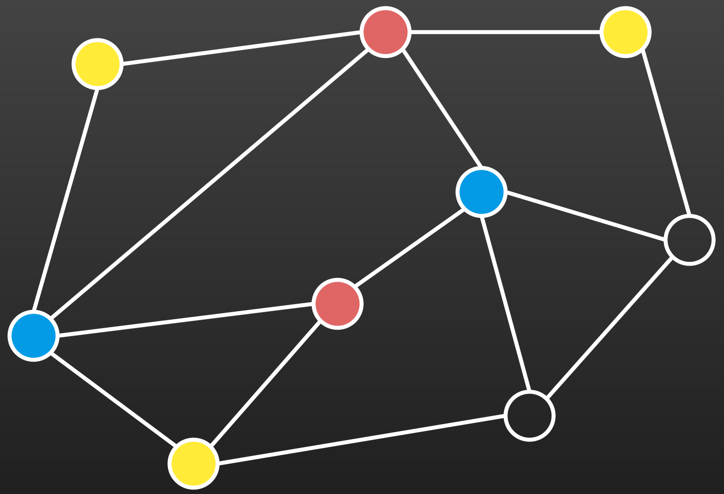


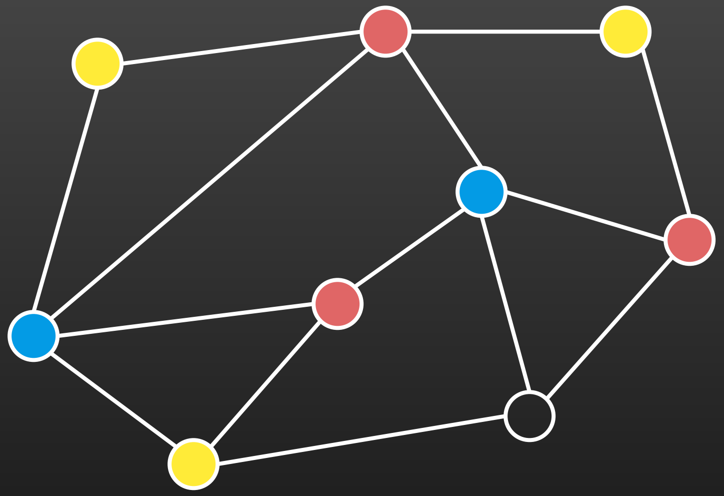


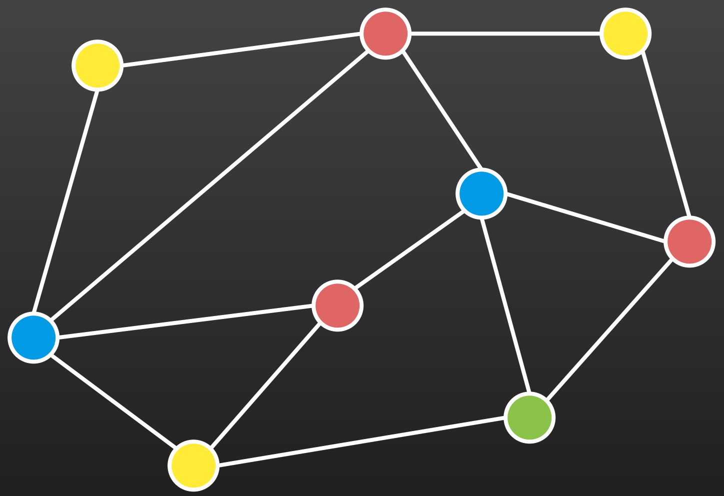


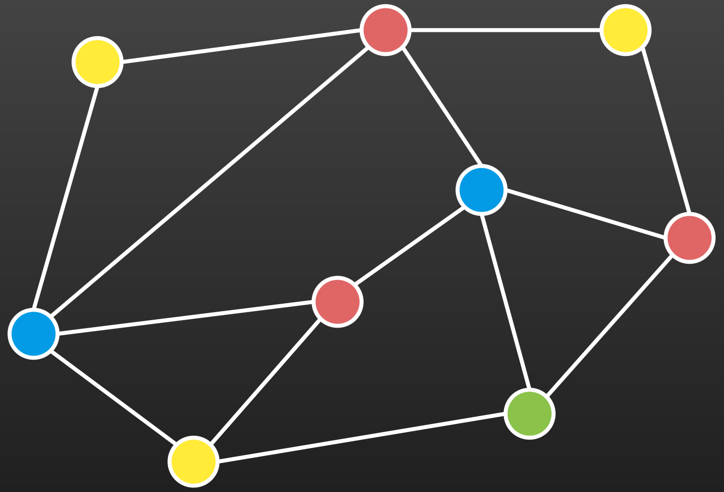






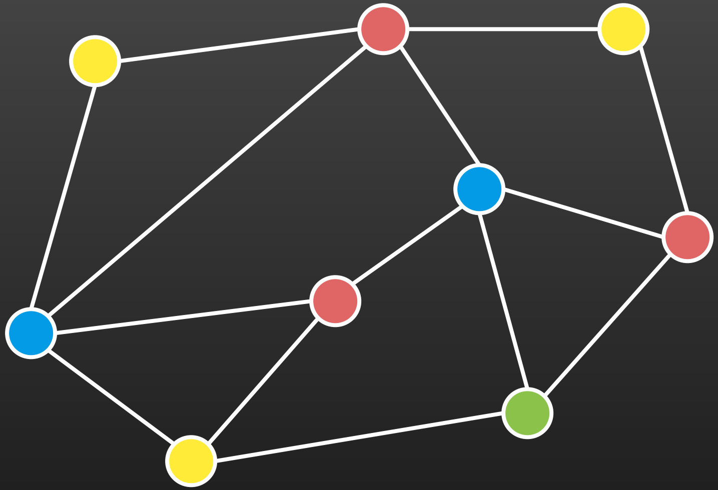






Twierdzenie o czterech kolorach (Appel, Haken, 1977). Każdy graf *planarny* da się pokolorować *poprawnie* używając co najwyżej *czterech* kolorów.

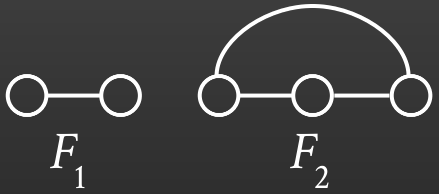
Kenneth Appel i Wolfgang Haken

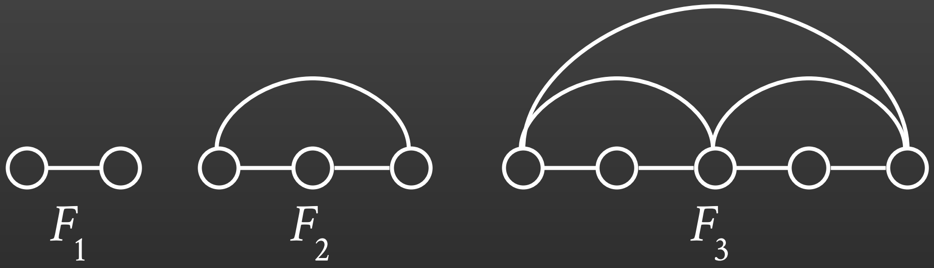


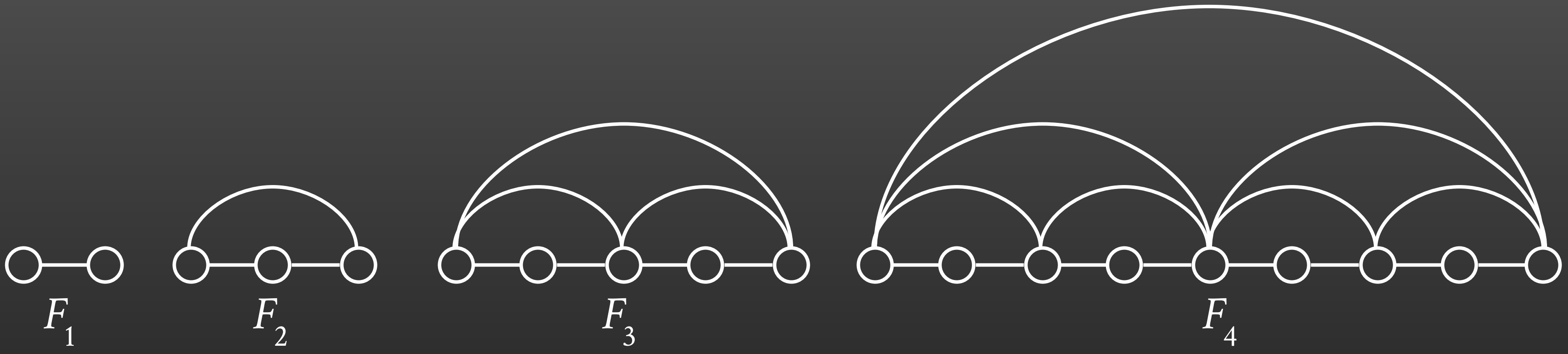
Twierdzenie o czterech kolorach (Appel, Haken, 1977). Każdy graf *planarny* da się pokolorować *poprawnie* używając co najwyżej *czterech* kolorów.

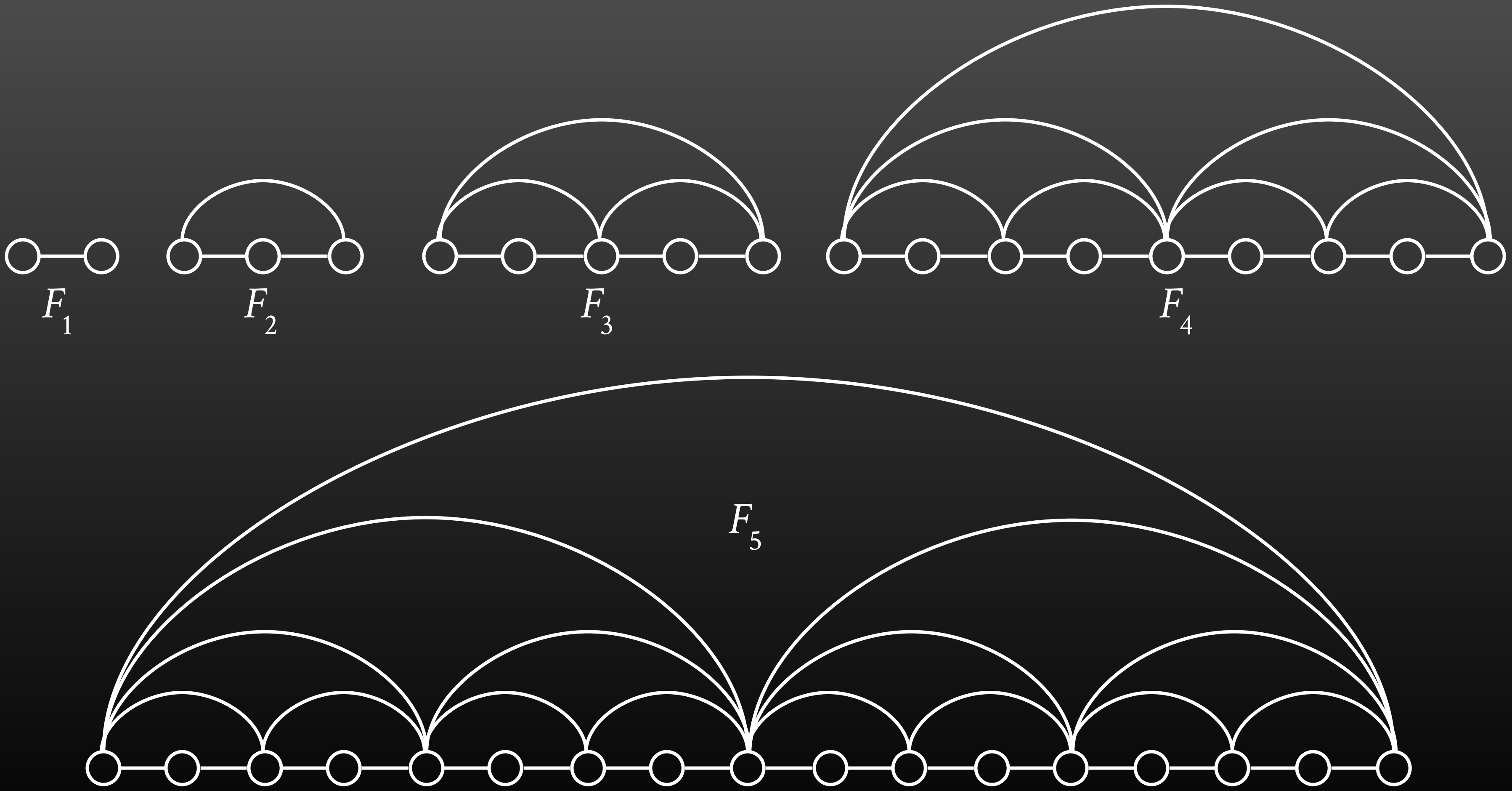
Grafy Fareya

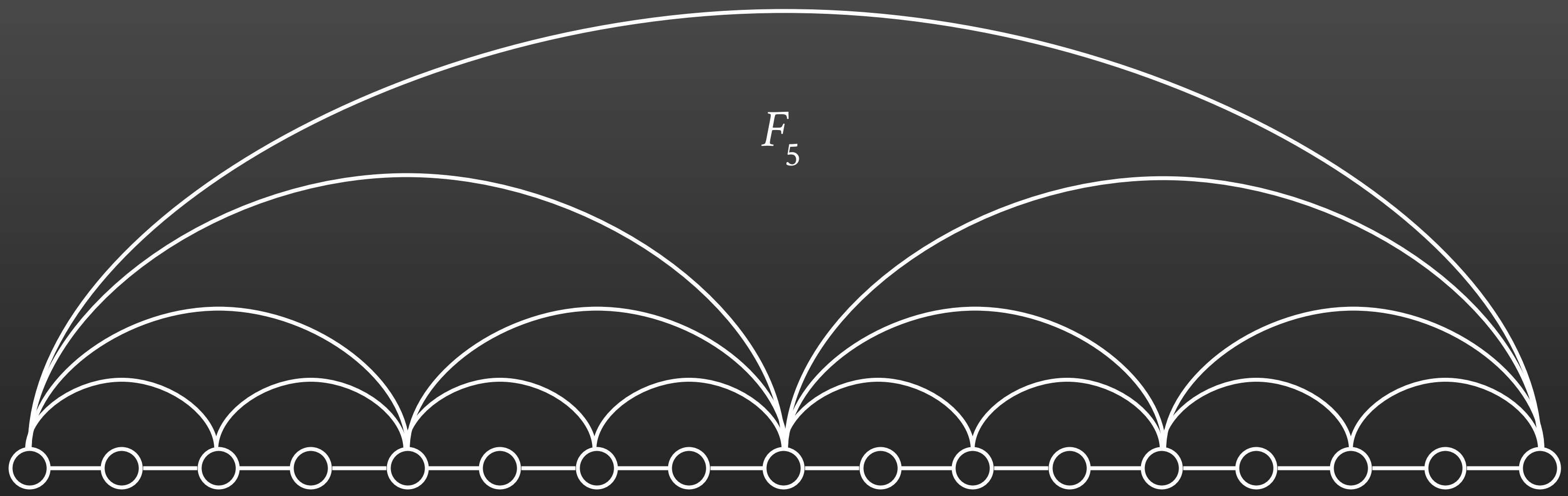
F_1

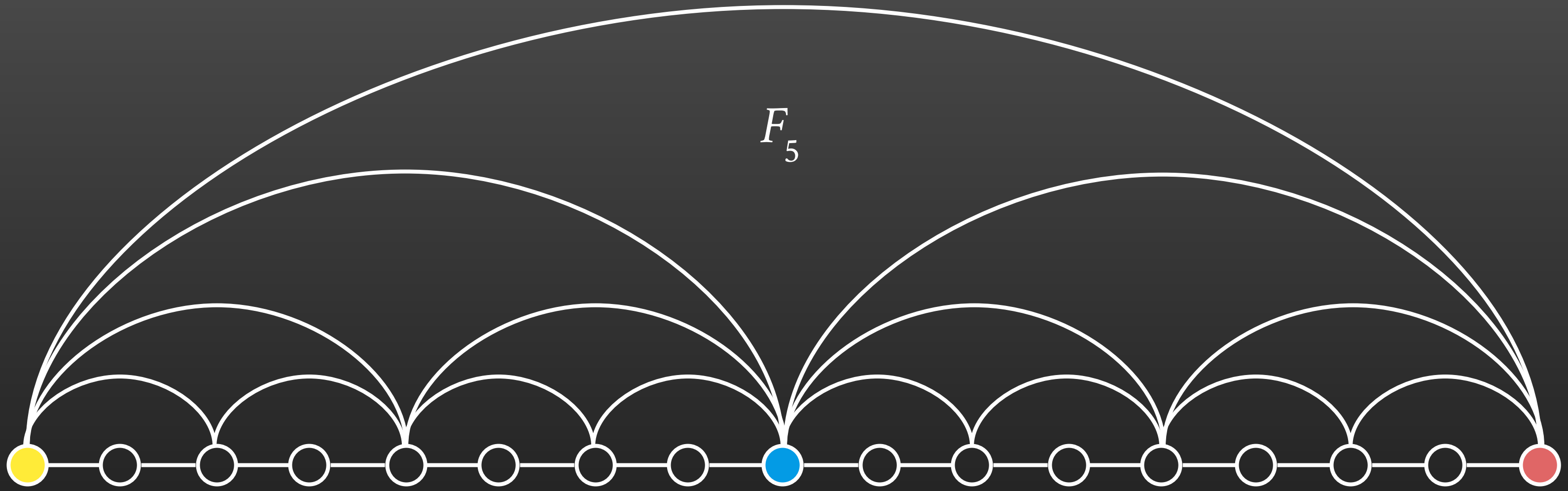

F_1
F_2

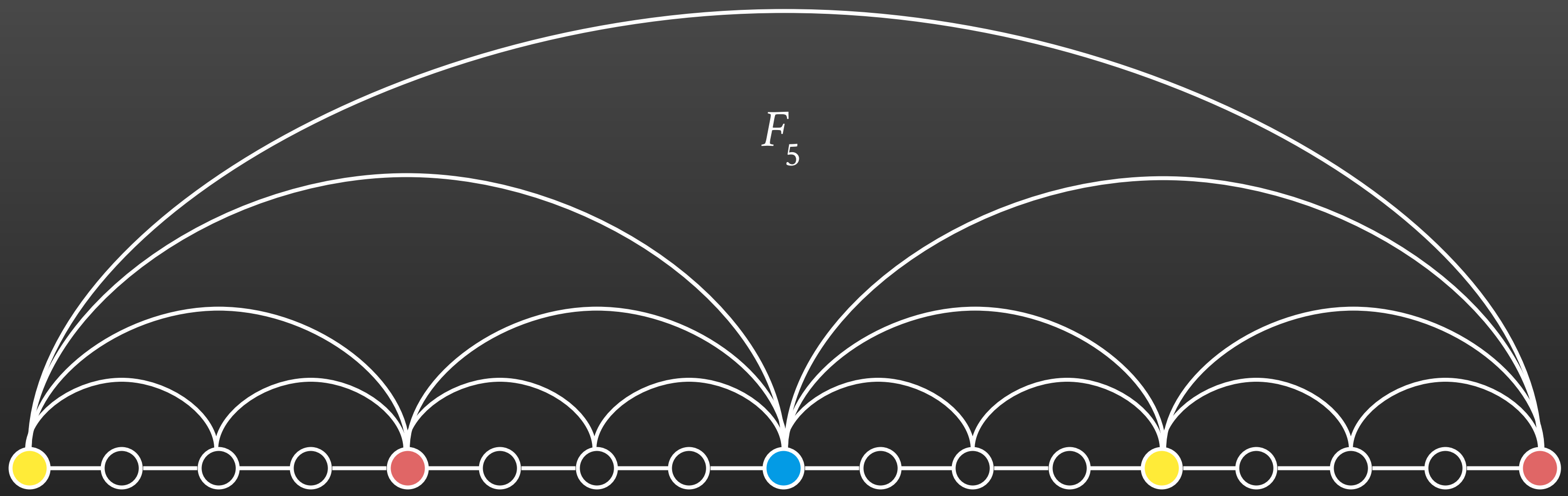

F_1
F_2
F_3

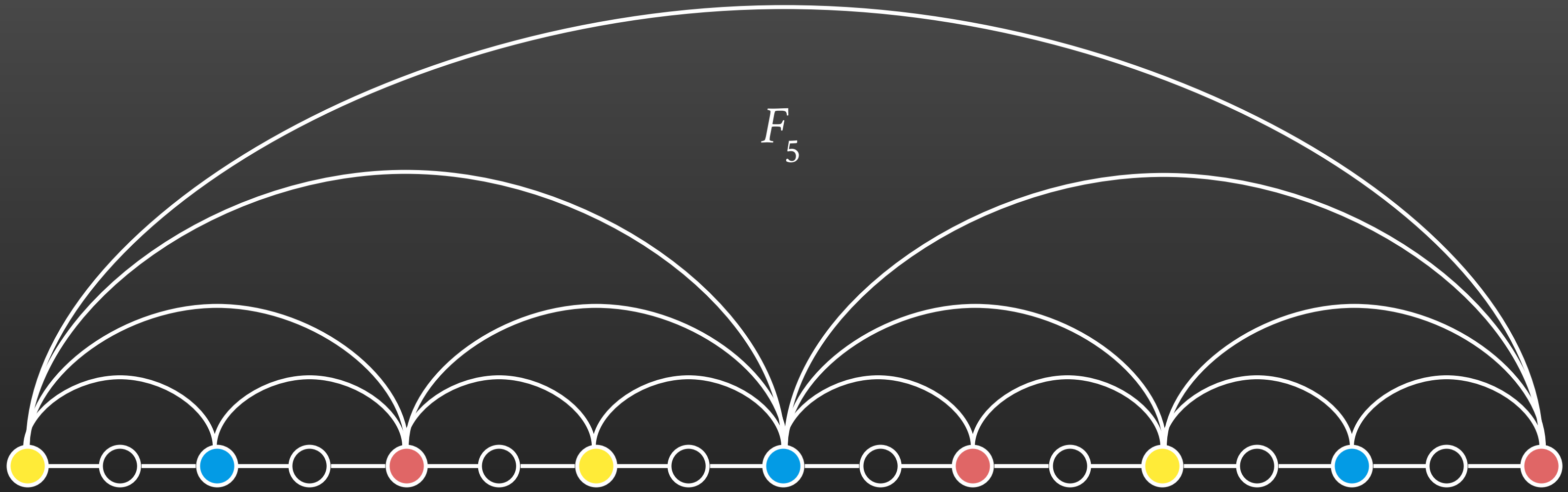

F_1
F_2
F_3
F_4

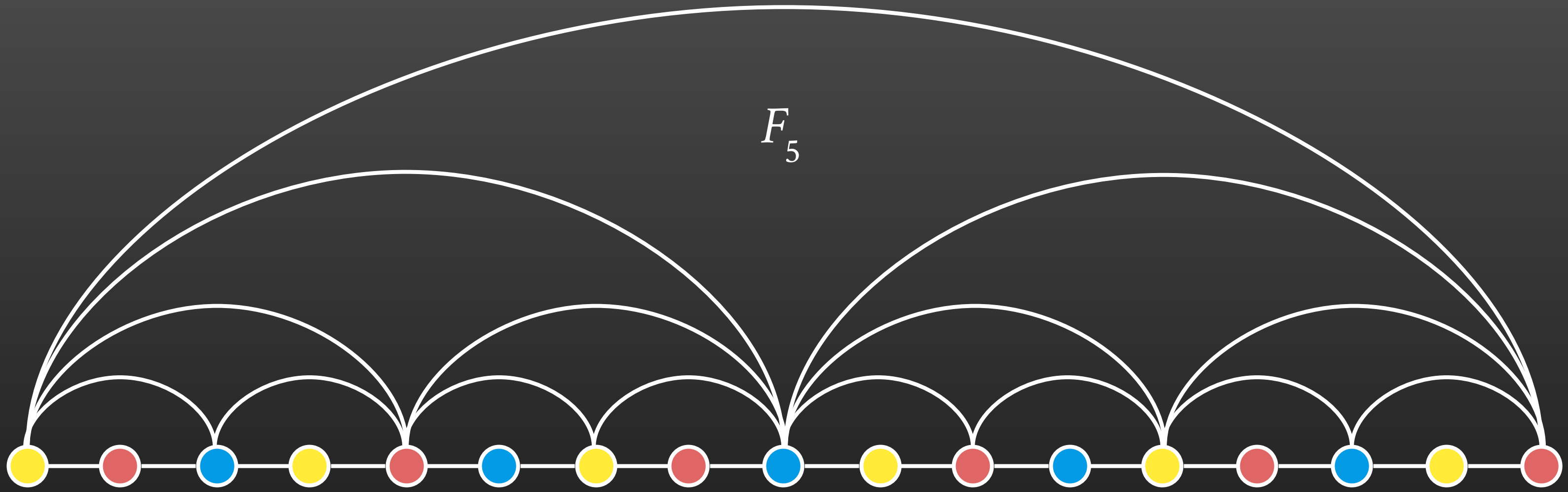

F_1
F_2
F_3
F_4
F_5

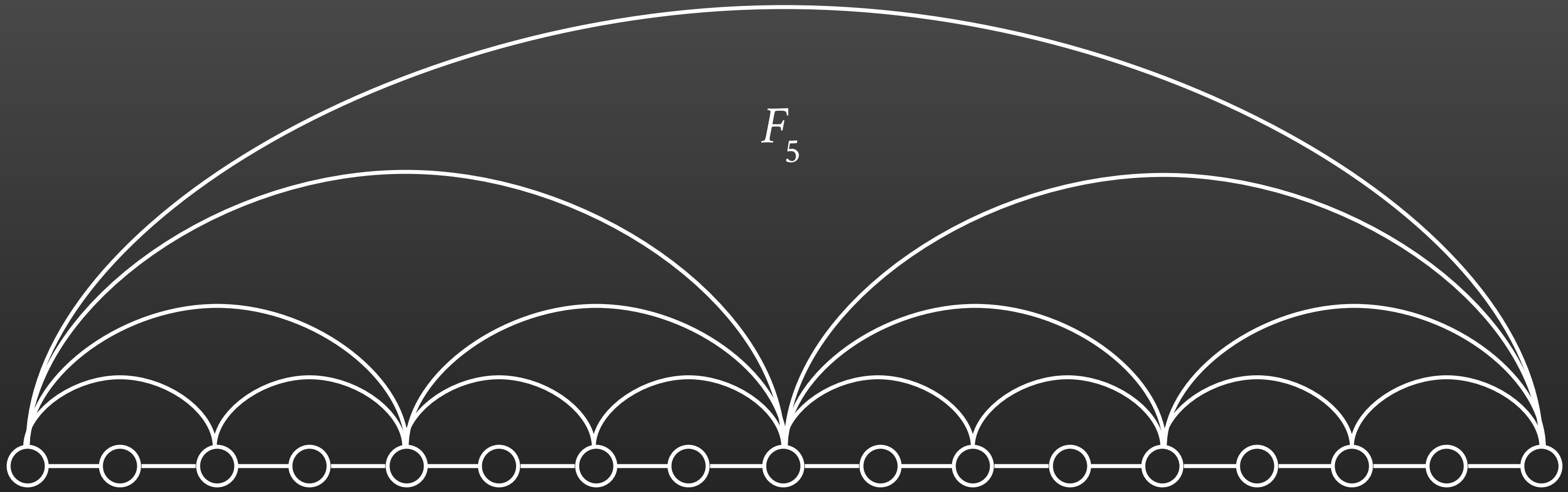

F_5

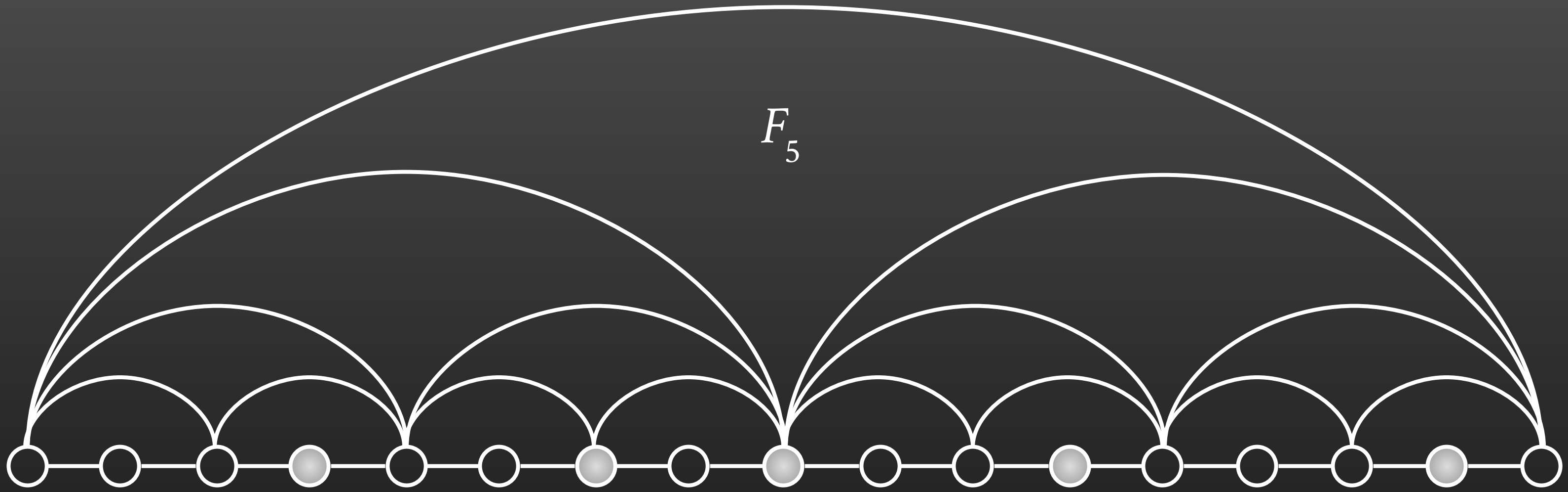

F_5

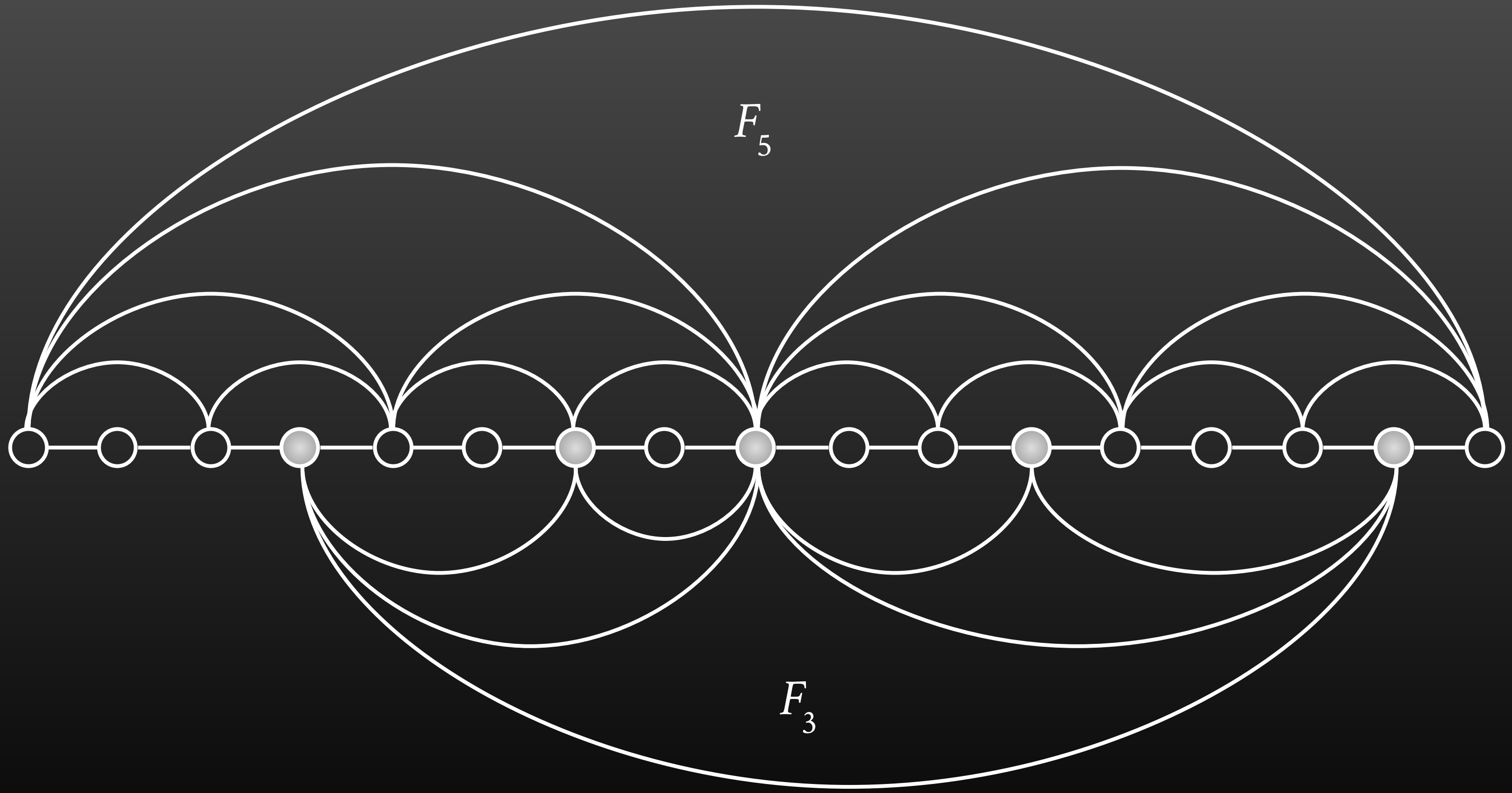

F_5

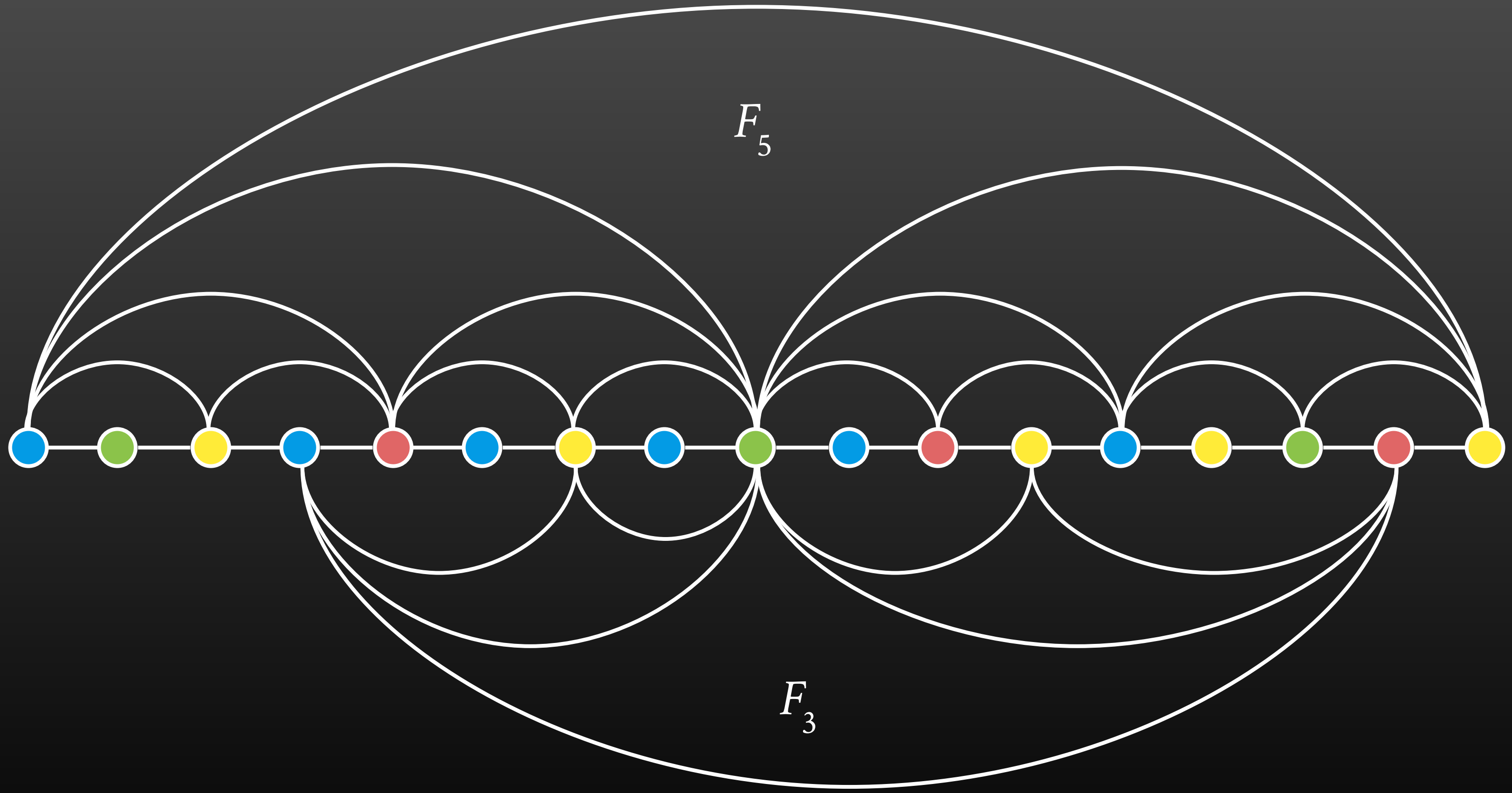

F_5

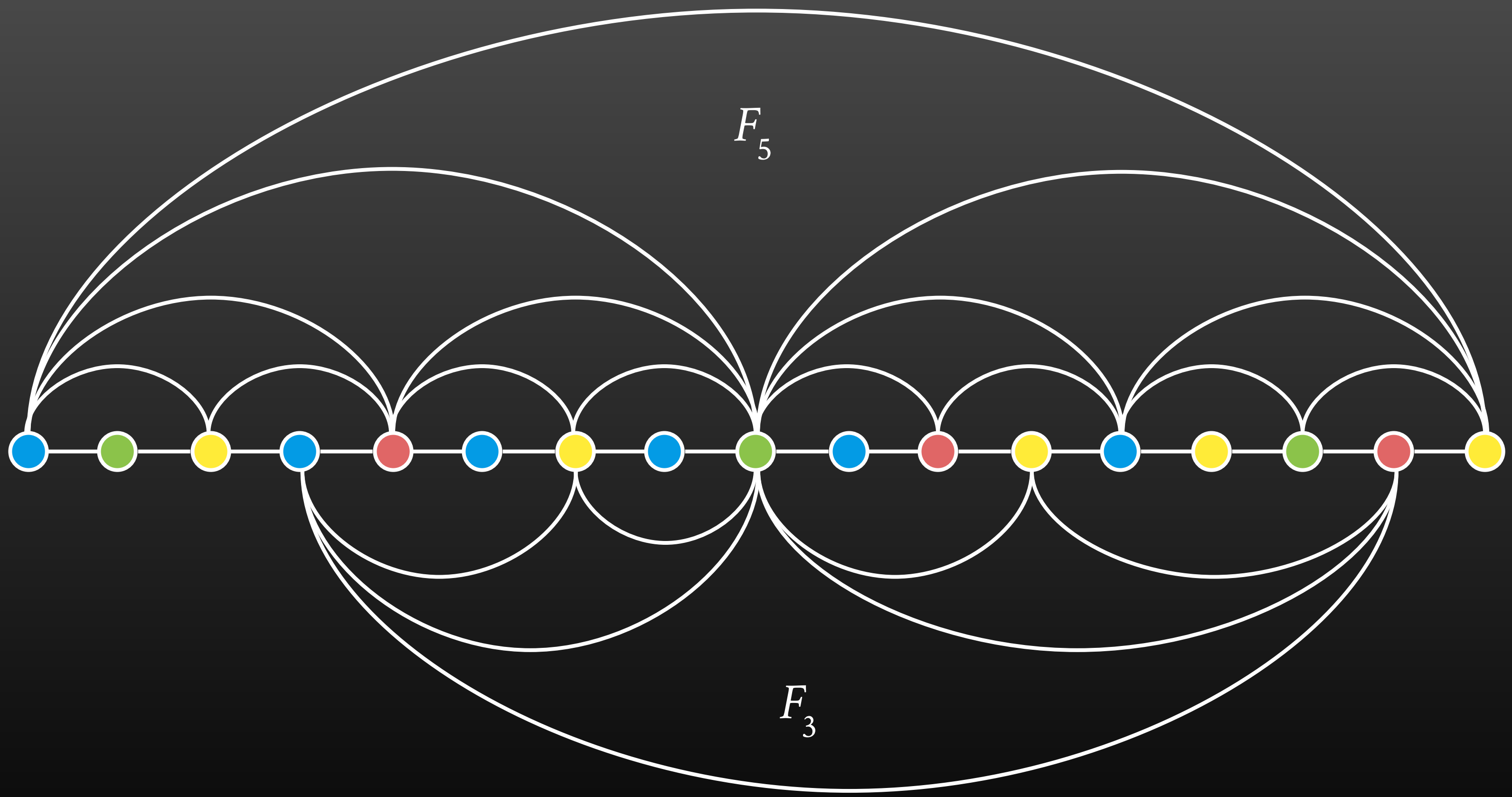

F_5


F_5


F_5

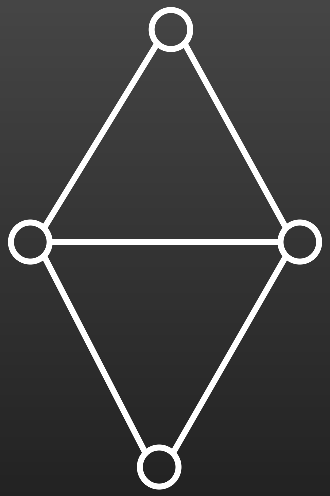

F_5
F_3

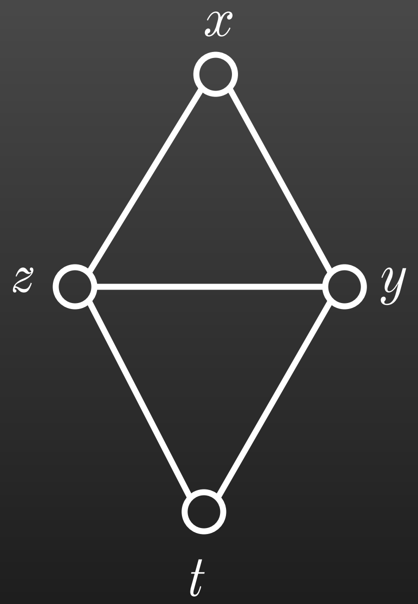

F_5
F_3

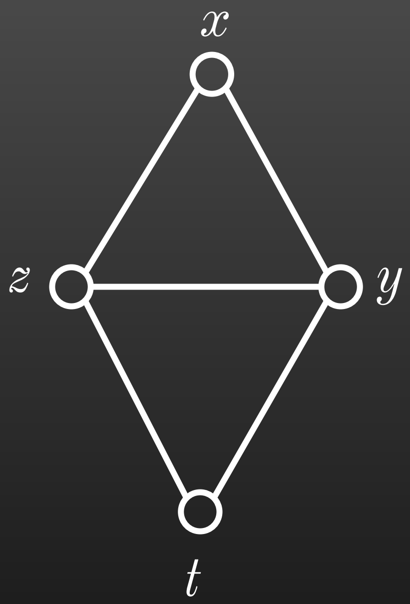


Zadanie: Wykazać, bez użycia twierdzenia o czterech kolorach, że każdy taki graf da się pokolorować poprawnie czterema kolorami.

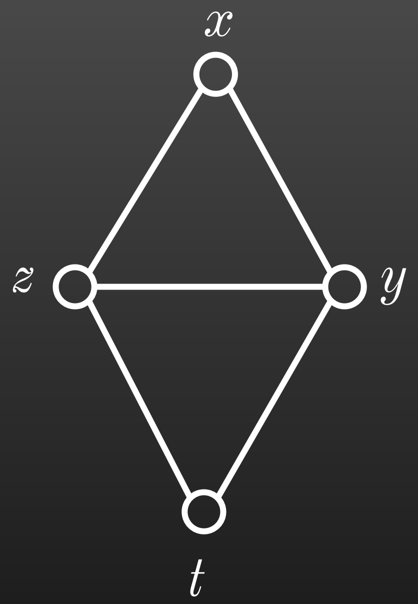
Wielomian grafu




x
z
y
t

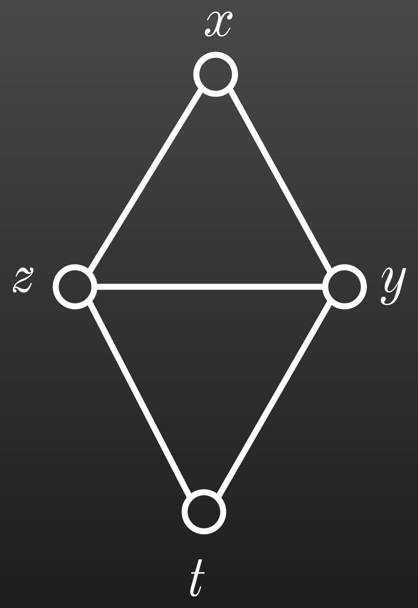


$$P_G(x,y,z,t) = (x - y)(x - z)(y - z)(t - y)(t - z)$$



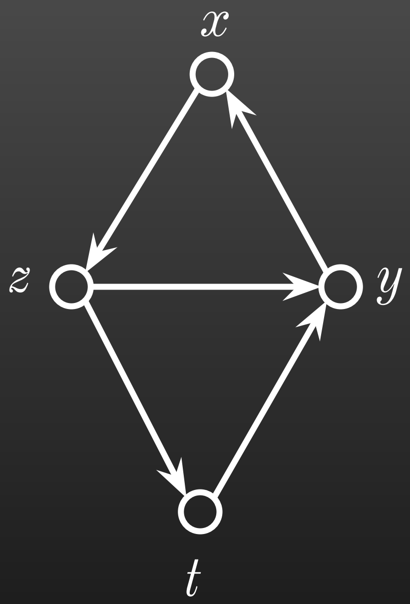
$$P_G(x,y,z,t) = (x - y)(x - z)(y - z)(t - y)(t - z)$$

$$P_G(2,1,0,2) = 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2 = 4 \neq 0$$



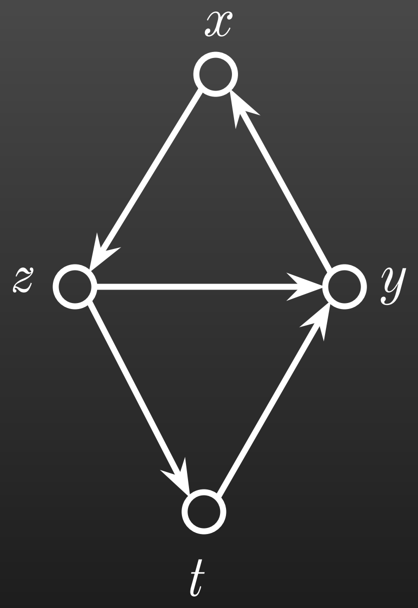
$$P_G(x,y,z,t) = (x - y)(x - z)(y - z)(t - y)(t - z)$$

$$P_G(2,1,0,2) = 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2 = 4 \neq 0$$



$$P_G(x,y,z,t) = (\colorbox{yellow}{x} - y)(x - \colorbox{yellow}{z})(\colorbox{yellow}{y} - z)(t - \colorbox{yellow}{y})(\colorbox{yellow}{t} - z)$$

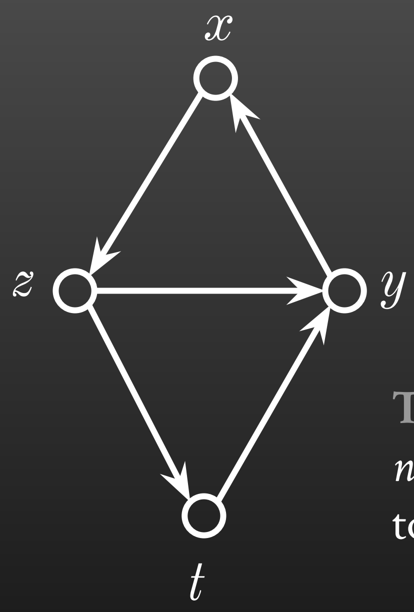
$$P_G(2,1,0,2) = 1\times 2\times 1\times 1\times 2 = 4 \neq 0$$



$$P_G(x,y,z,t) = (x - y)(x - z)(y - z)(t - y)(t - z)$$

$$P_G(2,1,0,2) = 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2 = 4 \neq 0$$

$$P_G(x,y,z,t) = xzy^2t + \ldots$$

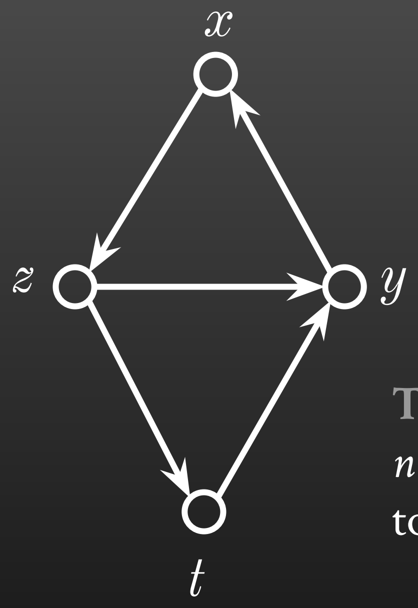


$$P_G(x,y,z,t) = (x - y)(x - z)(y - z)(t - y)(t - z)$$

$$P_G(2,1,0,2) = 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2 = 4 \neq 0$$

$$P_G(x,y,z,t) = xzy^2t + \ldots$$

Twierdzenie (Alon, Tarsi, 1996): Jeżeli wielomian grafu P_G ma *nieznikający* jednomian o wszystkich stopniach zmiennych co najwyżej k, to G ma poprawne $(k+1)$-kolorowanie.



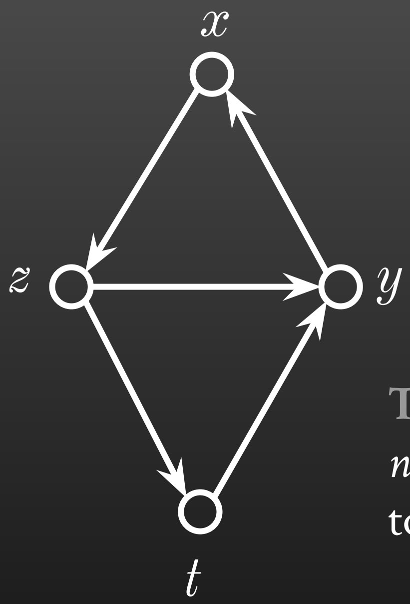
$$P_G(x,y,z,t) = (x - y)(x - z)(y - z)(t - y)(t - z)$$

$$P_G(2,1,0,2) = 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2 = 4 \neq 0$$

$$P_G(x,y,z,t) = xzy^2t + \dots$$

Twierdzenie (Alon, Tarsi, 1996): Jeżeli wielomian grafu P_G ma *nieznikający* jednomian o wszystkich stopniach zmiennych co najwyżej k, to G ma poprawne $(k+1)$-kolorowanie.

Twierdzenie (Zhu, 2019): Wielomian każdego grafu *planarnego* ma *nieznikający* jednomian o wszystkich stopniach zmiennych co najwyżej 4.



$$P_G(x,y,z,t) = (x - y)(x - z)(y - z)(t - y)(t - z)$$

$$P_G(2,1,0,2) = 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2 = 4 \neq 0$$

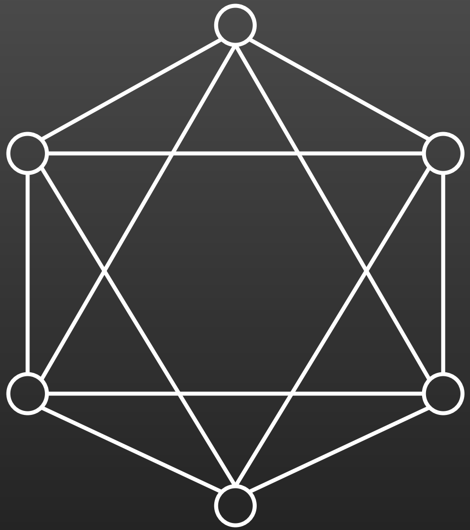
$$P_G(x,y,z,t) = xzy^2t + \dots$$

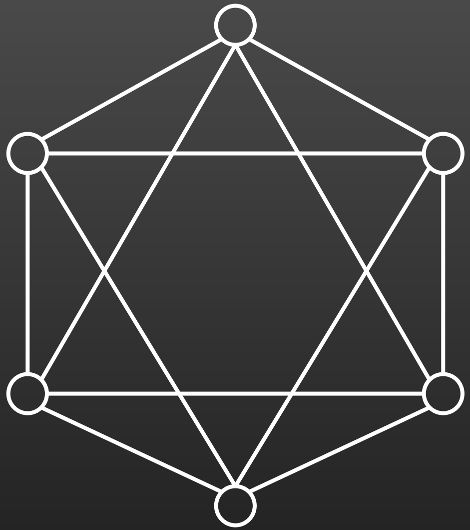
Twierdzenie (Alon, Tarsi, 1996): Jeżeli wielomian grafu P_G ma *nieznikający* jednomian o wszystkich stopniach zmiennych co najwyżej k, to G ma poprawne $(k+1)$-kolorowanie.

Twierdzenie (Zhu, 2019): Wielomian każdego grafu *planarnego* ma *nieznikający* jednomian o wszystkich stopniach zmiennych co najwyżej 4.

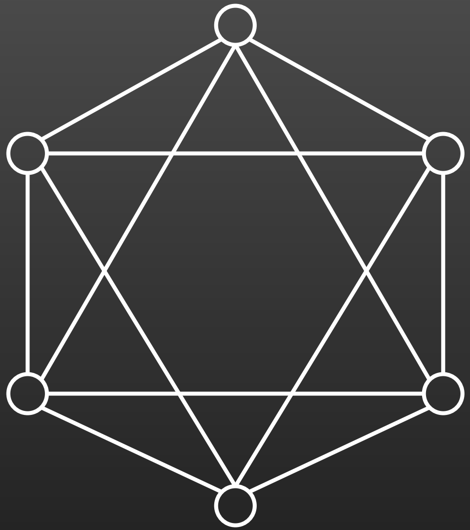
Twierdzenie (Grytczuk, Zhu, 2020): Z każdego grafu planarnego można usunąć takie *skojarzenie*, że wielomian powstałego podgrafu będzie miał *nieznikający* jednomian o wszystkich stopniach zmiennych co najwyżej 3.

O dwóch takich co kolorowali mapę



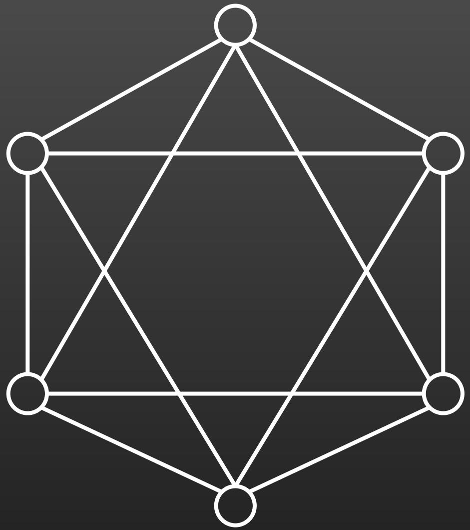


Gracze: *Jacek* i *Placek*



Gracze: *Jacek* i *Placek*

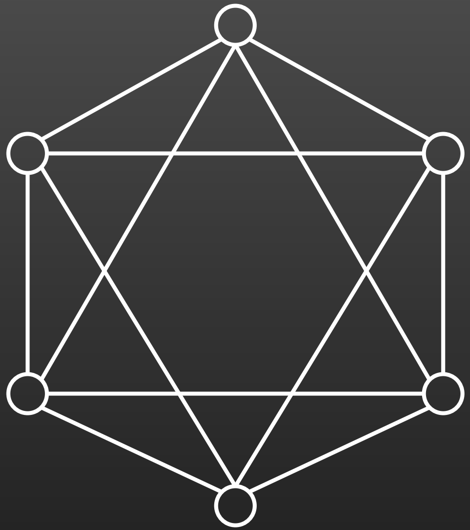
Ustalone kolory, np.



Gracze: *Jacek* i *Placek*

Ustalone kolory, np. 

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

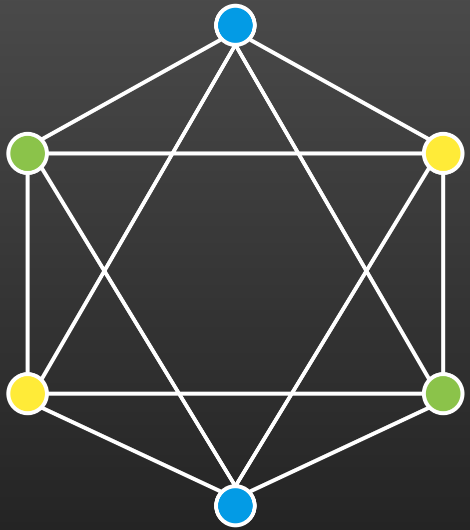


Gracze: *Jacek* i *Placek*

Ustalone kolory, np.

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

Cele: *Jacek* - pokolorowanie całego grafu,
Placek - udaremnienie zamiaru Jacka

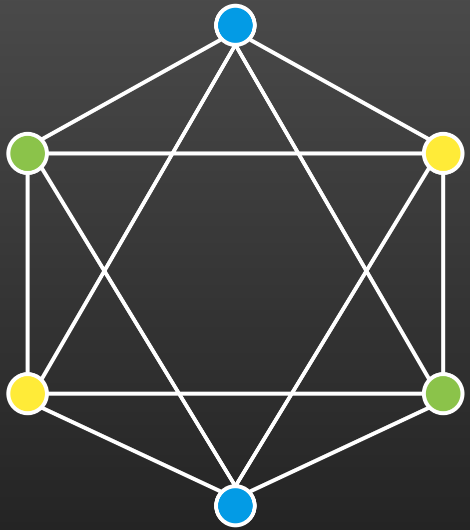


Gracze: *Jacek* i *Placek*

Ustalone kolory, np.

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

Cele: *Jacek* - pokolorowanie całego grafu,
Placek - udaremnienie zamiaru Jacka



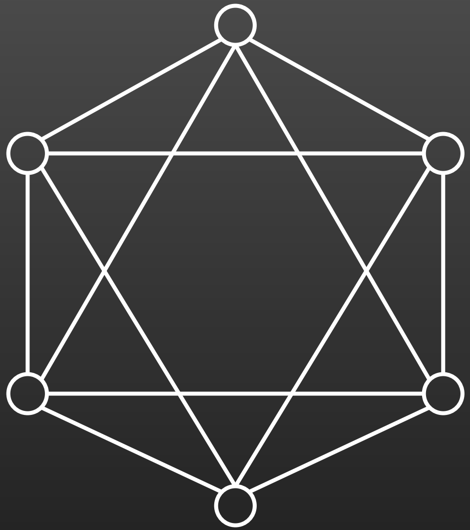
$\chi(G) = 3$

Gracze: *Jacek* i *Placek*

Ustalone kolory, np.

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

Cele: *Jacek* - pokolorowanie całego grafu,
Placek - udaremnienie zamiaru Jacka

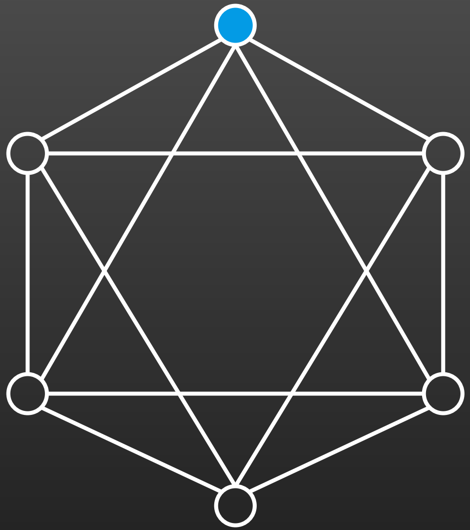


Gracze: *Jacek* i *Placek*

Ustalone kolory, np.

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

Cele: *Jacek* - pokolorowanie całego grafu,
Placek - udaremnienie zamiaru Jacka

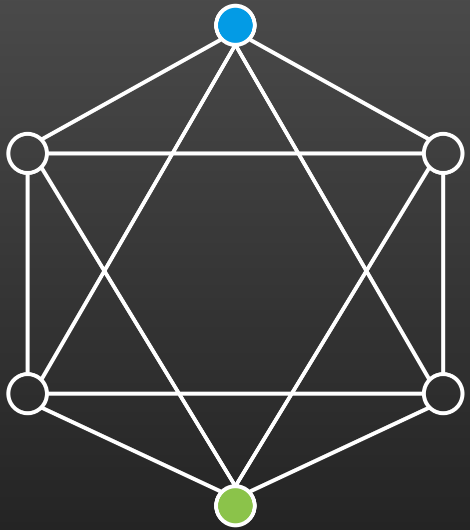


Gracze: *Jacek* i *Placek*

Ustalone kolory, np.

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

Cele: *Jacek* - pokolorowanie całego grafu,
Placek - udaremnienie zamiaru Jacka

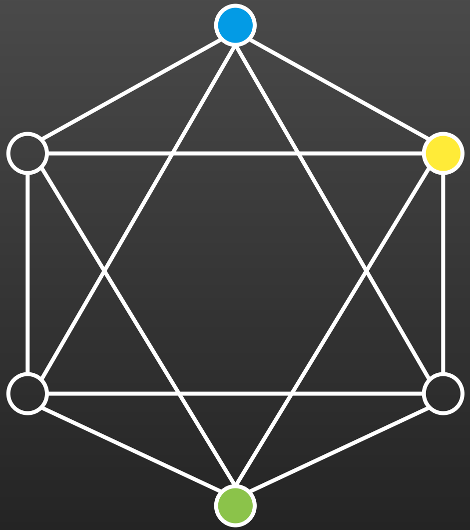


Gracze: *Jacek* i *Placek*

Ustalone kolory, np. 

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

Cele: *Jacek* - pokolorowanie całego grafu,
Placek - udaremnienie zamiaru Jacka

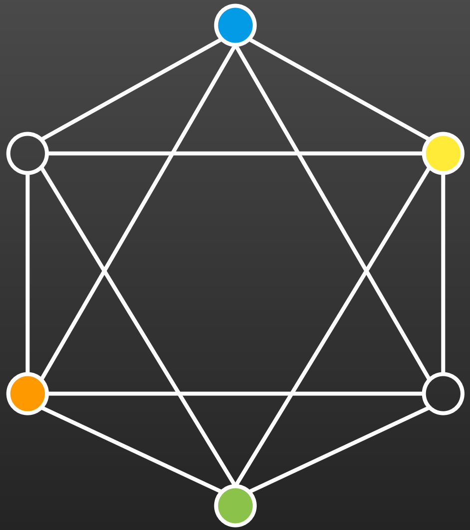


Gracze: *Jacek* i *Placek*

Ustalone kolory, np.

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

Cele: *Jacek* - pokolorowanie całego grafu,
Placek - udaremnienie zamiaru Jacka

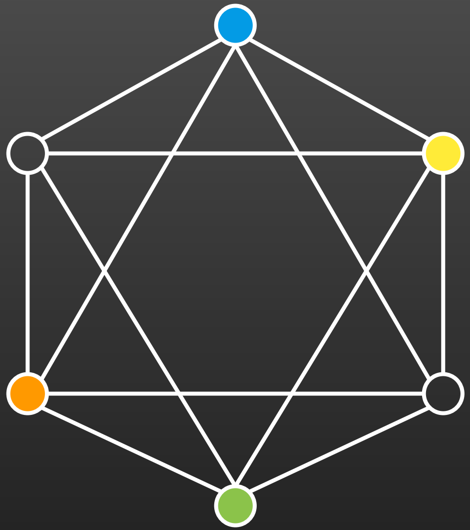


Gracze: *Jacek* i *Placek*

Ustalone kolory, np.

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

Cele: *Jacek* - pokolorowanie całego grafu,
Placek - udaremnienie zamiaru Jacka



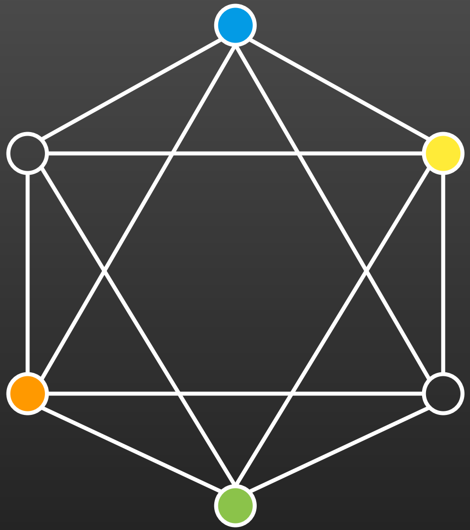
$\chi(G) = 3$

Gracze: *Jacek* i *Placek*

Ustalone kolory, np.

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

Cele: *Jacek* - pokolorowanie całego grafu,
Placek - udaremnienie zamiaru Jacka



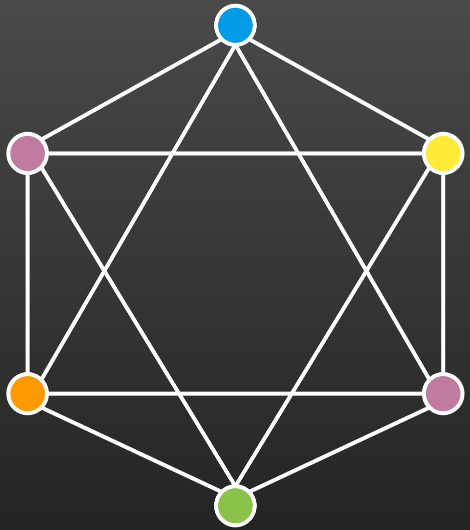
$\chi(G) = 3$ $\qquad$ $\chi_g(G) = 5$

Gracze: *Jacek* i *Placek*

Ustalone kolory, np. 

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

Cele: *Jacek* - pokolorowanie całego grafu,
Placek - udaremnienie zamiaru Jacka



$\chi(G) = 3$ $\chi_{\mathrm{g}}(G) = 5$

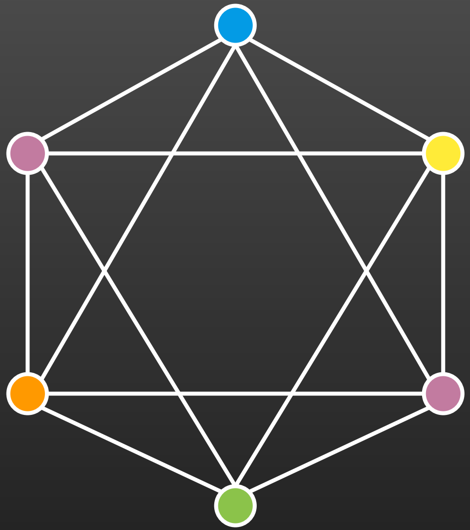
Gracze: *Jacek* i *Placek*

Ustalone kolory, np. 

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

Cele: *Jacek* - pokolorowanie całego grafu,

Placek - udaremnienie zamiaru Jacka



$\chi(G) = 3$ $\qquad$ $\chi_g(G) = 5$

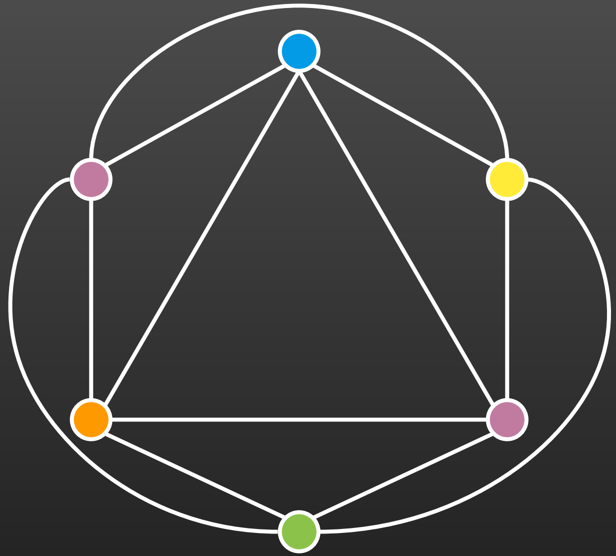
Gracze: *Jacek* i *Placek*

Ustalone kolory, np. 

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

Cele: *Jacek* - pokolorowanie całego grafu,
Placek - udaremnienie zamiaru Jacka

$\chi_g(G)$ = *rozgrywana liczba chromatyczna* grafu G



$\chi(G) = 3$ $\chi_g(G) = 5$

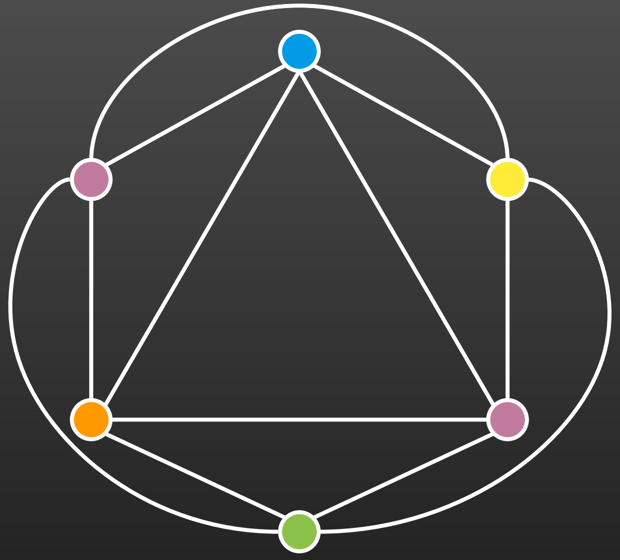
Gracze: *Jacek* i *Placek*

Ustalone kolory, np.

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

Cele: *Jacek* - pokolorowanie całego grafu,
Placek - udaremnienie zamiaru Jacka

$\chi_g(G)$ = *rozgrywana liczba chromatyczna* grafu G



$\chi(G) = 3$ $\chi_g(G) = 5$

Gracze: *Jacek* i *Placek*

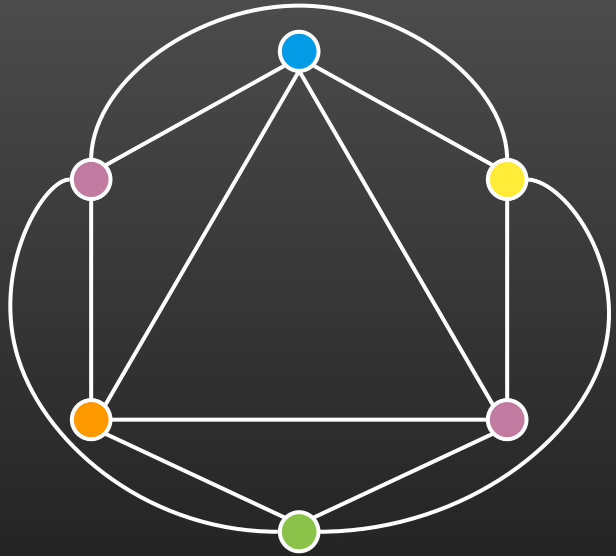
Ustalone kolory, np. 

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

Cele: *Jacek* - pokolorowanie całego grafu,
Placek - udaremnienie zamiaru Jacka

$\chi_g(G)$ = *rozgrywana liczba chromatyczna* grafu G

Cztery kolory nie wystarczą!!!



$\chi(G) = 3$ $\chi_g(G) = 5$

Gracze: *Jacek* i *Placek*

Ustalone kolory, np.

Ruch: pokolorownie (poprawne) dowolnego wierzchołka

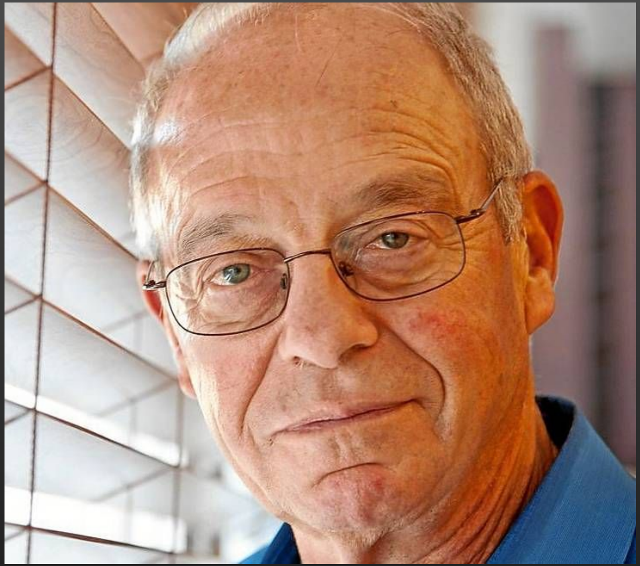
Cele: *Jacek* - pokolorowanie całego grafu,
Placek - udaremnienie zamiaru Jacka

$\chi_g(G)$ = *rozgrywana liczba chromatyczna* grafu G

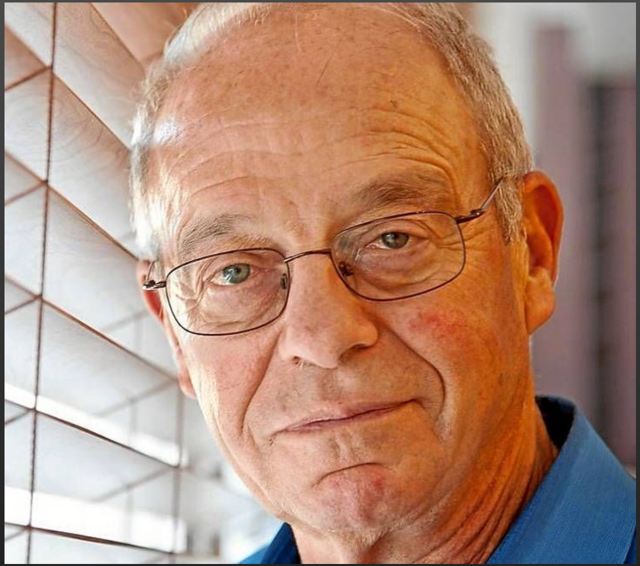
Cztery kolory nie wystarczą!!!

Pytanie: To ile kolorów potrzeba, żeby wystarczyło?

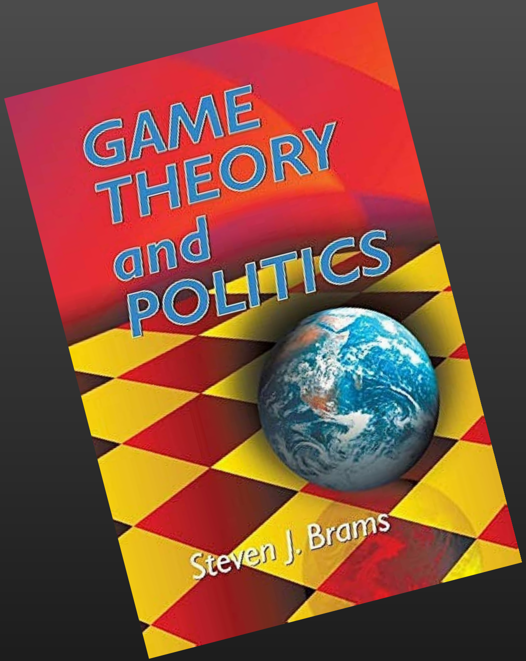
Geneza gry w kolorowanie grafu

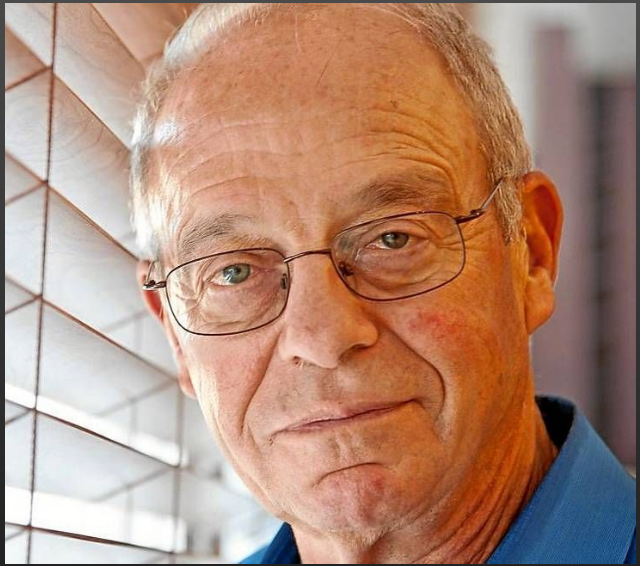


Steven J. Brams

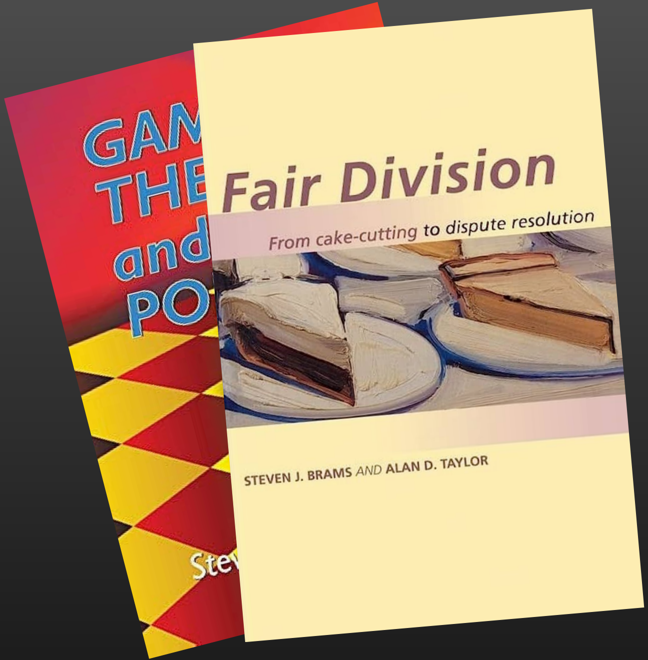


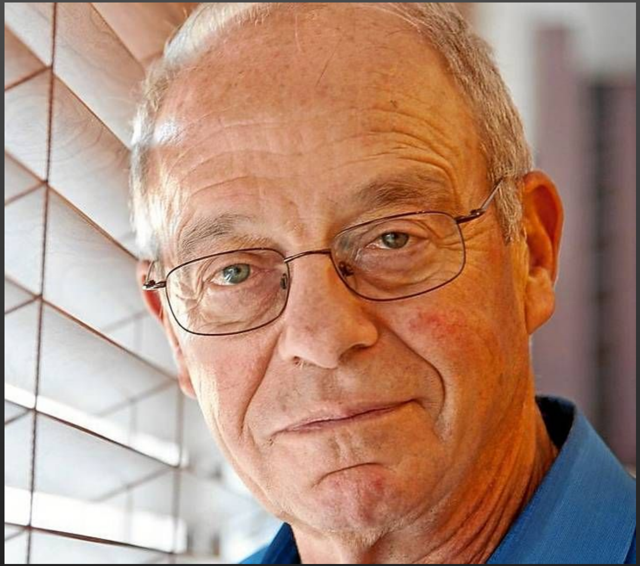
Steven J. Brams



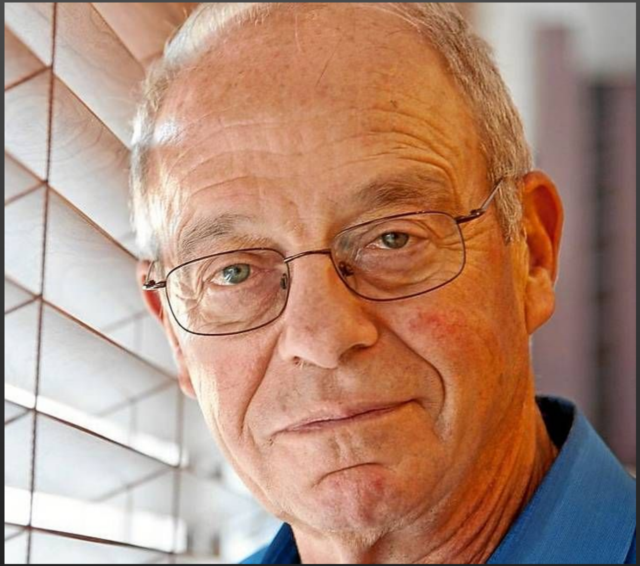


Steven J. Brams

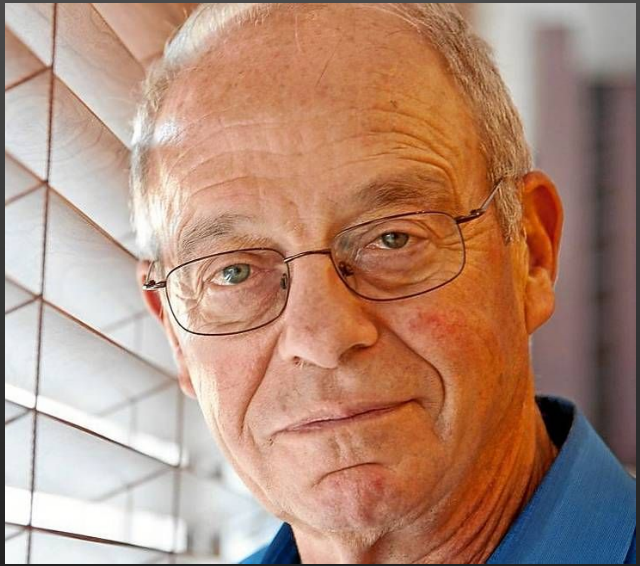


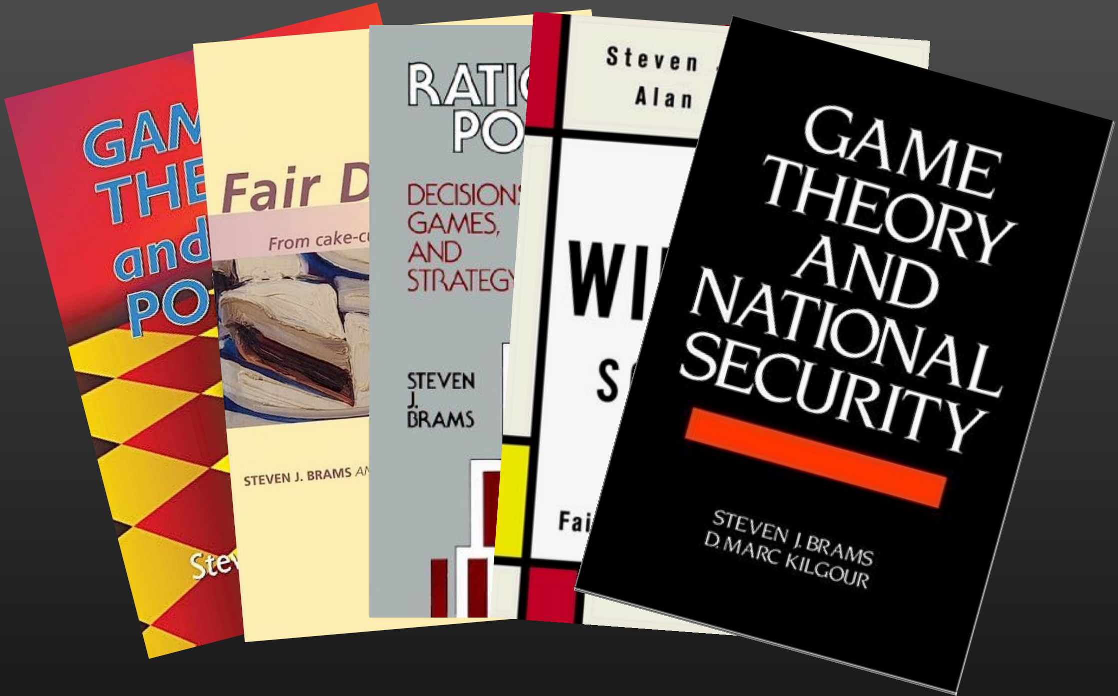


Steven J. Brams

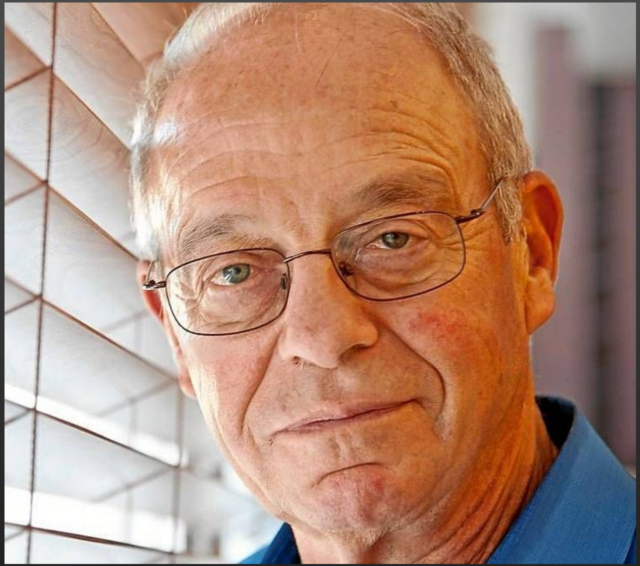


Steven J. Brams

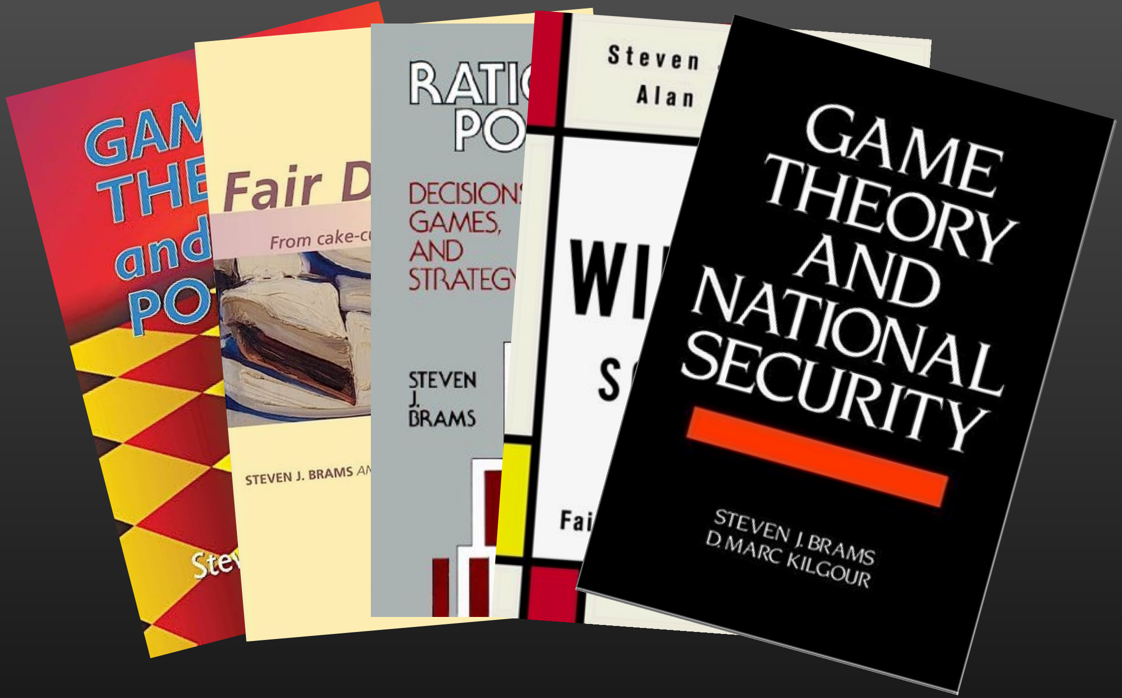




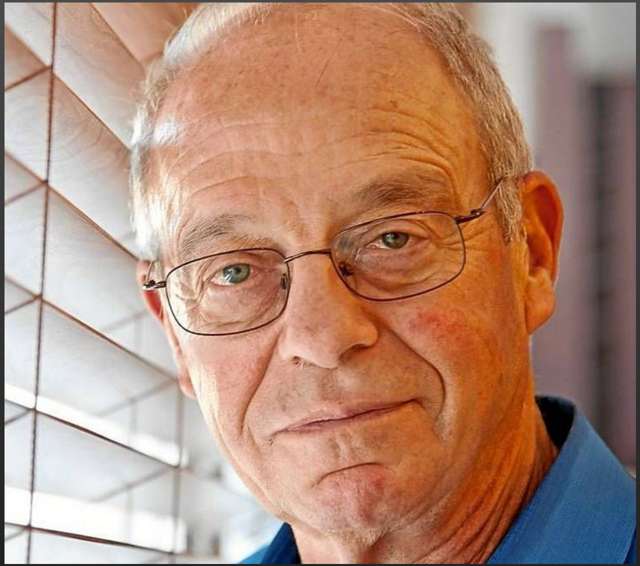
Steven J. Brams



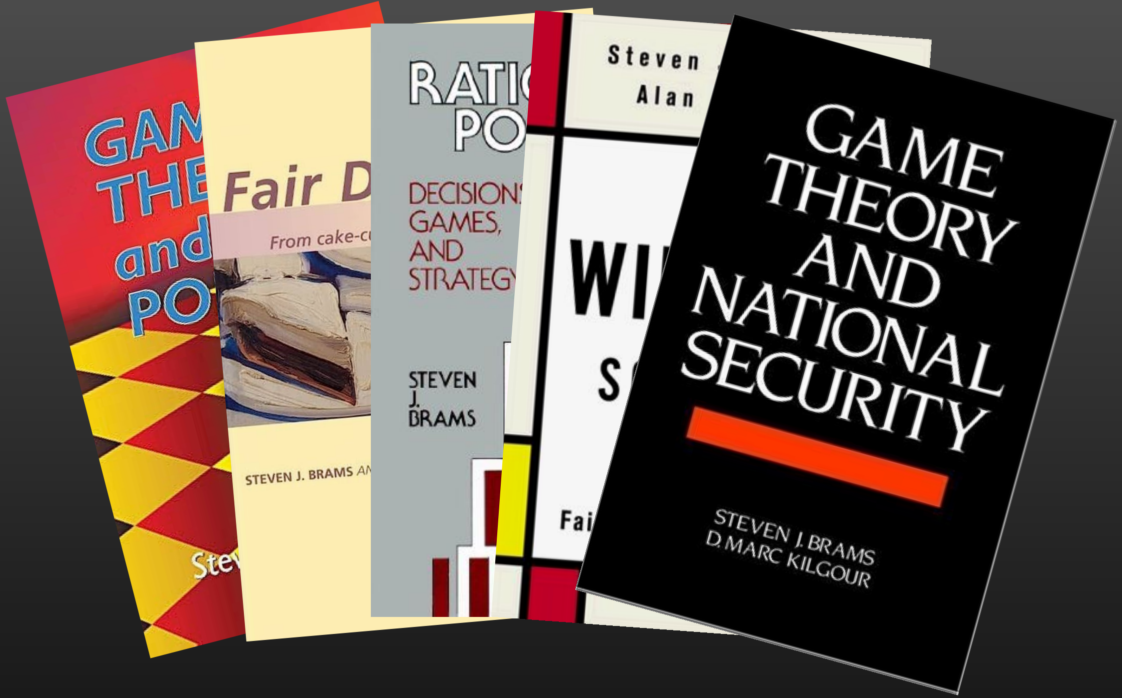
Steven J. Brams



"My own original interest was that if one could establish some maximum number m and show that the game itself was responsible for exactly m – 4 colors, then that would be an indirect proof that 4 colors suffice without the game."



Steven J. Brams

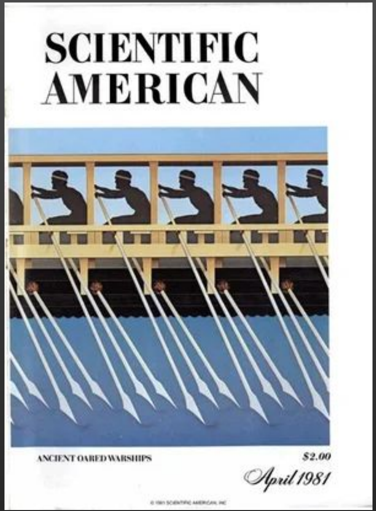


"My own original interest was that if one could establish some maximum number *m* and show that the game itself was responsible for exactly *m* – 4 colors, then that would be an indirect proof that 4 colors suffice without the game."

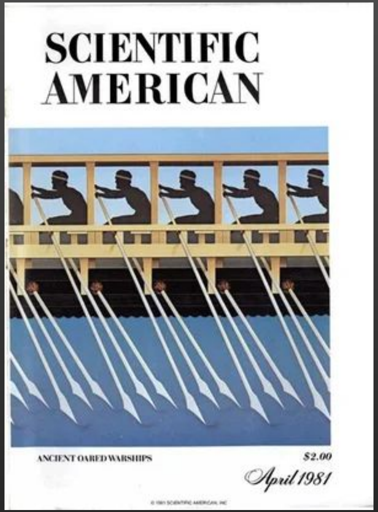
"I certainly was not thinking about any applications of the problem to *politics*."

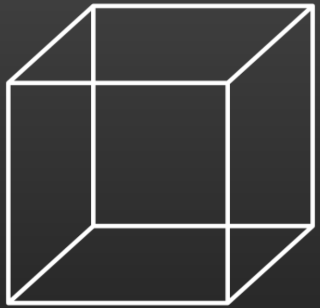
Martin Gardner

Martin Gardner

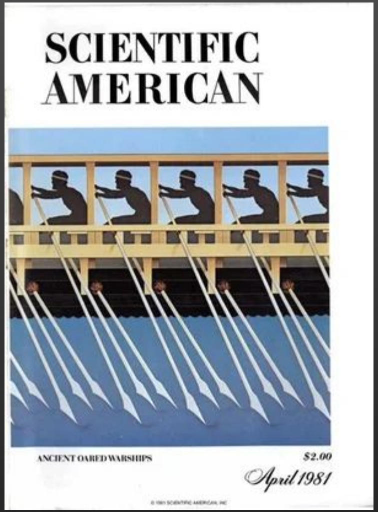


Martin Gardner

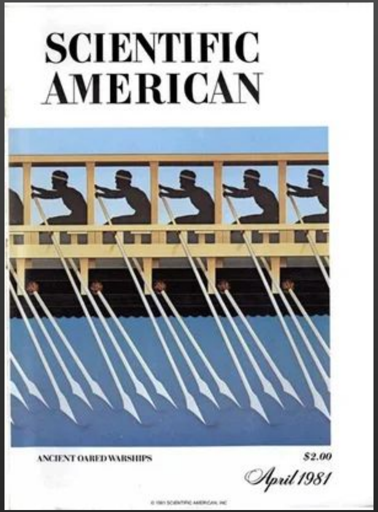




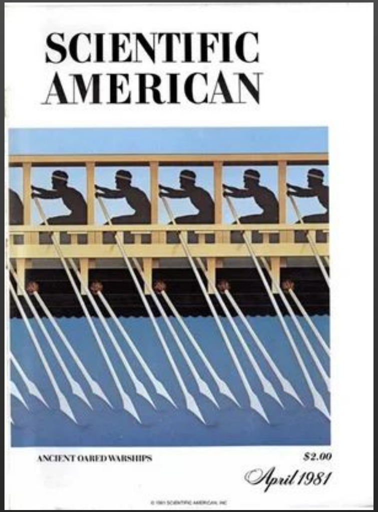
Martin Gardner



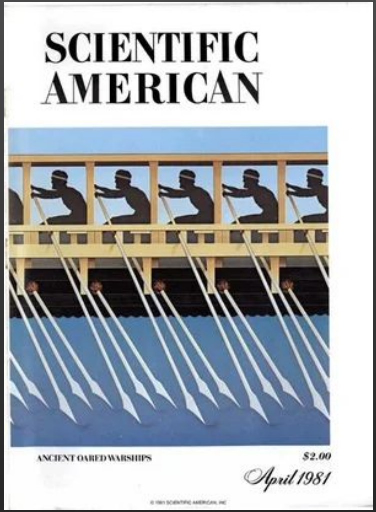
Martin Gardner



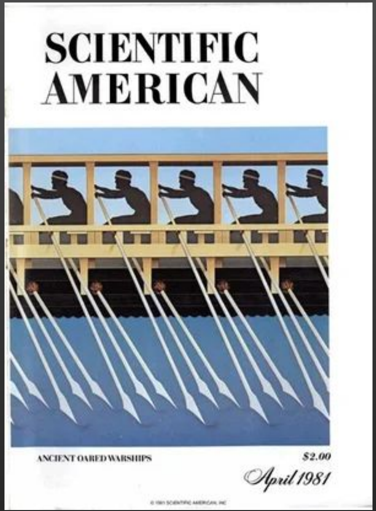
Martin Gardner

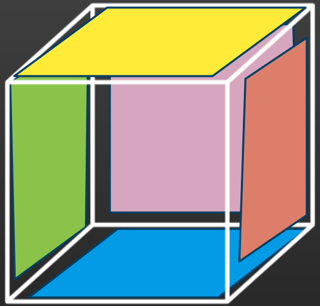


Martin Gardner

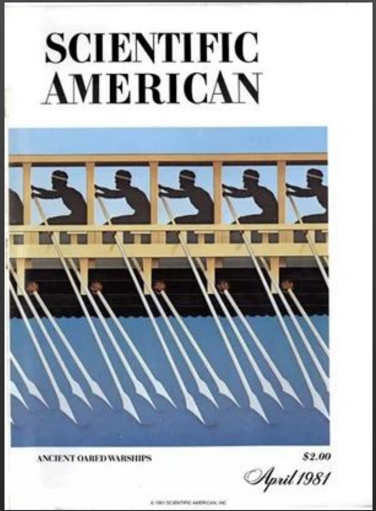


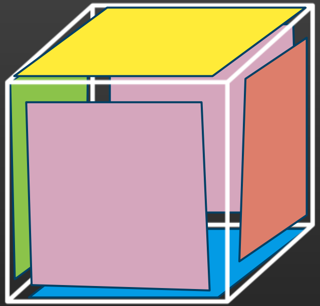
Martin Gardner



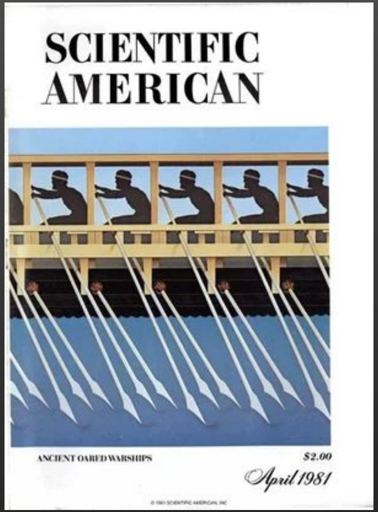


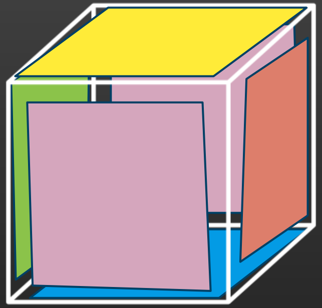
Martin Gardner





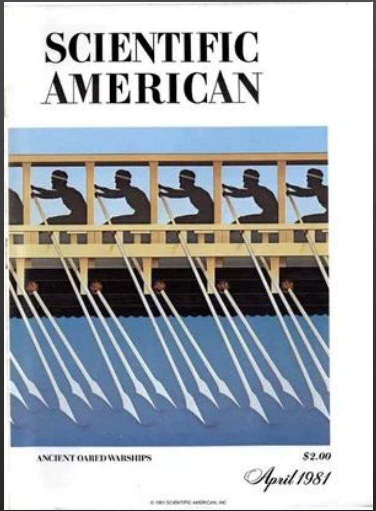
Martin Gardner



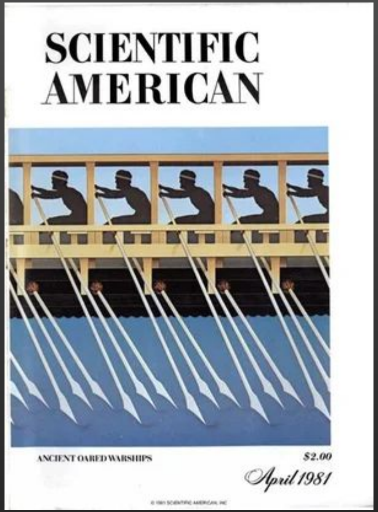


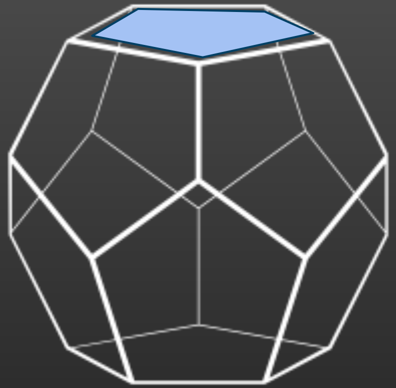
$\chi_g(G) = 5$

Martin Gardner

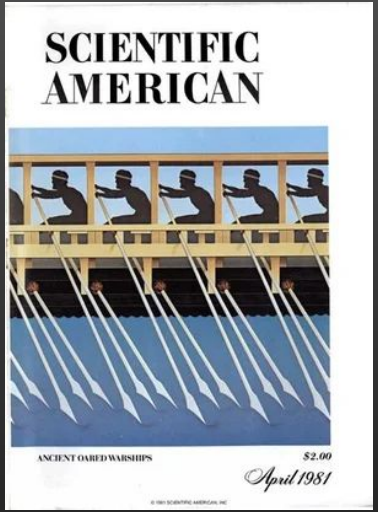


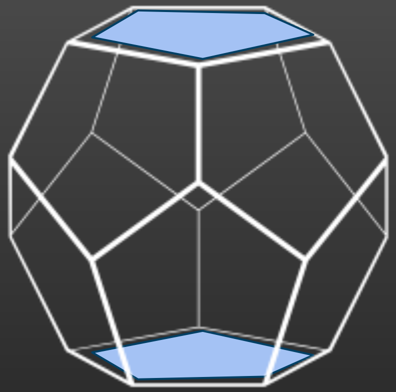
Martin Gardner



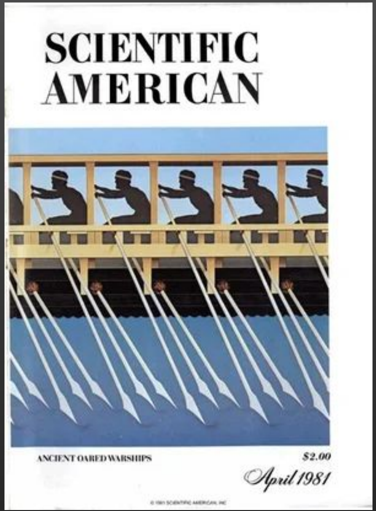


Martin Gardner

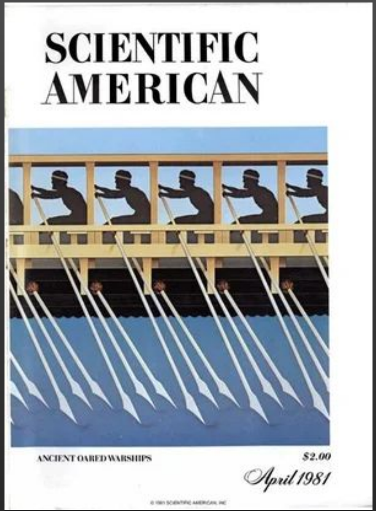




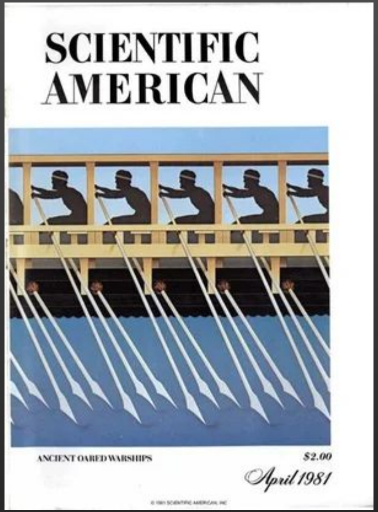
Martin Gardner



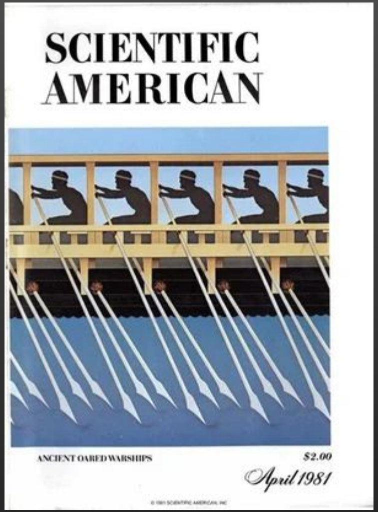
Martin Gardner

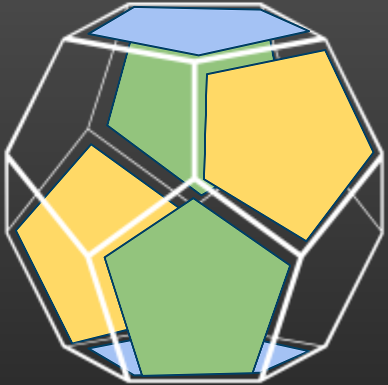


Martin Gardner

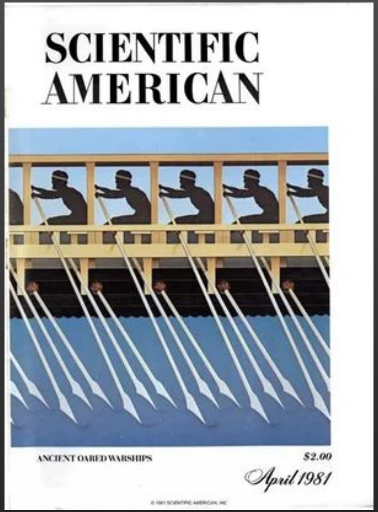


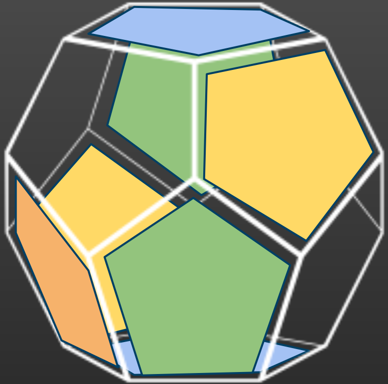
Martin Gardner



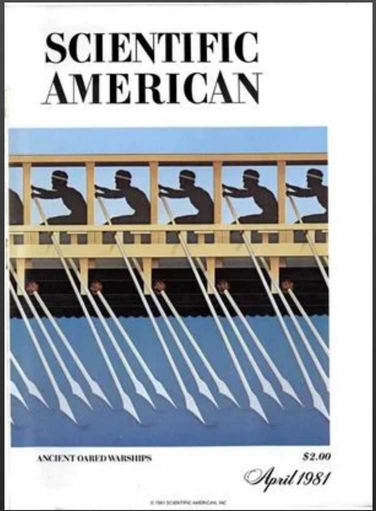


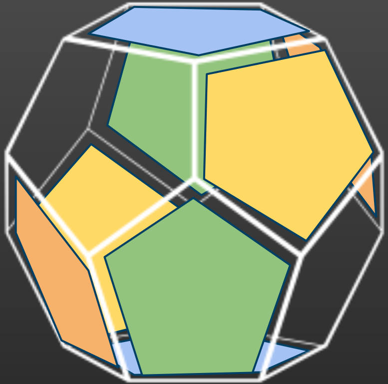
Martin Gardner



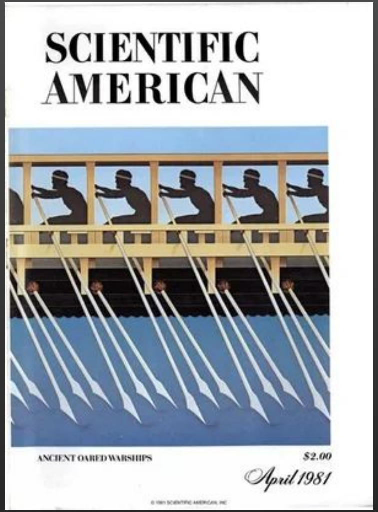


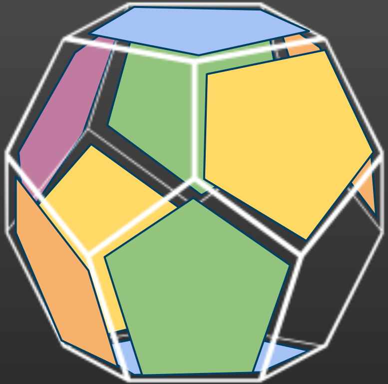
Martin Gardner



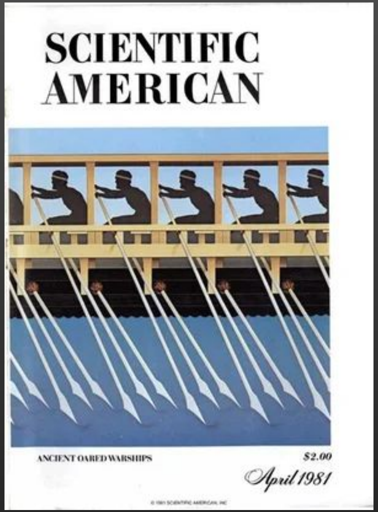


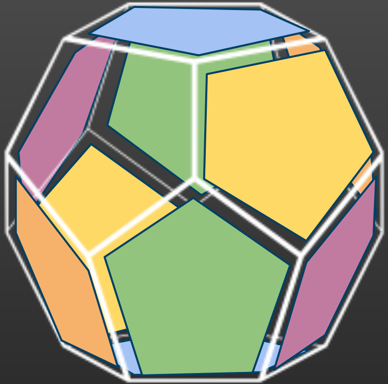
Martin Gardner



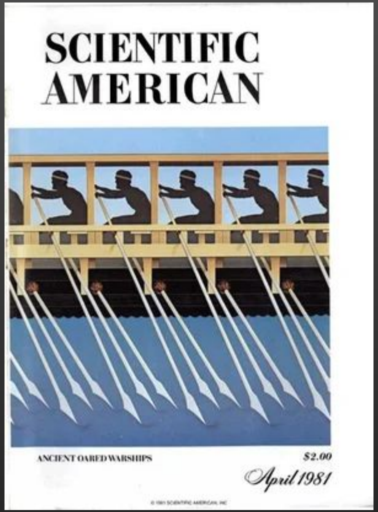


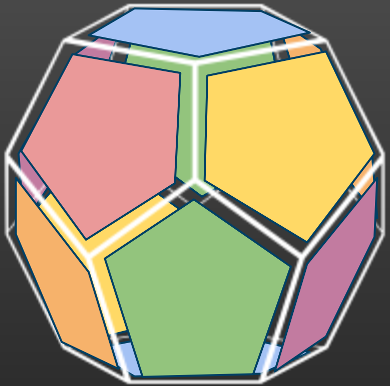
Martin Gardner



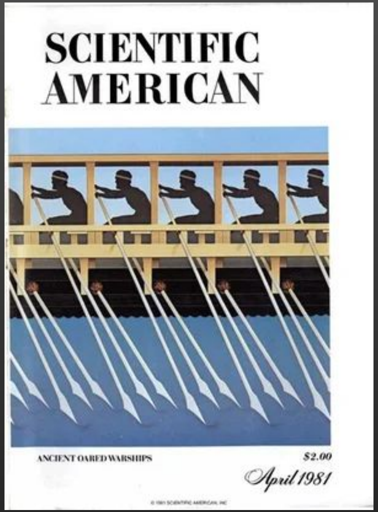


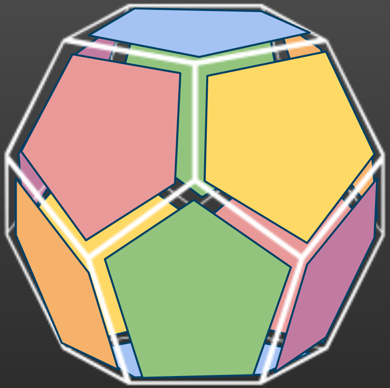
Martin Gardner



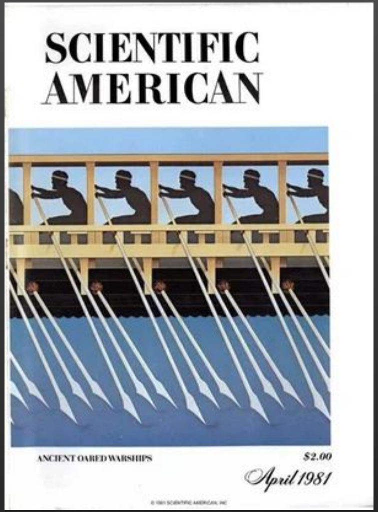


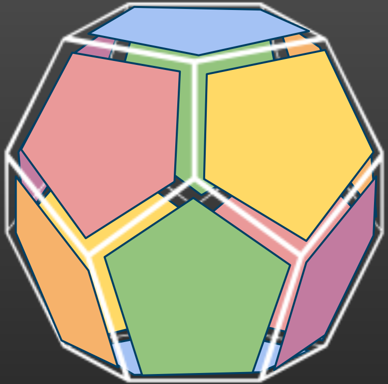
Martin Gardner





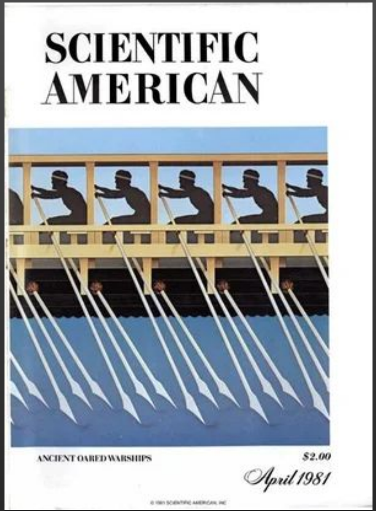
Martin Gardner

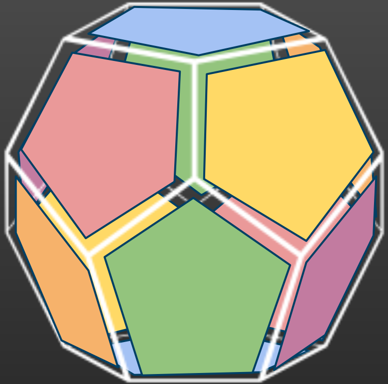




$\chi_g(G) = 6$

Martin Gardner

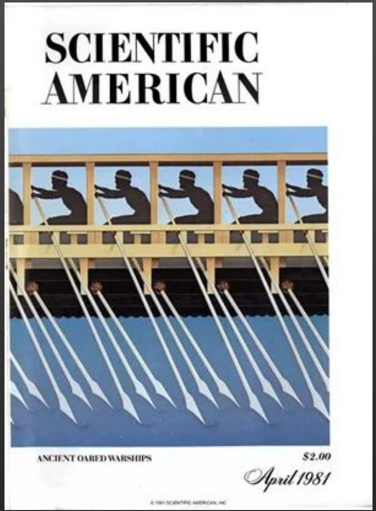


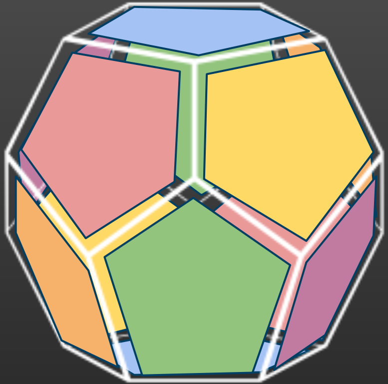


$\chi_g(G) = 6$

Lloyd Shapley

Martin Gardner



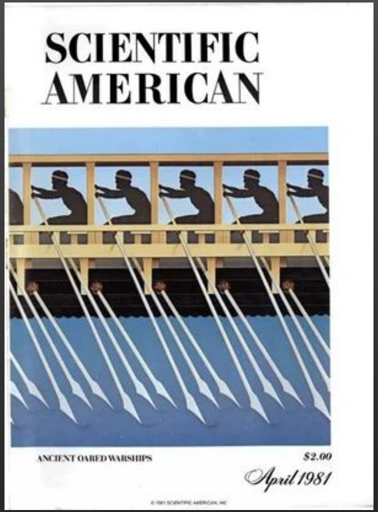


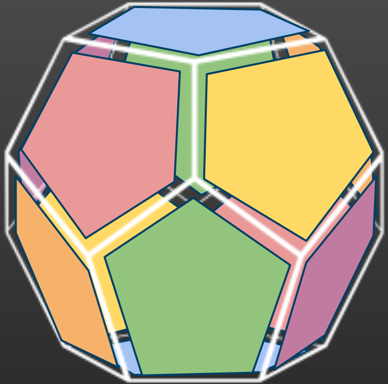
$\chi_{\mathrm{g}}(G) = 6$

(High, 1981) $\chi_{\mathrm{g}}(G) = 7$

Lloyd Shapley

Martin Gardner





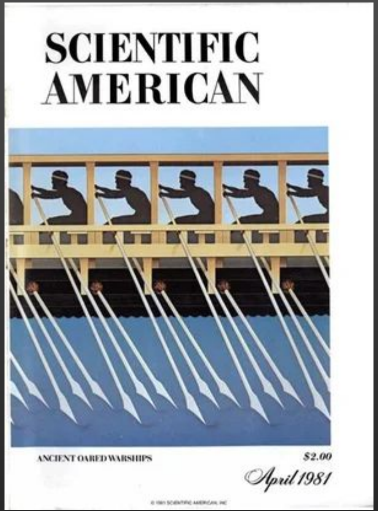
$\chi_g(G) = 6$

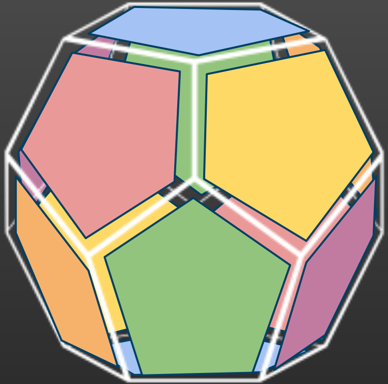
(High, 1981) $\chi_g(G) = 7$

(Kierstead, Trotter, 1994) $\chi_g(G) = 8$ (obecny rekord!)

Lloyd Shapley

Martin Gardner





$\chi_g(G) = 6$

Lloyd Shapley

(High, 1981) $\chi_g(G) = 7$

(Kierstead, Trotter, 1994) $\chi_g(G) = 8$ (obecny rekord!)

Pytanie: Jaka jest *maksymalna* wartość $\chi_g(G)$ dla grafów *planarnych*? Czy jest ona *skończona*?

Hans L. Bodlaender

Hans L. Bodlaender

(Bodlaender, 1989). Każde *drzewo* spełnia $\chi_g(G) \leqslant 5$.

Hans L. Bodlaender

(Bodlaender, 1989). Każde *drzewo* spełnia $\chi_g(G) \leqslant 5$.

"It is an interesting open problem whether a similar result holds for planar graphs. This problem can be seen as "a game-variant" to the famous 4-color theorem."

Hans L. Bodlaender

(Bodlaender, 1989). Każde *drzewo* spełnia $\chi_g(G) \leqslant 5$.

"It is an interesting open problem whether a similar result holds for planar graphs. This problem can be seen as "a game-variant" to the famous 4-color theorem."

Hipoteza (Bodlaender, 1989): Istnieje stała M taka, że $\chi_g(G) \leqslant M$ dla każdego grafu planarnego G.

Hans L. Bodlaender

(Bodlaender, 1989). Każde *drzewo* spełnia $\chi_g(G) \leqslant 5$.

"It is an interesting open problem whether a similar result holds for planar graphs. This problem can be seen as "a game-variant" to the famous 4-color theorem."

Hipoteza (Bodlaender, 1989): Istnieje stała M taka, że $\chi_g(G) \leqslant M$ dla każdego grafu planarnego G.

(Kierstead, Trotter, 1994). $M \leqslant 44$.

Hans L. Bodlaender

(Bodlaender, 1989). Każde *drzewo* spełnia $\chi_g(G) \leqslant 5$.

"It is an interesting open problem whether a similar result holds for planar graphs. This problem can be seen as "a game-variant" to the famous 4-color theorem."

Hipoteza (Bodlaender, 1989): Istnieje stała M taka, że $\chi_g(G) \leqslant M$ dla każdego grafu planarnego G.

(Kierstead, Trotter, 1994). $M \leqslant 44$.

(Kierstead, Trotter, 1994). $M \leqslant 33$.

Hans L. Bodlaender

(Bodlaender, 1989). Każde *drzewo* spełnia $\chi_g(G) \leqslant 5$.

"It is an interesting open problem whether a similar result holds for planar graphs. This problem can be seen as "a game-variant" to the famous 4-color theorem."

Hipoteza (Bodlaender, 1989): Istnieje stała M taka, że $\chi_g(G) \leqslant M$ dla każdego grafu planarnego G.

(Kierstead, Trotter, 1994). $M \leqslant 44$.

(Kierstead, Trotter, 1994). $M \leqslant 33$.

(Dinski, Zhu, 1999). $M \leqslant 30$.

Hans L. Bodlaender

(Bodlaender, 1989). Każde *drzewo* spełnia $\chi_g(G) \leqslant 5$.

"It is an interesting open problem whether a similar result holds for planar graphs. This problem can be seen as "a game-variant" to the famous 4-color theorem."

Hipoteza (Bodlaender, 1989): Istnieje stała M taka, że $\chi_g(G) \leqslant M$ dla każdego grafu planarnego G.

(Kierstead, Trotter, 1994). $M \leqslant 44$.

(Kierstead, Trotter, 1994). $M \leqslant 33$.

(Dinski, Zhu, 1999). $M \leqslant 30$.

(Zhu, 1999). $M \leqslant 19$.

Hans L. Bodlaender

(Bodlaender, 1989). Każde *drzewo* spełnia $\chi_g(G) \leqslant 5$.

"It is an interesting open problem whether a similar result holds for planar graphs. This problem can be seen as "a game-variant" to the famous 4-color theorem."

Hipoteza (Bodlaender, 1989): Istnieje stała M taka, że $\chi_g(G) \leqslant M$ dla każdego grafu planarnego G.

(Kierstead, Trotter, 1994). $M \leqslant 44$.

(Kierstead, Trotter, 1994). $M \leqslant 33$.

(Dinski, Zhu, 1999). $M \leqslant 30$.

(Zhu, 1999). $M \leqslant 19$.

(Kierstead, 2000). $M \leqslant 18$.

Hans L. Bodlaender

(Bodlaender, 1989). Każde *drzewo* spełnia $\chi_g(G) \leqslant 5$.

"It is an interesting open problem whether a similar result holds for planar graphs. This problem can be seen as "a game-variant" to the famous 4-color theorem."

Hipoteza (Bodlaender, 1989): Istnieje stała M taka, że $\chi_g(G) \leqslant M$ dla każdego grafu planarnego G.

(Kierstead, Trotter, 1994). $M \leqslant 44$.

(Kierstead, Trotter, 1994). $M \leqslant 33$.

(Dinski, Zhu, 1999). $M \leqslant 30$.

(Zhu, 1999). $M \leqslant 19$.

(Kierstead, 2000). $M \leqslant 18$.

(Zhu, 2007). $M \leqslant 17$. (obecny rekord!)

Hans L. Bodlaender

(Bodlaender, 1989). Każde *drzewo* spełnia $\chi_g(G) \leqslant 5$.

"It is an interesting open problem whether a similar result holds for planar graphs. This problem can be seen as "a game-variant" to the famous 4-color theorem."

Hipoteza (Bodlaender, 1989): Istnieje stała M taka, że $\chi_g(G) \leqslant M$ dla każdego grafu planarnego G.

(Kierstead, Trotter, 1994). $M \leqslant 44$.

(Kierstead, Trotter, 1994). $M \leqslant 33$.

(Dinski, Zhu, 1999). $M \leqslant 30$.

(Zhu, 1999). $M \leqslant 19$.

(Kierstead, 2000). $M \leqslant 18$.

(Zhu, 2007). $M \leqslant 17$. (obecny rekord!)

Hal Kierstead

Xuding Zhu

The Map-Coloring Game

Tomasz Bartnicki, Jarosław Grytczuk, H. A. Kierstead,
and Xuding Zhu

The Map-Coloring Game

Tomasz Bartnicki, Jarosław Grytczuk, H. A. Kierstead,
and Xuding Zhu

Tomasz Bartnicki

Jarek Grytczuk

Hal Kierstead

Xuding Zhu

The Map-Coloring Game

Tomasz Bartnicki, Jarosław Grytczuk, H. A. Kierstead, and Xuding Zhu

Feature

Four colours are not enough

Tomasz Bartnicki (Zielona Góra, Poland) and Jarosław Grytczuk (Kraków, Poland)

Tomasz Bartnicki

Jarek Grytczuk

Hal Kierstead

Xuding Zhu

The Map-Coloring Game

Tomasz Bartnicki, Jarosław Grytczuk, H. A. Kierstead, and Xuding Zhu

Feature

Four colours are not enough

Tomasz Bartnicki (Zielona Góra, Poland) and Jarosław Grytczuk (Kraków, Poland)

Delta 9/2005

O dwóch takich, co kolorowali mapę

Tomasz Bartnicki i **Jarosław Grytczuk**

Tomasz Bartnicki

Jarek Grytczuk

Hal Kierstead

Xuding Zhu

The Map-Coloring Game

Tomasz Bartnicki, Jarosław Grytczuk, H. A. Kierstead, and Xuding Zhu

Feature

Four colours are not enough

Tomasz Bartnicki (Zielona Góra, Poland) and Jarosław Grytczuk (Kraków, Poland)

Delta 9/2005

O dwóch takich, co kolorowali mapę

Tomasz Bartnicki i Jarosław Grytczuk

Tomasz Bartnicki

Jarek Grytczuk

Hal Kierstead

Xuding Zhu

The Map-Coloring Game

Tomasz Bartnicki, Jarosław Grytczuk, H. A. Kierstead, and Xuding Zhu

Feature

Four colours are not enough

Tomasz Bartnicki (Zielona Góra, Poland) and Jarosław Grytczuk (Kraków, Poland)

Delta 9/2005

O dwóch takich, co kolorowali mapę

Tomasz Bartnicki i **Jarosław Grytczuk**

Pytanie: Który to Jacek, a który Placek?

Tomasz Bartnicki

Jarek Grytczuk

Hal Kierstead

Xuding Zhu

Co można zrobić dwoma kolorami?

Twierdzenie (Thue, 1906): Można tak pokolorować liczby naturalne, że żadne dwa *przecinające się* przedziały nie będą wyglądały tak samo.

Twierdzenie (Thue, 1906): Można tak pokolorować liczby naturalne, że żadne dwa *przecinające się* przedziały nie będą wyglądały tak samo.

Twierdzenie (Thue, 1906): Można tak pokolorować liczby naturalne, że żadne dwa *przecinające się* przedziały nie będą wyglądały tak samo.

Twierdzenie (Thue, 1906): Można tak pokolorować liczby naturalne, że żadne dwa *przecinające się* przedziały nie będą wyglądały tak samo.

Twierdzenie (Thue, 1906): Można tak pokolorować liczby naturalne, że żadne dwa *przecinające się* przedziały nie będą wyglądały tak samo.

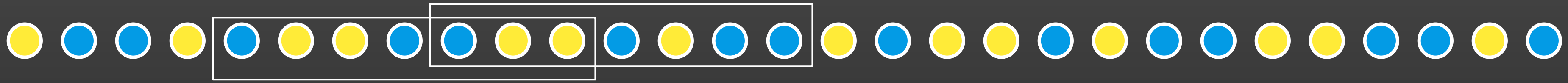
Twierdzenie (Thue, 1906): Można tak pokolorować liczby naturalne, że żadne dwa *przecinające się* przedziały nie będą wyglądały tak samo.

Twierdzenie (Thue, 1906): Można tak pokolorować liczby naturalne, że żadne dwa *przecinające się* przedziały nie będą wyglądały tak samo.

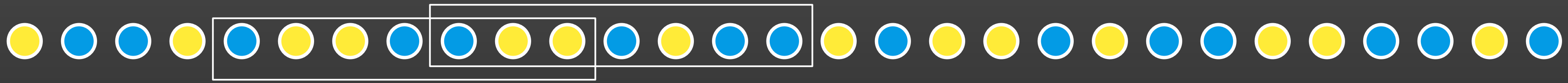
Twierdzenie (Thue, 1906): Można tak pokolorować liczby naturalne, że żadne dwa *przecinające się* przedziały nie będą wyglądały tak samo.

Twierdzenie (Thue, 1906): Można tak pokolorować liczby naturalne, że żadne dwa *przecinające się* przedziały nie będą wyglądały tak samo.

Twierdzenie (Thue, 1906): Można tak pokolorować liczby naturalne, że żadne dwa *przecinające się* przedziały nie będą wyglądały tak samo.

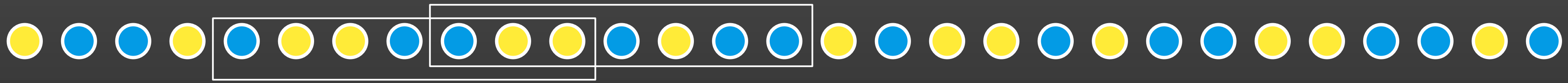


Twierdzenie (Thue, 1906): Można tak pokolorować liczby naturalne, że żadne dwa *przecinające się* przedziały nie będą wyglądały tak samo.



Twierdzenie (Grytczuk, 2002): Można tak pokolorować płaszczyznę, że żadne dwa *dyski topologiczne* nie będą *podobnie* pokolorowane.

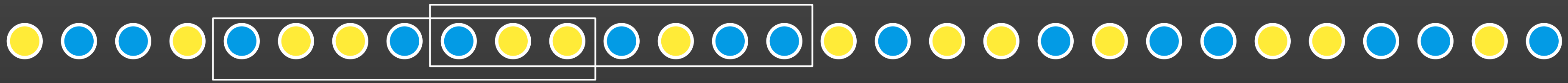
Twierdzenie (Thue, 1906): Można tak pokolorować liczby naturalne, że żadne dwa *przecinające się* przedziały nie będą wyglądały tak samo.



Twierdzenie (Grytczuk, 2002): Można tak pokolorować płaszczyznę, że żadne dwa *dyski topologiczne* nie będą *podobnie* pokolorowane.

"Dowód tego twierdzenia jest łatwy, jego wartość leży więc raczej w tym, że w ogóle coś takiego mogło komuś przyjść do głowy."

Twierdzenie (Thue, 1906): Można tak pokolorować liczby naturalne, że żadne dwa *przecinające się* przedziały nie będą wyglądały tak samo.

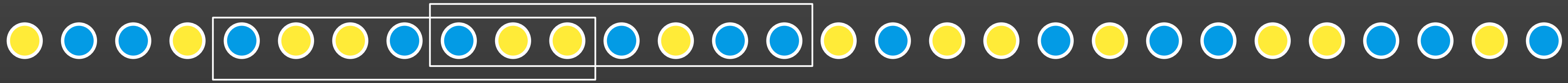


Twierdzenie (Grytczuk, 2002): Można tak pokolorować płaszczyznę, że żadne dwa *dyski topologiczne* nie będą *podobnie* pokolorowane.

> "Dowód tego twierdzenia jest łatwy, jego wartość leży więc raczej w tym, że w ogóle coś takiego mogło komuś przyjść do głowy."

Twierdzenie (Lovász, 1966): Można tak pokolorować każdy graf *skończony*, że każdy wierzchołek będzie *szczęśliwy*.

Twierdzenie (Thue, 1906): Można tak pokolorować liczby naturalne, że żadne dwa *przecinające się* przedziały nie będą wyglądały tak samo.



Twierdzenie (Grytczuk, 2002): Można tak pokolorować płaszczyznę, że żadne dwa *dyski topologiczne* nie będą *podobnie* pokolorowane.

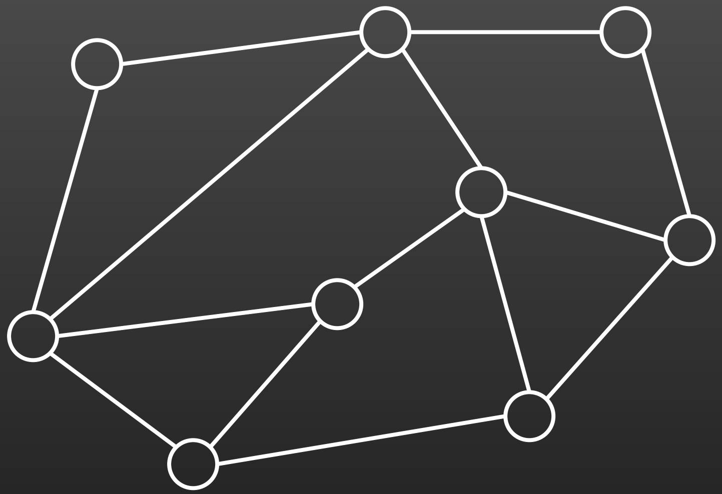
> “Dowód tego twierdzenia jest łatwy, jego wartość leży więc raczej w tym, że w ogóle coś takiego mogło komuś przyjść do głowy.”

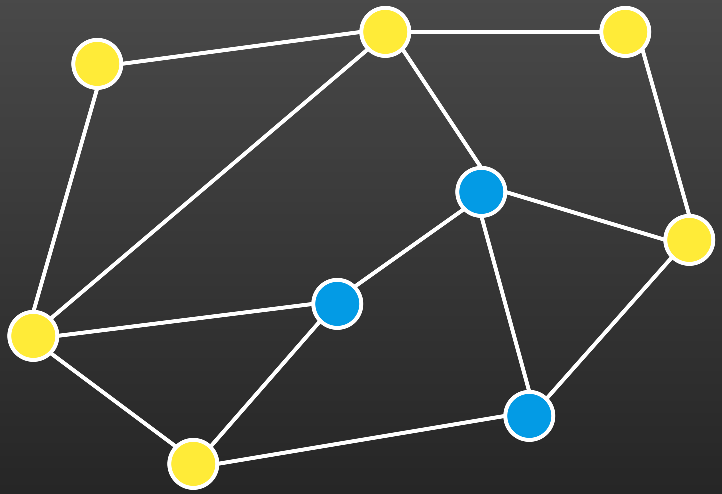
Twierdzenie (Lovász, 1966): Można tak pokolorować każdy graf *skończony*, że każdy wierzchołek będzie *szczęśliwy*.

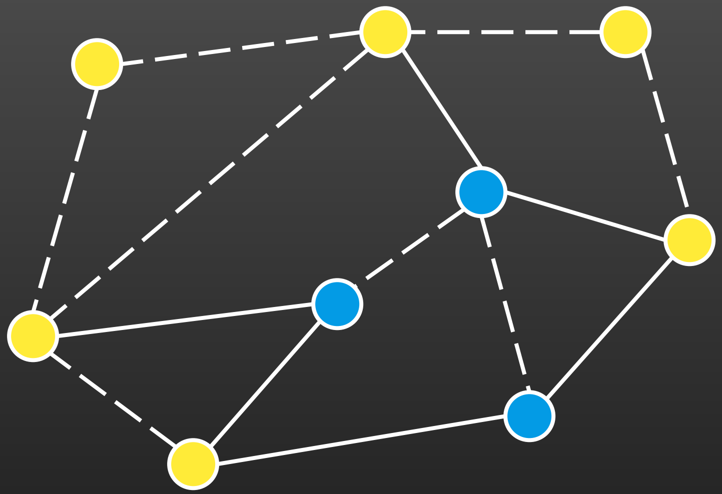
Laszlo Lovász

Jarek Grytczuk

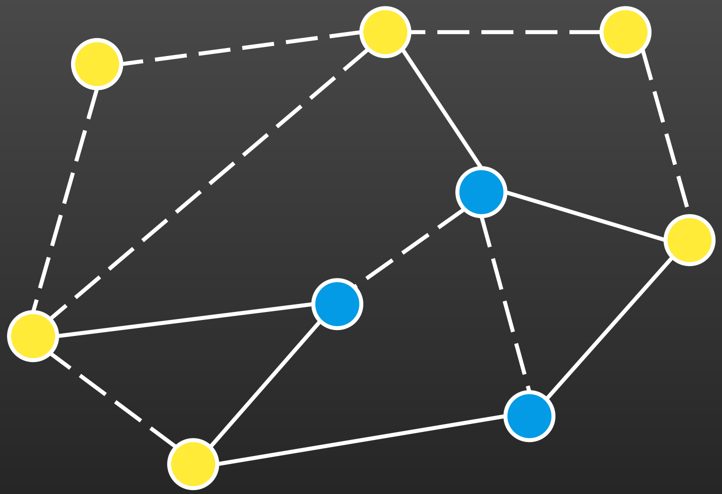
Axel Thue





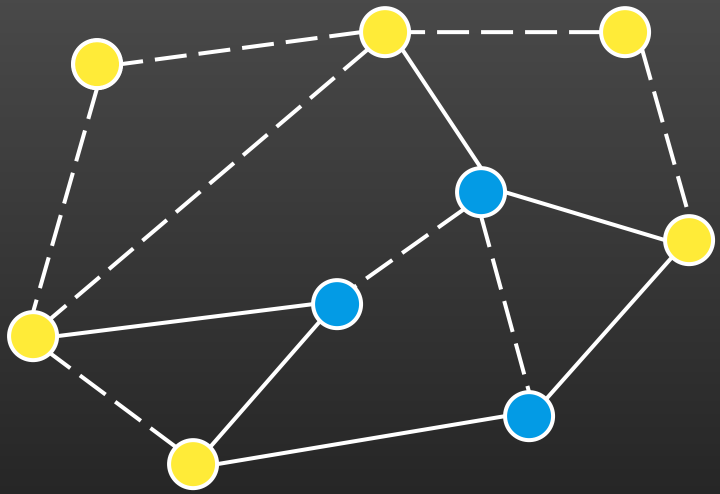


“zła” - jednobarwna



“zła” - jednobarwna

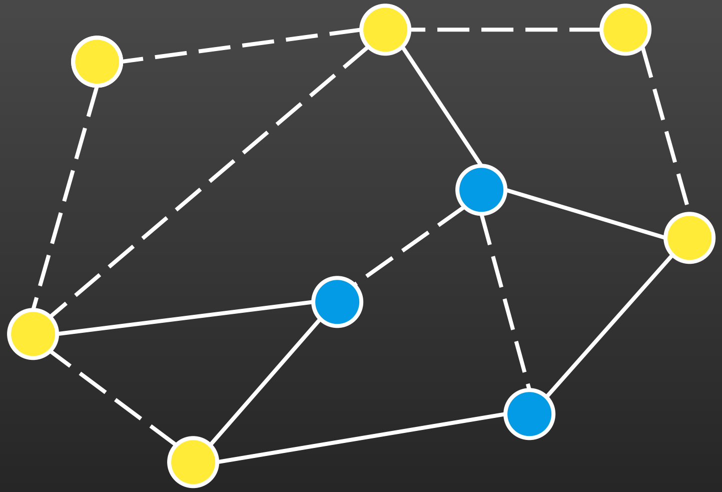
“dobra” - niejednobarwna



“zła” - jednobarwna

“dobra” - niejednobarwna

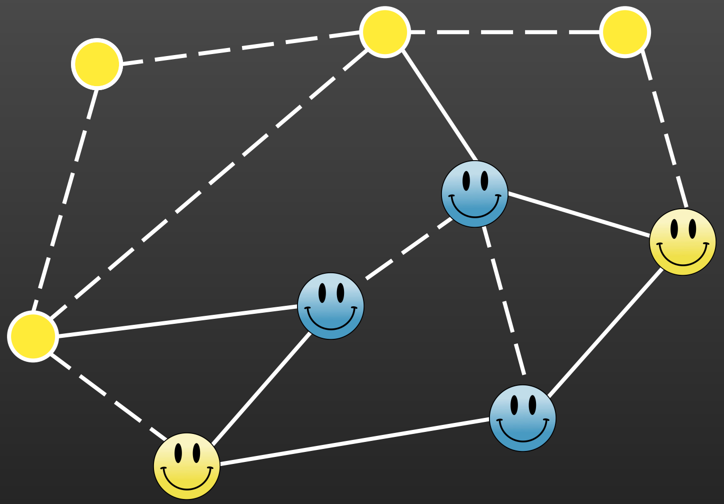
Definicja: Wierzchołek w pokolorowanym grafie jest *szczęśliwy* jeżeli *nie* dotyka go więcej złych niż dobrych krawędzi.



“zła” - jednobarwna

“dobra” - niejednobarwna

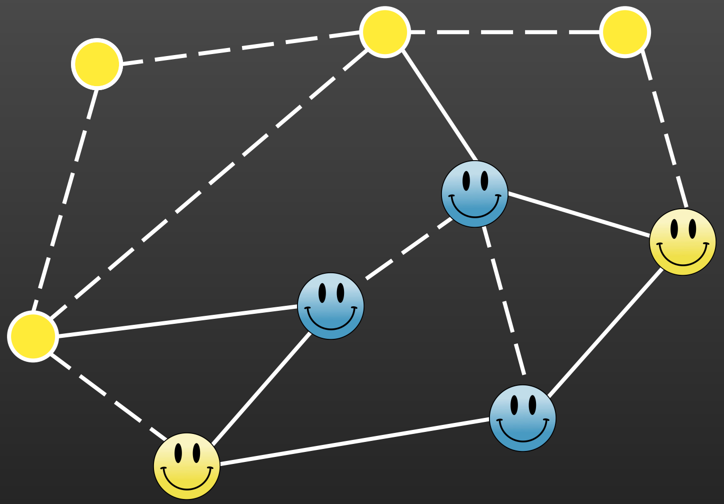
Definicja: Wierzchołek w pokolorowanym grafie jest *szczęśliwy* jeżeli *nie* dotyka go więcej złych niż dobrych krawędzi.



“zła” - jednobarwna

“dobra” - niejednobarwna

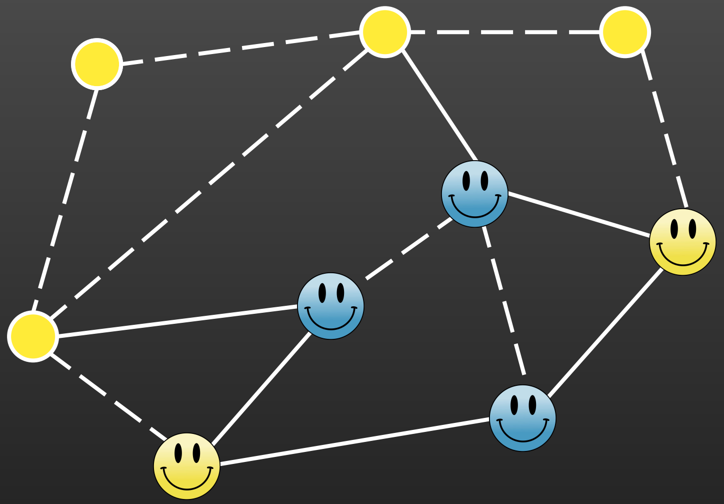
Definicja: Wierzchołek w pokolorowanym grafie jest *szczęśliwy* jeżeli *nie* dotyka go więcej złych niż dobrych krawędzi.



Twierdzenie (Lovász, 1966): Każdy graf skończony ma 2-kolorowanie, w którym każdy wierzchołek jest szczęśliwy.

“zła” - jednobarwna

“dobra” - niejednobarwna



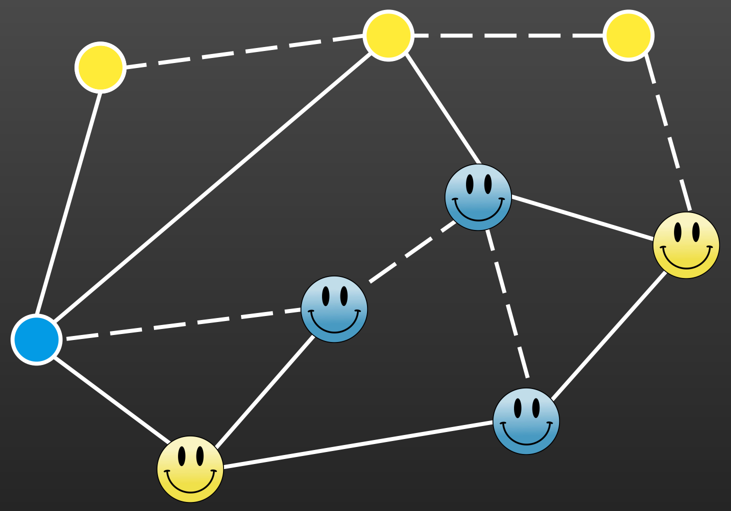
Definicja: Wierzchołek w pokolorowanym grafie jest *szczęśliwy* jeżeli *nie* dotyka go więcej złych niż dobrych krawędzi.

Twierdzenie (Lovász, 1966): Każdy graf skończony ma 2-kolorowanie, w którym każdy wierzchołek jest szczęśliwy.

Dowód: Kolorowanie z *maksymalną* liczbą dobrych krawędzi jest dobre, albowiem nie może być wtedy żadnego nieszczęśliwego wierzchołka.

"zła" - jednobarwna

"dobra" - niejednobarwna



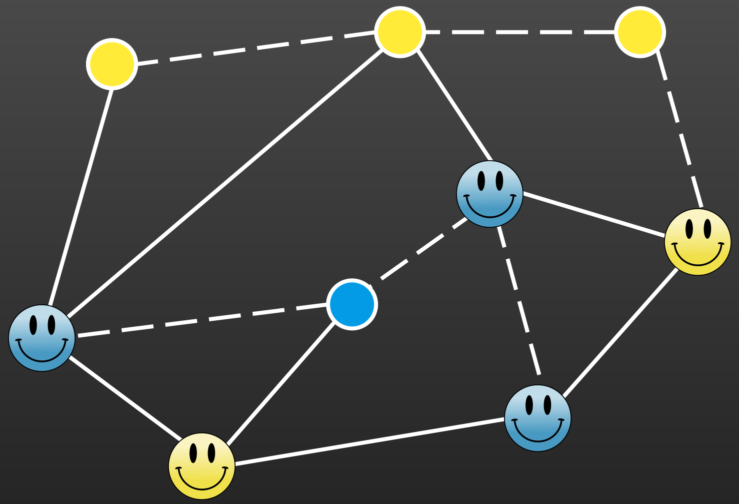
Definicja: Wierzchołek w pokolorowanym grafie jest *szczęśliwy* jeżeli *nie* dotyka go więcej złych niż dobrych krawędzi.

Twierdzenie (Lovász, 1966): Każdy graf skończony ma 2-kolorowanie, w którym każdy wierzchołek jest szczęśliwy.

Dowód: Kolorowanie z *maksymalną* liczbą dobrych krawędzi jest dobre, albowiem nie może być wtedy żadnego nieszczęśliwego wierzchołka.

“zła” - jednobarwna

“dobra” - niejednobarwna



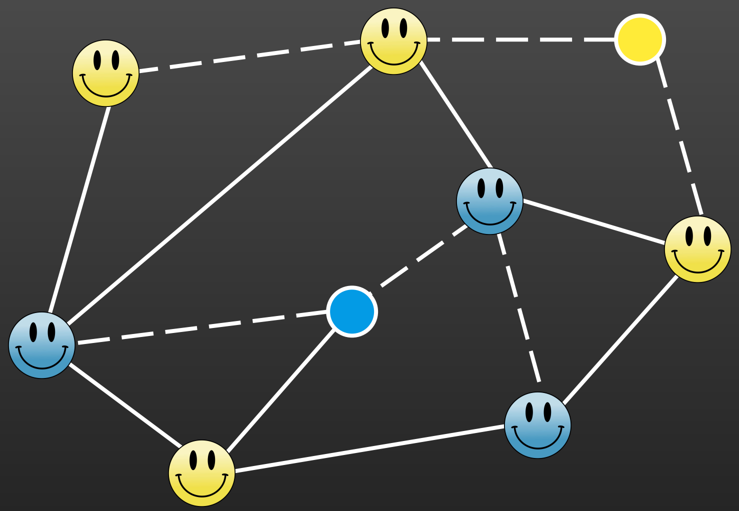
Definicja: Wierzchołek w pokolorowanym grafie jest *szczęśliwy* jeżeli *nie* dotyka go więcej złych niż dobrych krawędzi.

Twierdzenie (Lovász, 1966): Każdy graf skończony ma 2-kolorowanie, w którym każdy wierzchołek jest szczęśliwy.

Dowód: Kolorowanie z *maksymalną* liczbą dobrych krawędzi jest dobre, albowiem nie może być wtedy żadnego nieszczęśliwego wierzchołka.

"zła" - jednobarwna

"dobra" - niejednobarwna



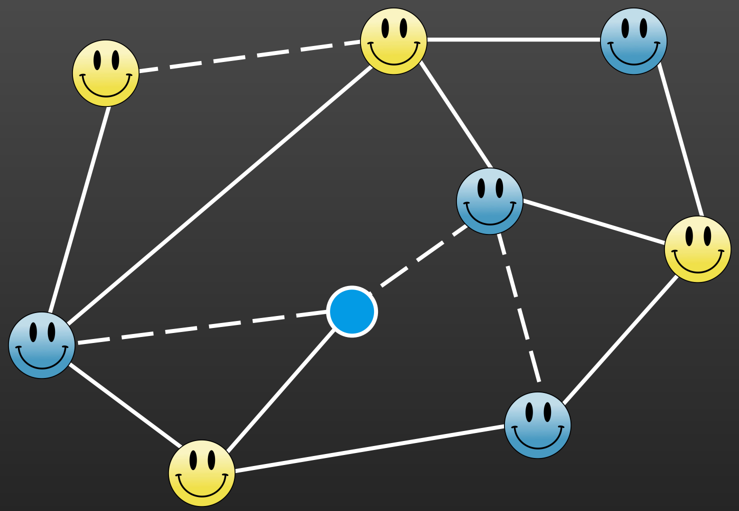
Definicja: Wierzchołek w pokolorowanym grafie jest *szczęśliwy* jeżeli *nie* dotyka go więcej złych niż dobrych krawędzi.

Twierdzenie (Lovász, 1966): Każdy graf skończony ma 2-kolorowanie, w którym każdy wierzchołek jest szczęśliwy.

Dowód: Kolorowanie z *maksymalną* liczbą dobrych krawędzi jest dobre, albowiem nie może być wtedy żadnego nieszczęśliwego wierzchołka.

“zła” - jednobarwna

“dobra” - niejednobarwna



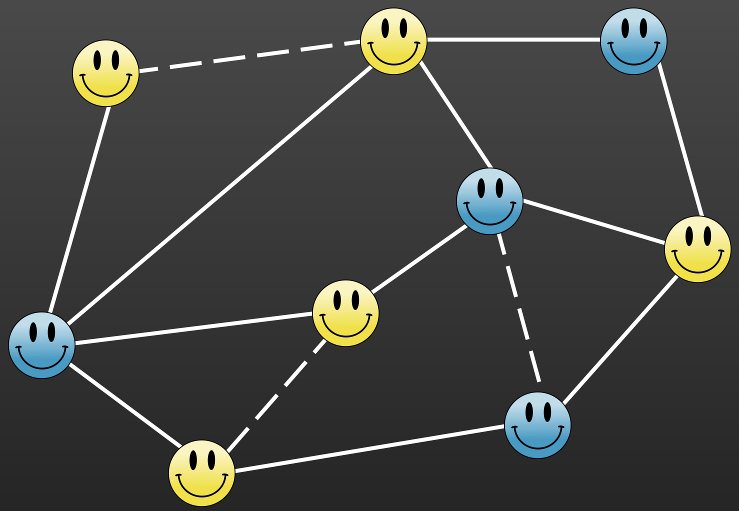
Definicja: Wierzchołek w pokolorowanym grafie jest *szczęśliwy* jeżeli *nie* dotyka go więcej złych niż dobrych krawędzi.

Twierdzenie (Lovász, 1966): Każdy graf skończony ma 2-kolorowanie, w którym każdy wierzchołek jest szczęśliwy.

Dowód: Kolorowanie z *maksymalną* liczbą dobrych krawędzi jest dobre, albowiem nie może być wtedy żadnego nieszczęśliwego wierzchołka.

“zła” - jednobarwna

“dobra” - niejednobarwna

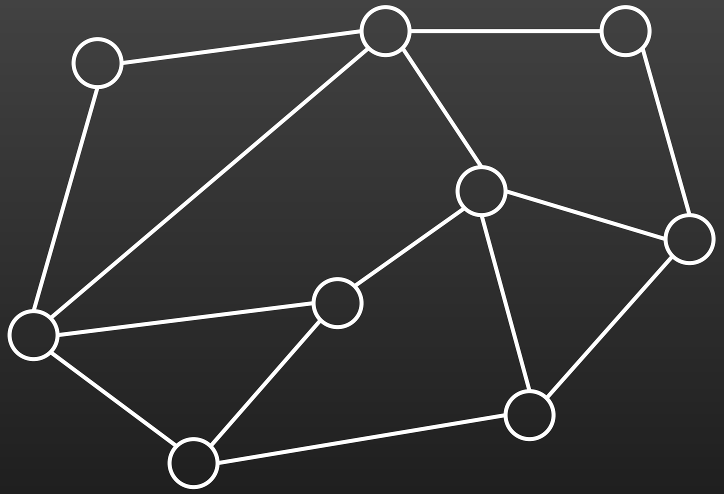


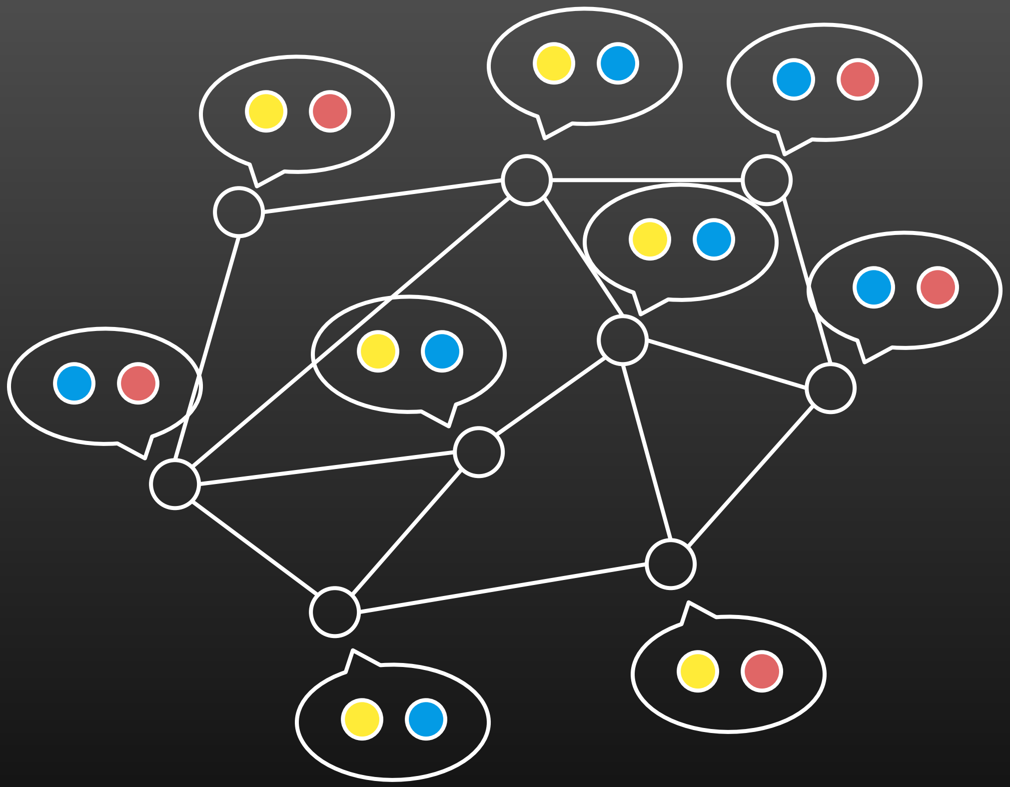
Definicja: Wierzchołek w pokolorowanym grafie jest *szczęśliwy* jeżeli *nie* dotyka go więcej złych niż dobrych krawędzi.

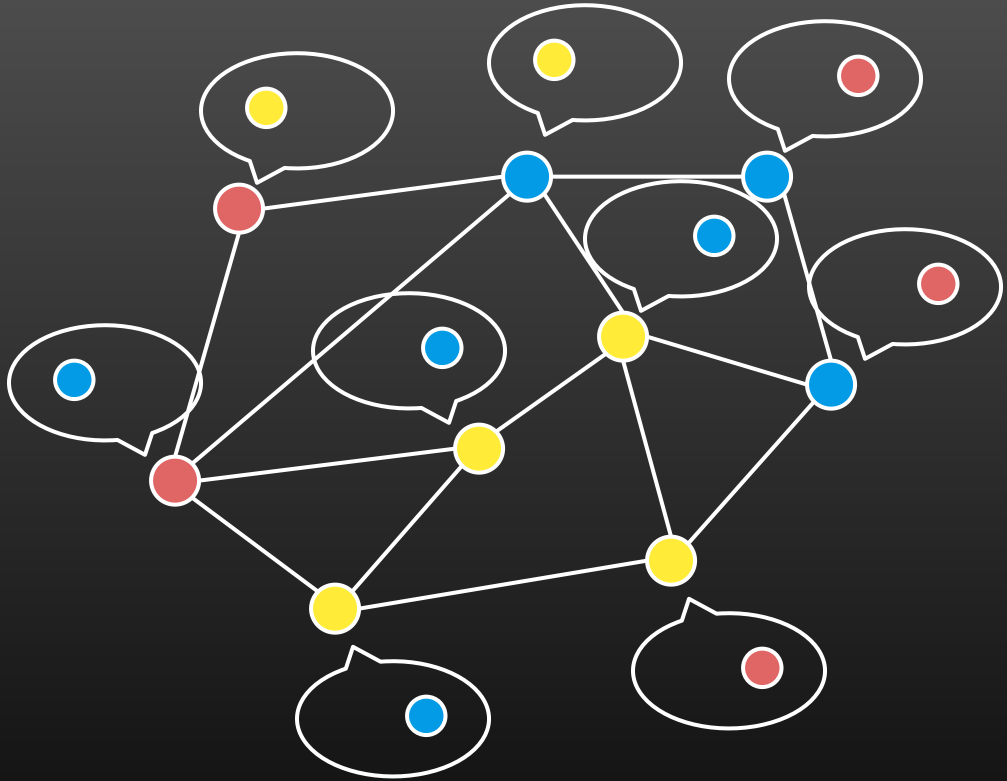
Twierdzenie (Lovász, 1966): Każdy graf skończony ma 2-kolorowanie, w którym każdy wierzchołek jest szczęśliwy.

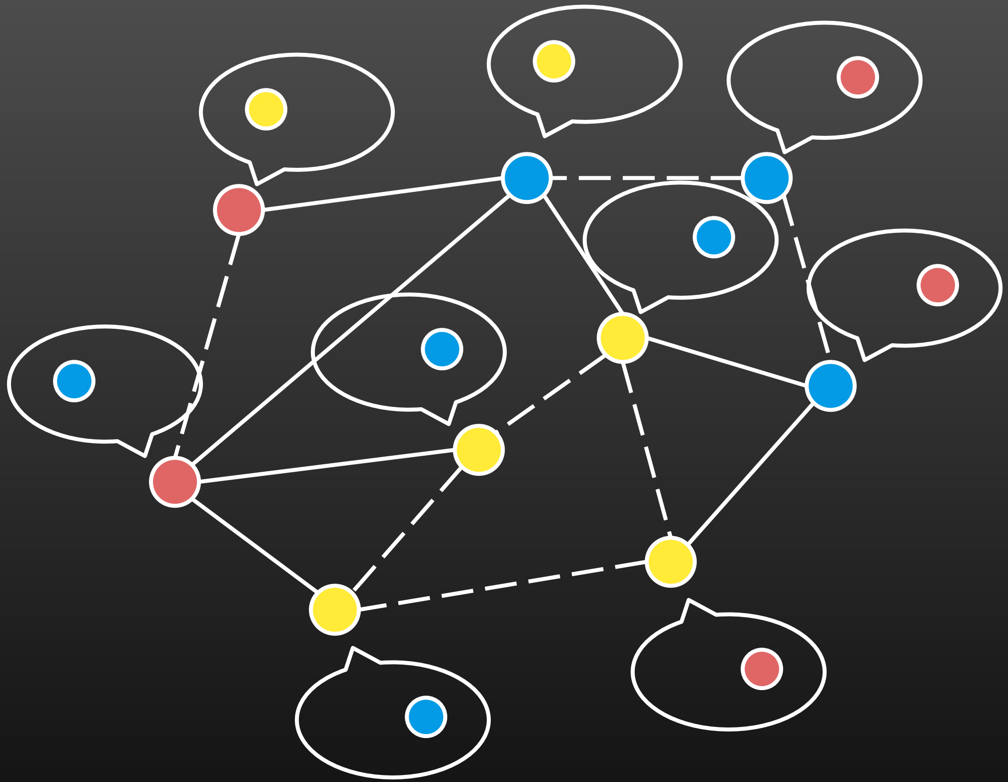
Dowód: Kolorowanie z *maksymalną* liczbą dobrych krawędzi jest dobre, albowiem nie może być wtedy żadnego nieszczęśliwego wierzchołka.

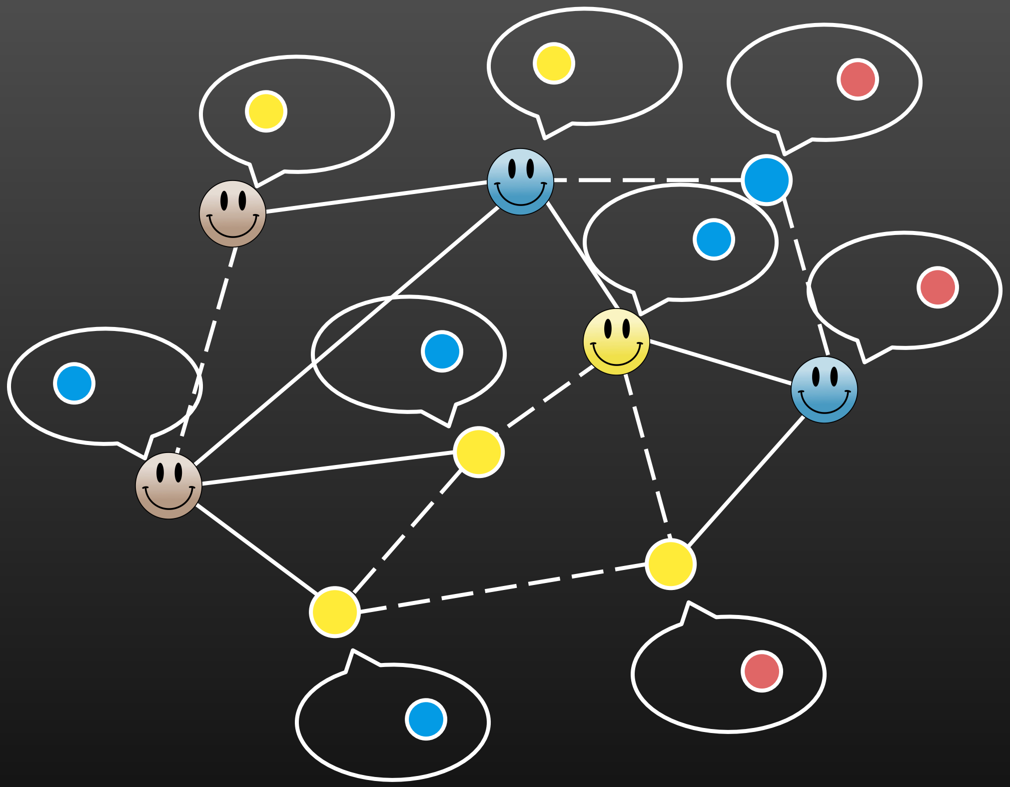
A co jak każdy miś lubi inne kolory?

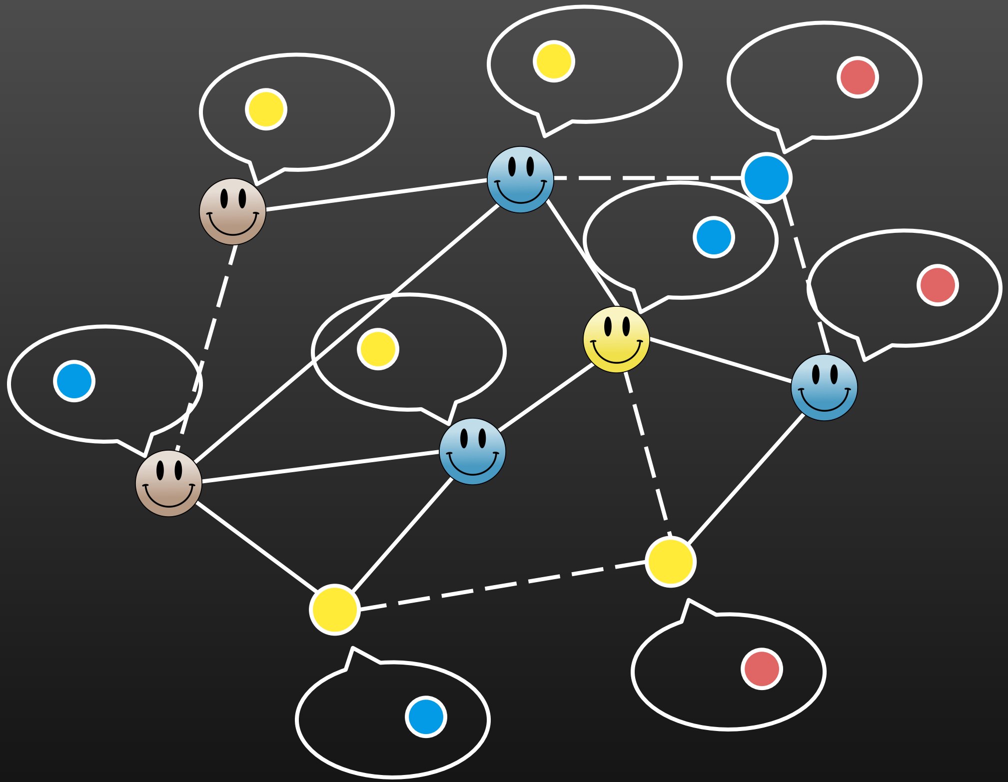


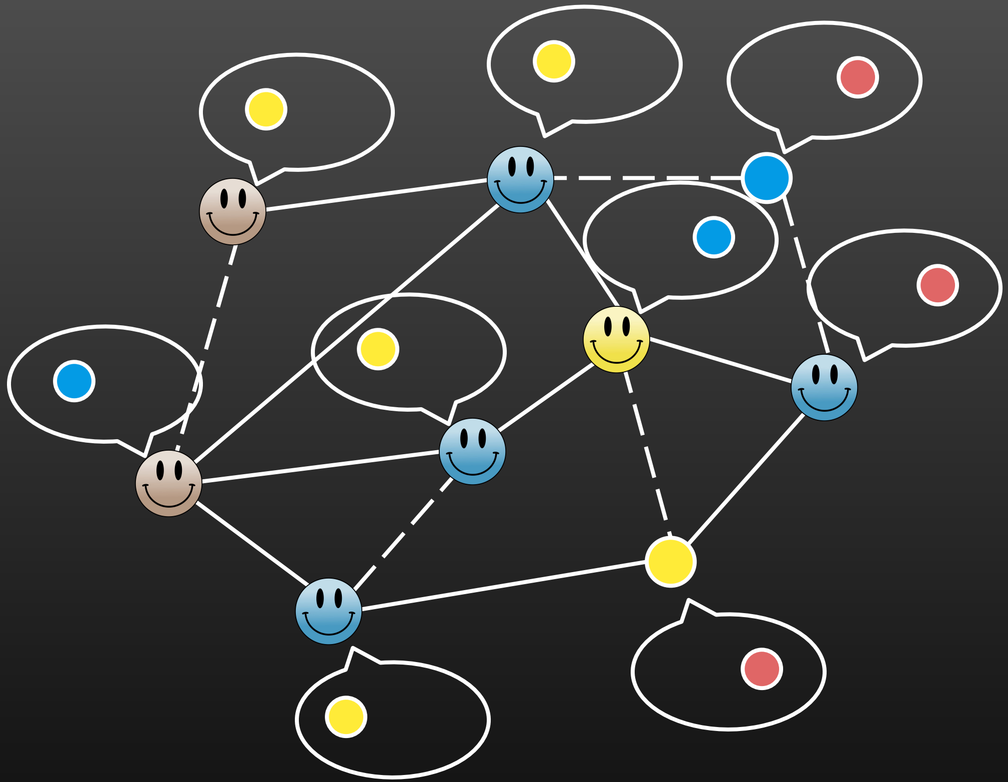


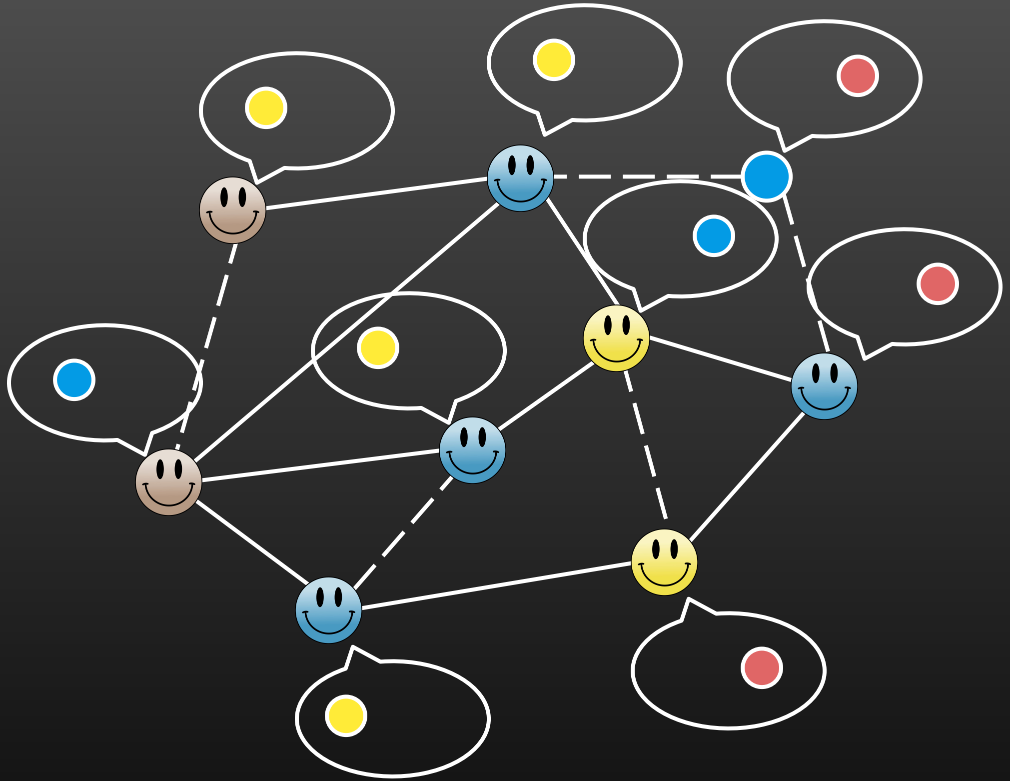


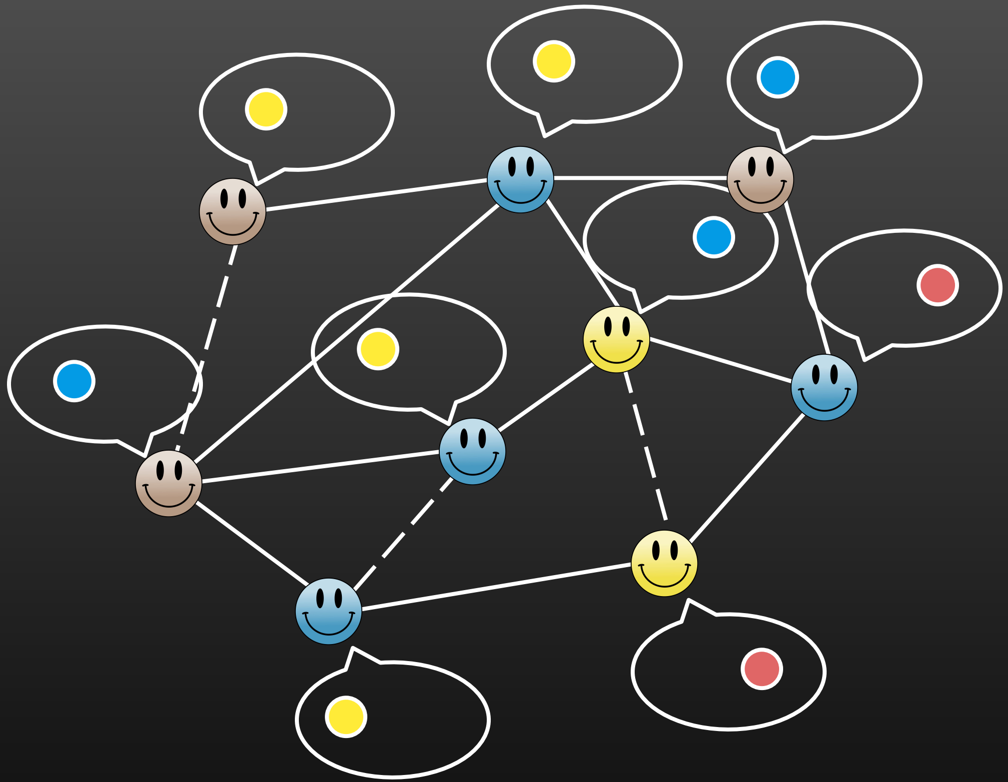




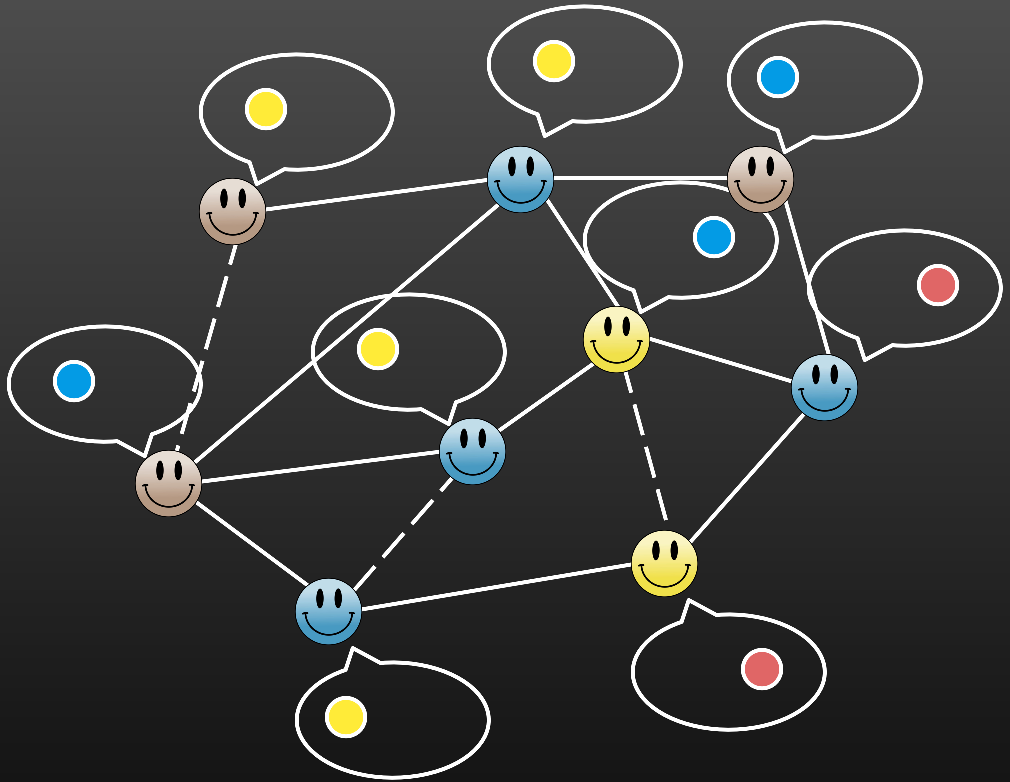




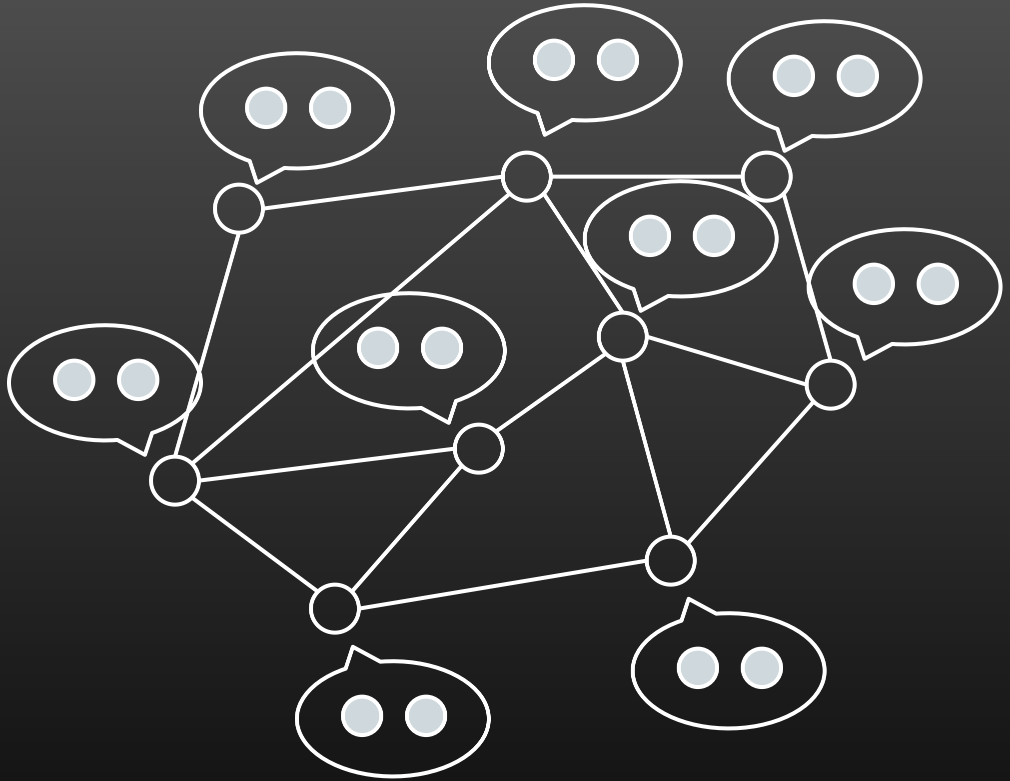




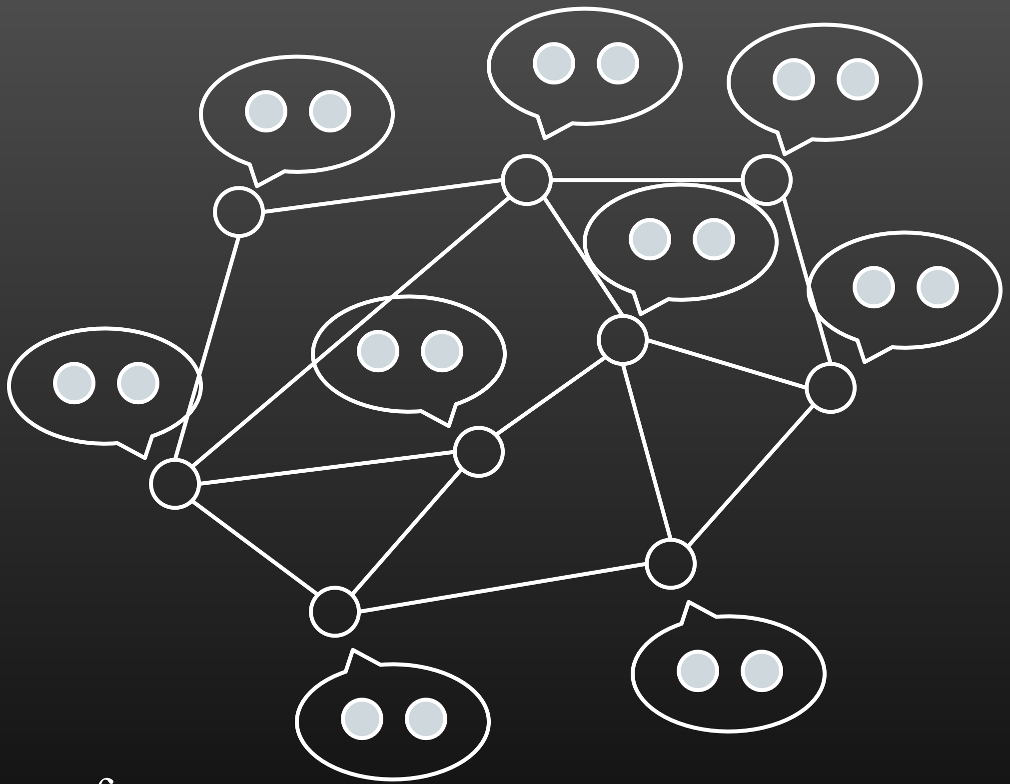
Twierdzenie (Lovász, 1966): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa *ulubione* kolory.



Twierdzenie (Lovász, 1966): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa *ulubione* kolory.

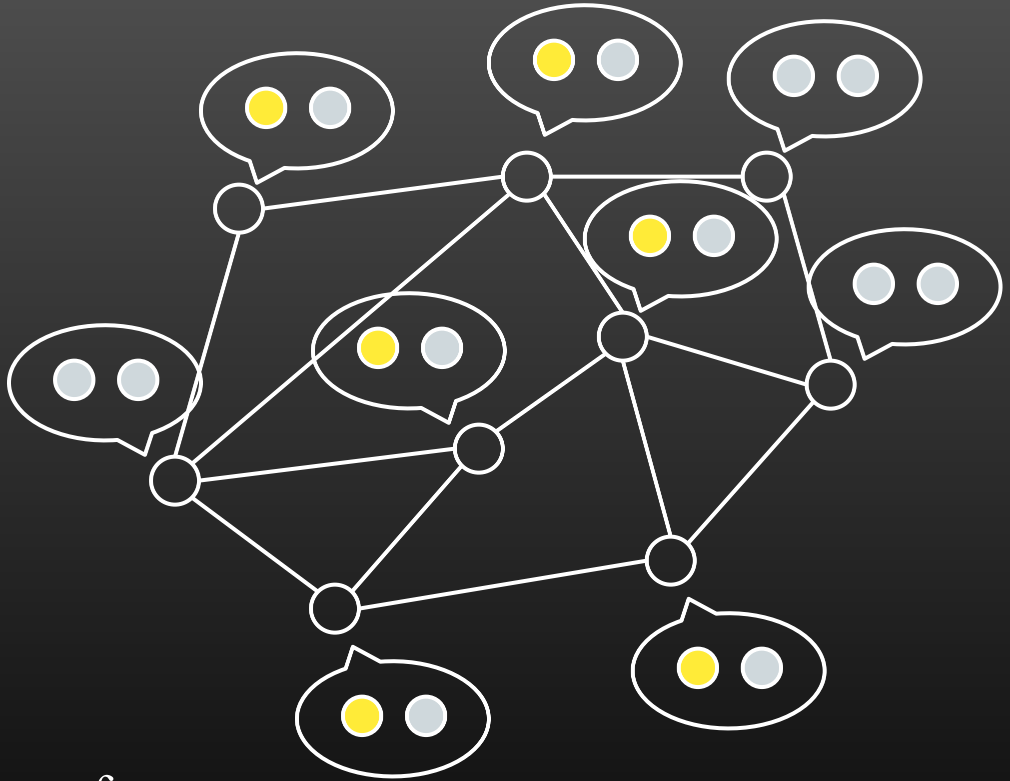


Twierdzenie (Lovász, 1966): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa *ulubione* kolory.



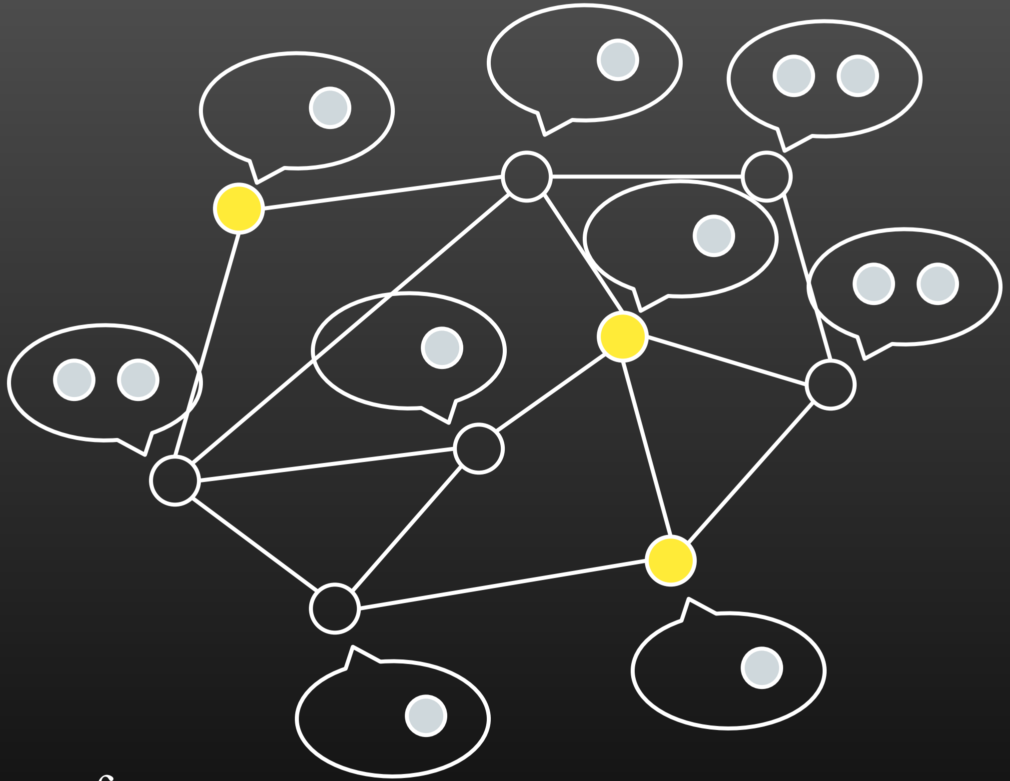
Twierdzenie (Lasoń, 2021): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa ulubione kolory, a *Ty* jesteś kompletnym *daltonistą*.

Twierdzenie (Lovász, 1966): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa *ulubione* kolory.



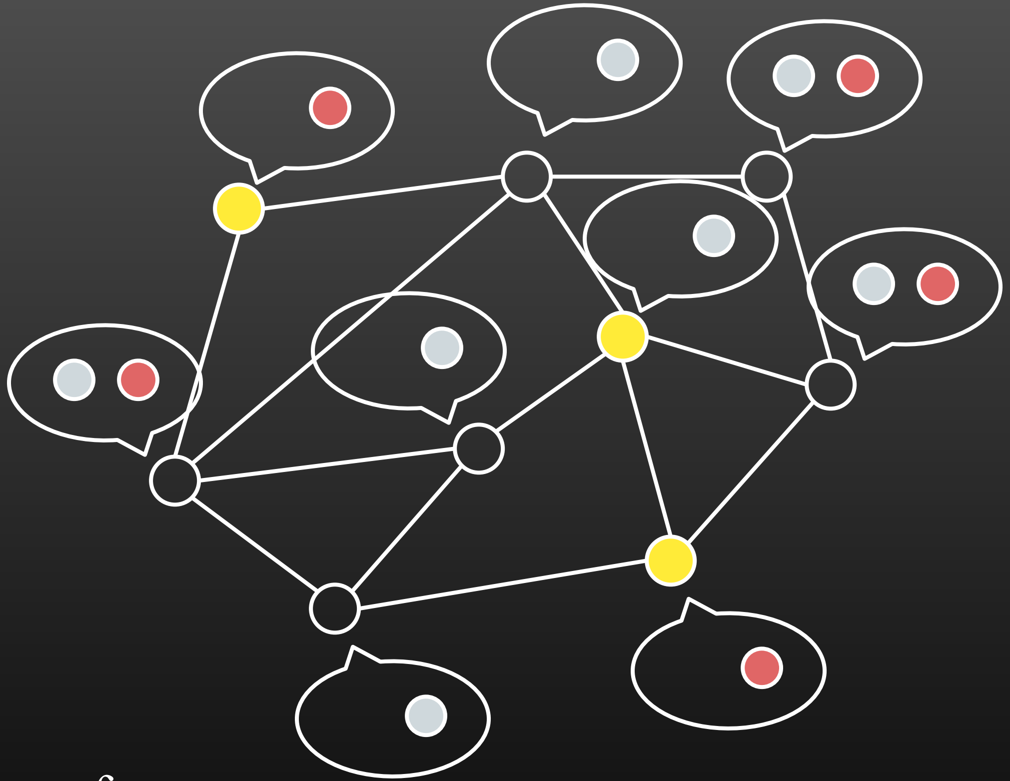
Twierdzenie (Lasoń, 2021): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa ulubione kolory, a *Ty* jesteś kompletnym *daltonistą*.

Twierdzenie (Lovász, 1966): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa *ulubione* kolory.



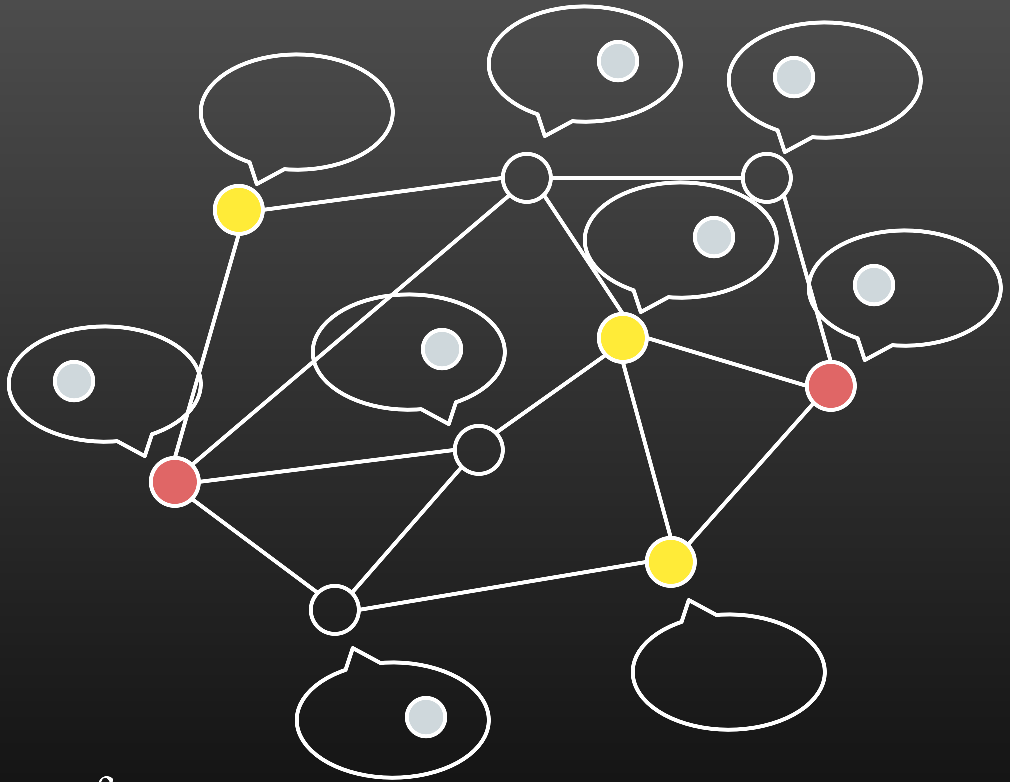
Twierdzenie (Lasoń, 2021): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa ulubione kolory, a *Ty* jesteś kompletnym *daltonistą*.

Twierdzenie (Lovász, 1966): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa *ulubione* kolory.



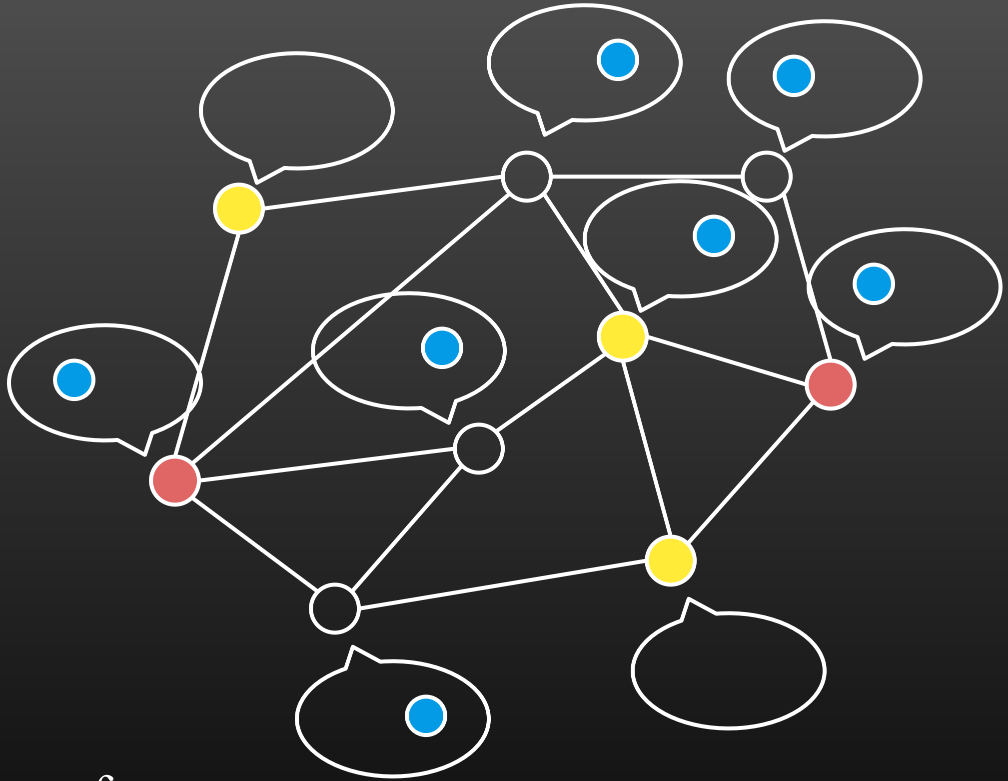
Twierdzenie (Lasoń, 2021): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa ulubione kolory, a *Ty* jesteś kompletnym *daltonistą*.

Twierdzenie (Lovász, 1966): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa *ulubione* kolory.



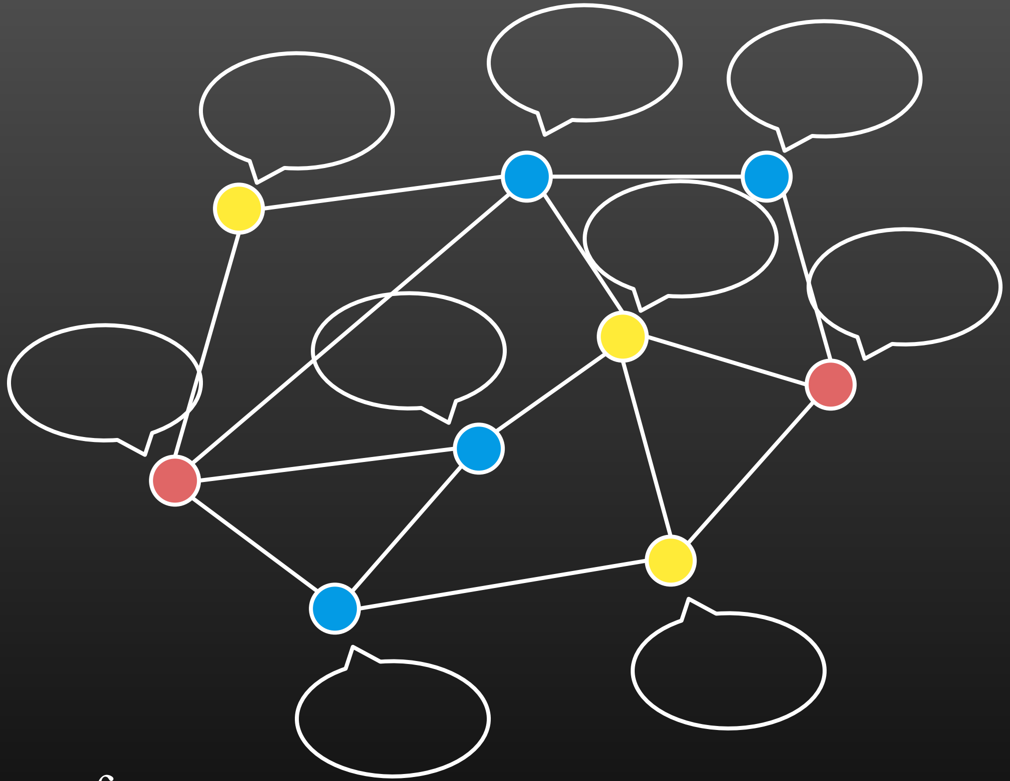
Twierdzenie (Lasoń, 2021): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa ulubione kolory, a *Ty* jesteś kompletnym *daltonistą*.

Twierdzenie (Lovász, 1966): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa *ulubione* kolory.



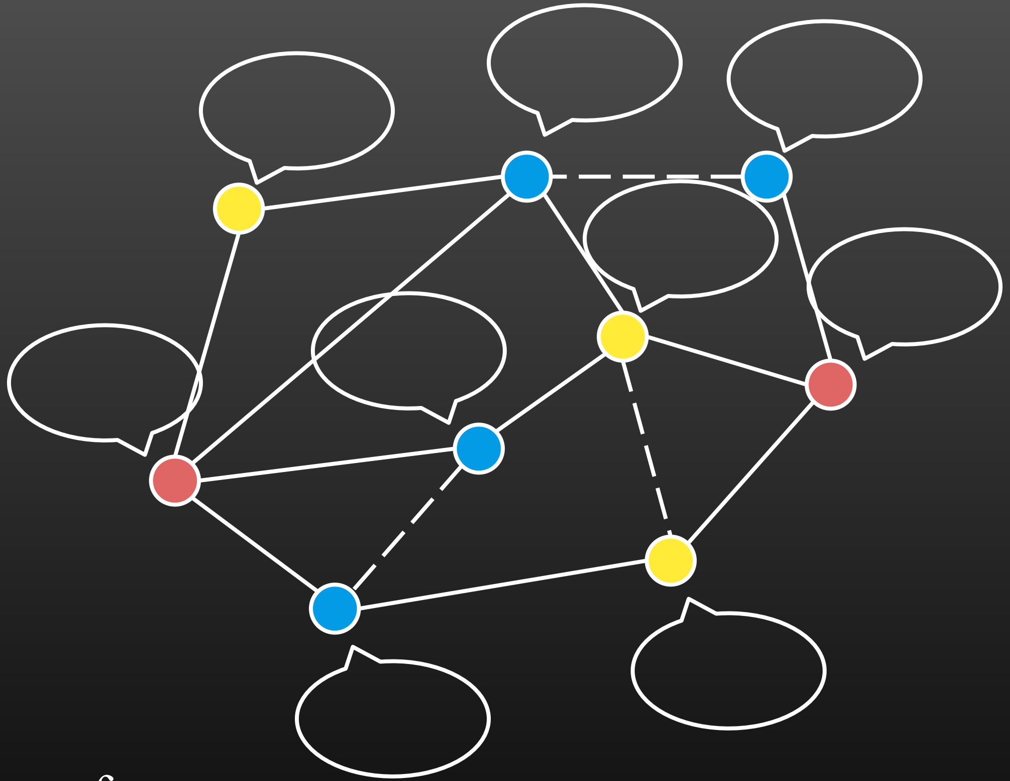
Twierdzenie (Lasoń, 2021): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa ulubione kolory, a *Ty* jesteś kompletnym *daltonistą*.

Twierdzenie (Lovász, 1966): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa *ulubione* kolory.



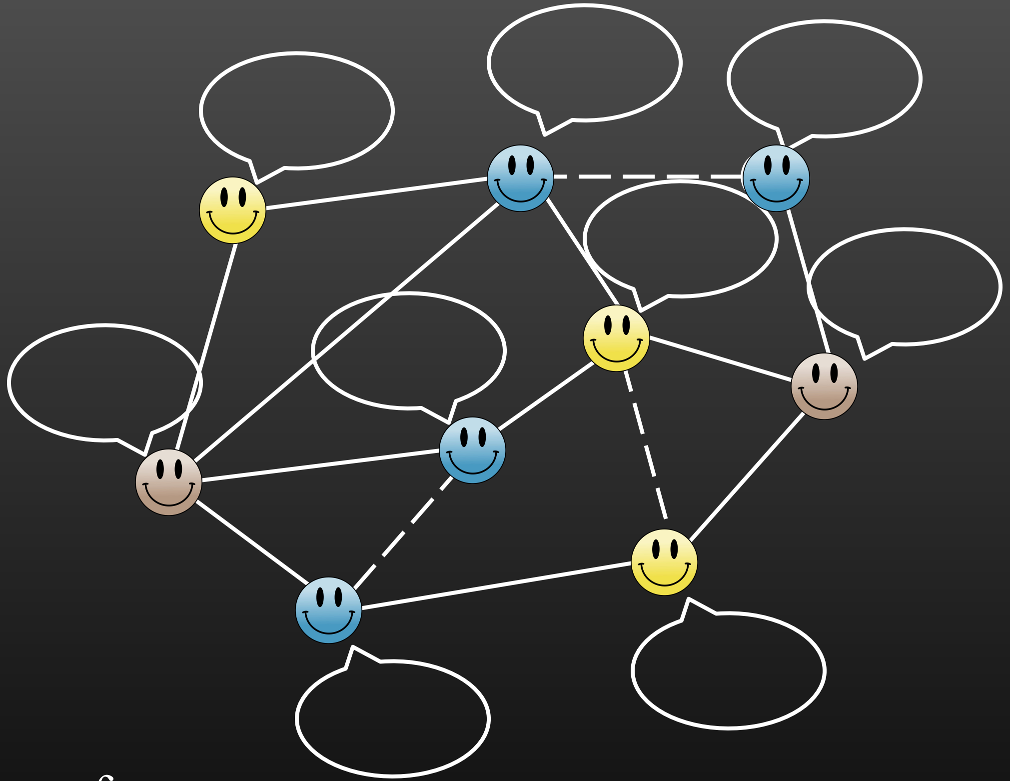
Twierdzenie (Lasoń, 2021): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa ulubione kolory, a *Ty* jesteś kompletnym *daltonistą*.

Twierdzenie (Lovász, 1966): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa *ulubione* kolory.



Twierdzenie (Lasoń, 2021): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa ulubione kolory, a *Ty* jesteś kompletnym *daltonistą*.

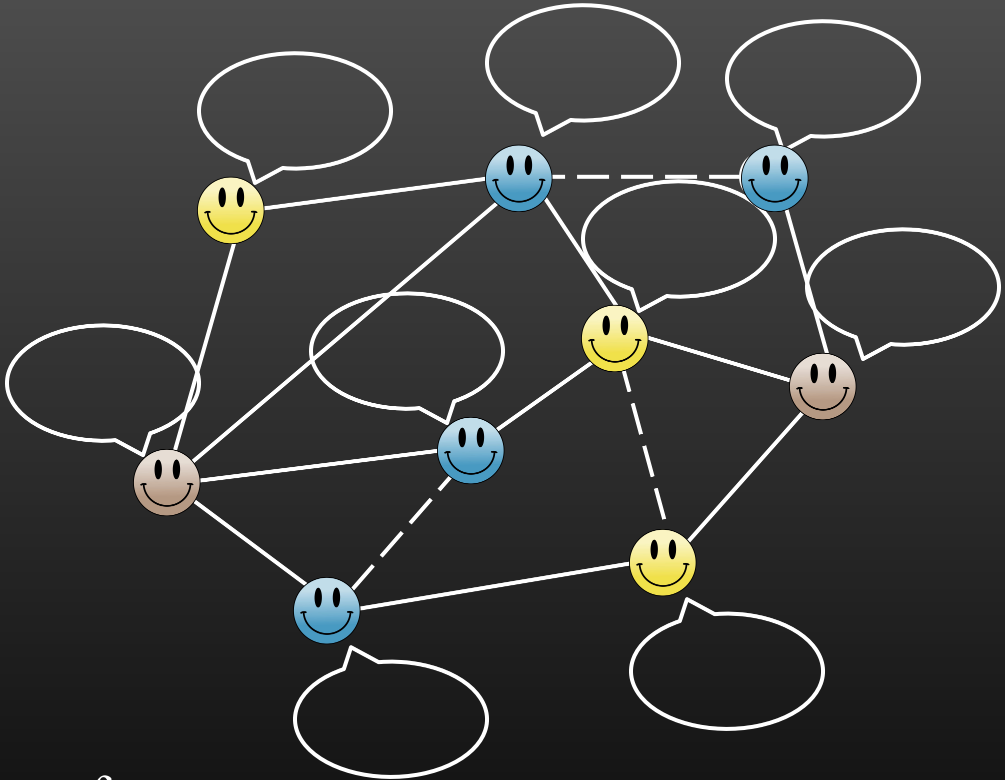
Twierdzenie (Lovász, 1966): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa *ulubione* kolory.



Twierdzenie (Lasoń, 2021): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa ulubione kolory, a *Ty* jesteś kompletnym *daltonistą*.

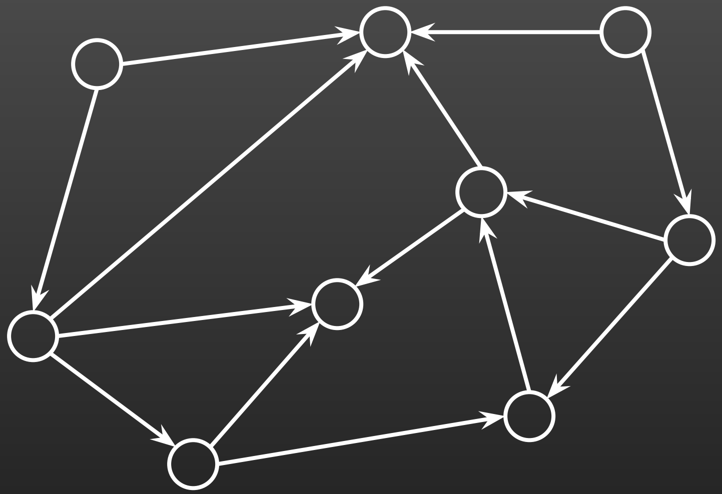
Twierdzenie (Lovász, 1966): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa *ulubione* kolory.

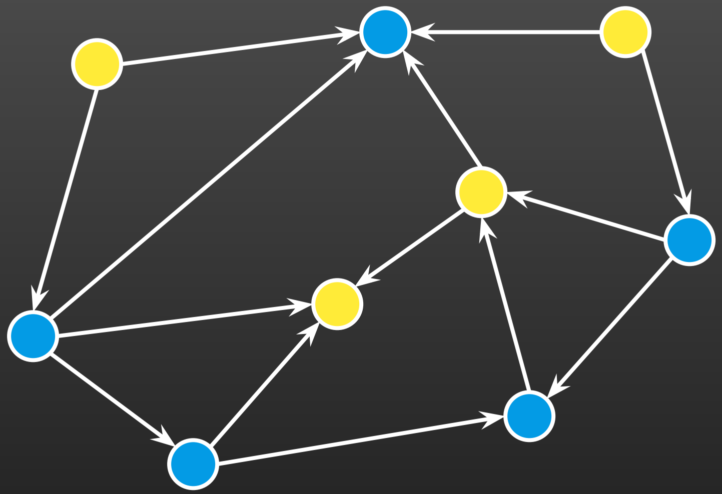
Michał Lasoń

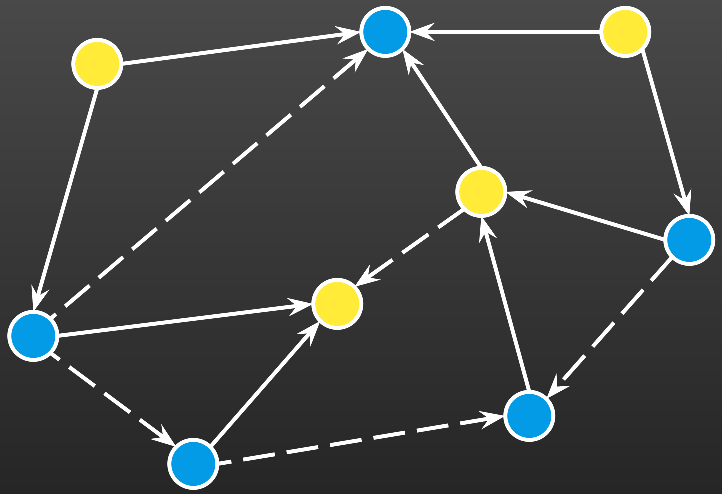


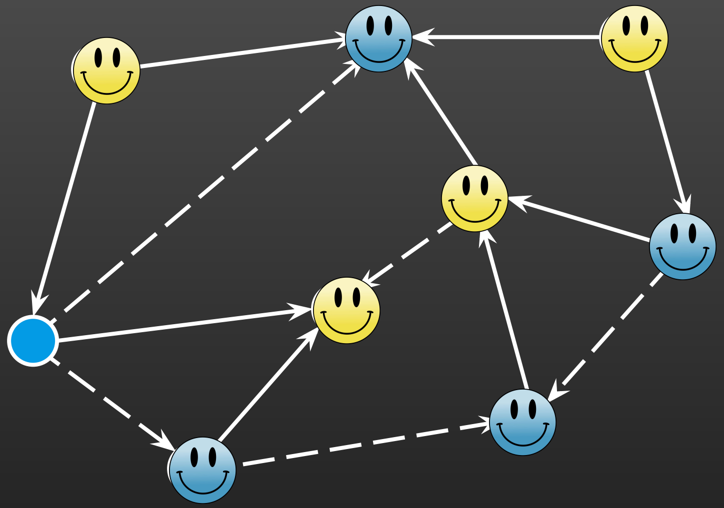
Twierdzenie (Lasoń, 2021): W każdym grafie skończonym można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje dwa ulubione kolory, a *Ty* jesteś kompletnym *daltonistą*.

Grafy skierowane też można kolorować

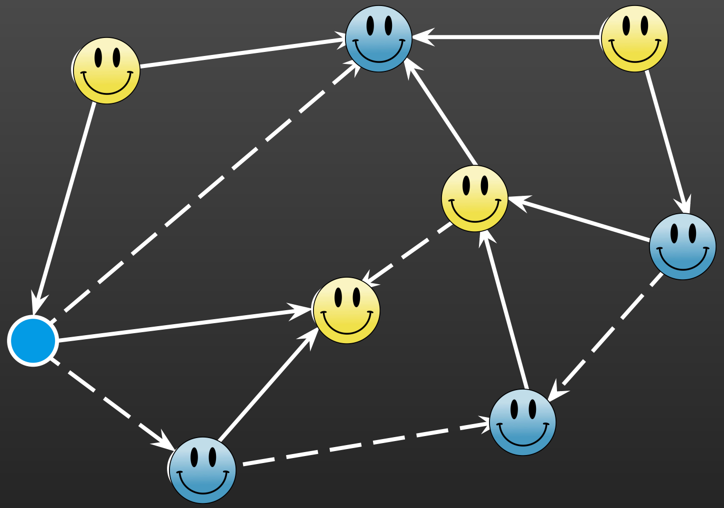




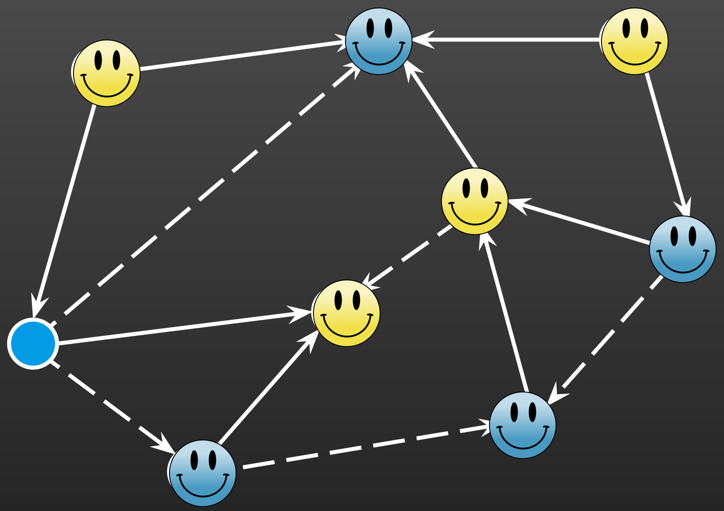


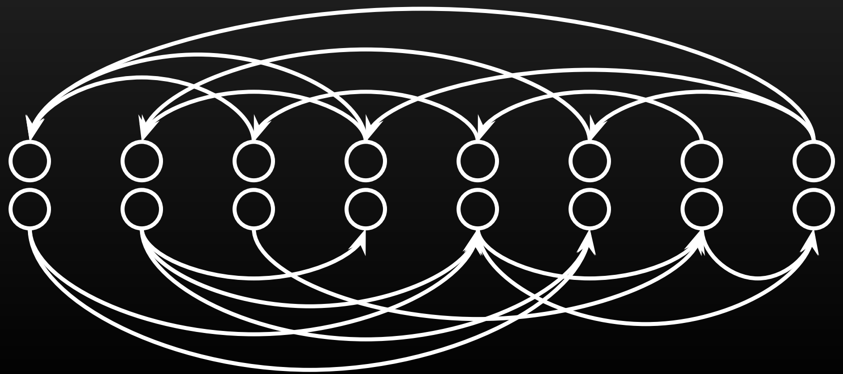


Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.

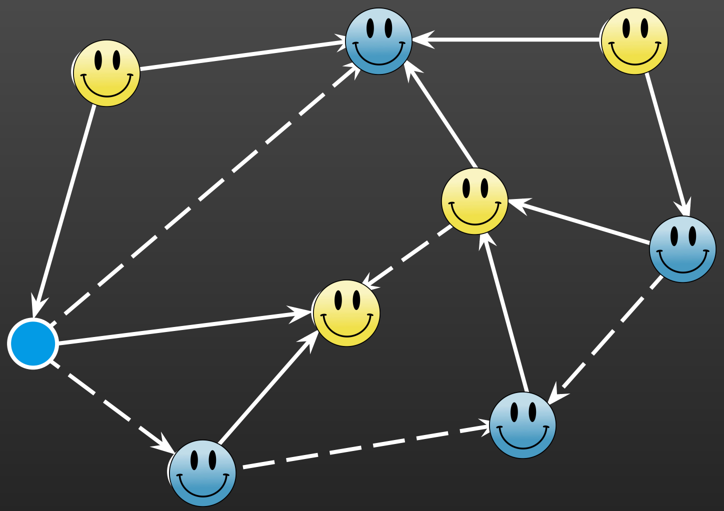


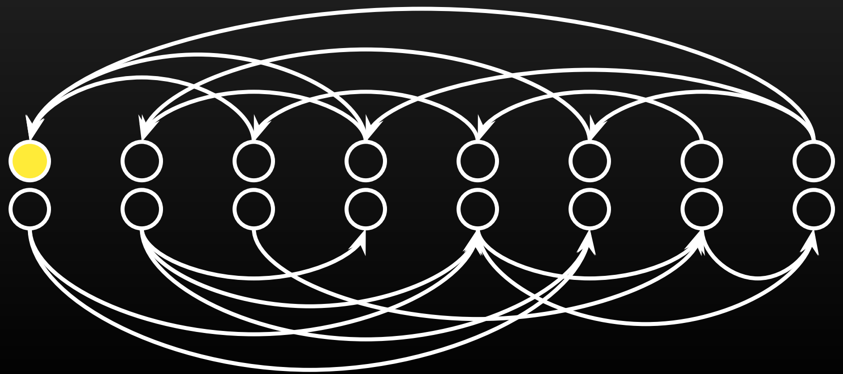
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



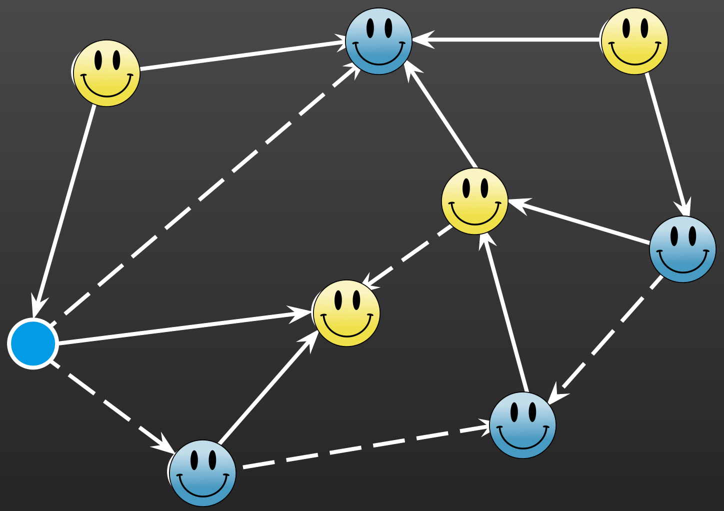


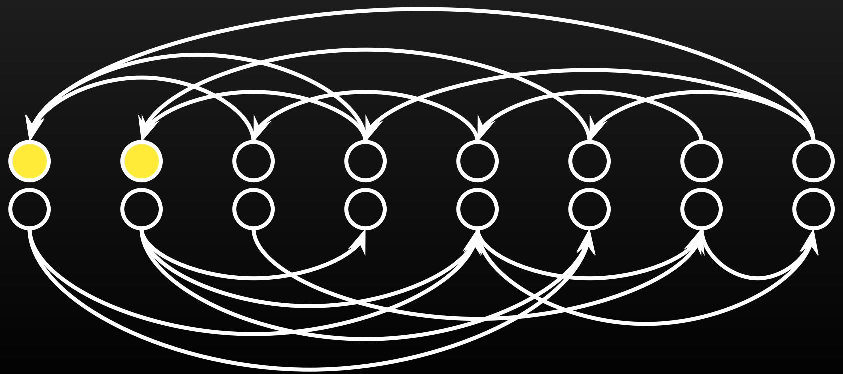
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



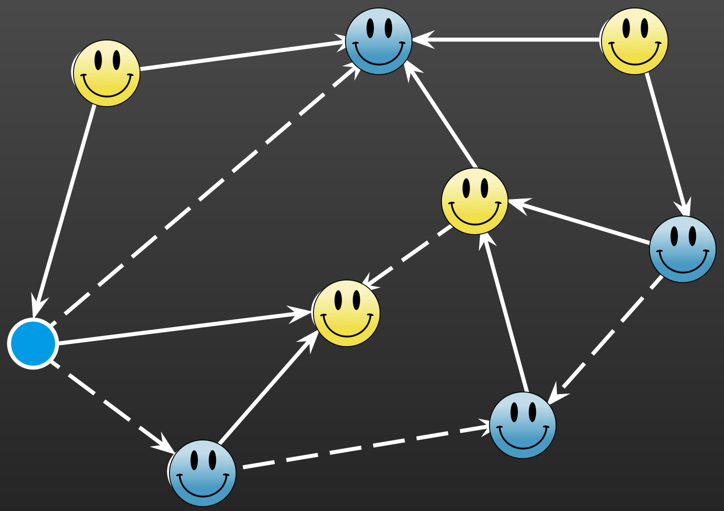


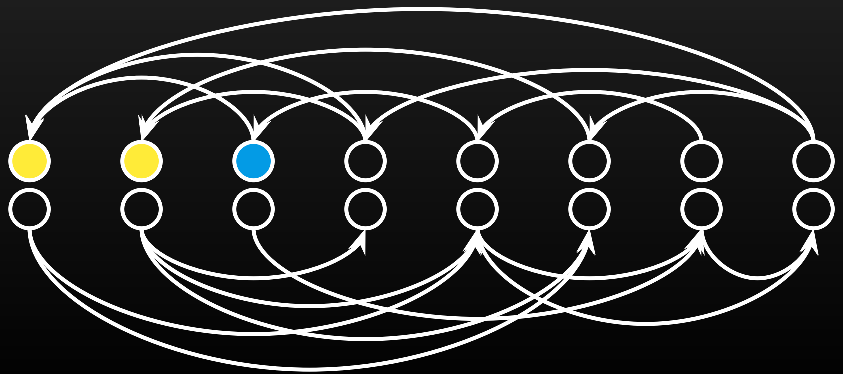
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



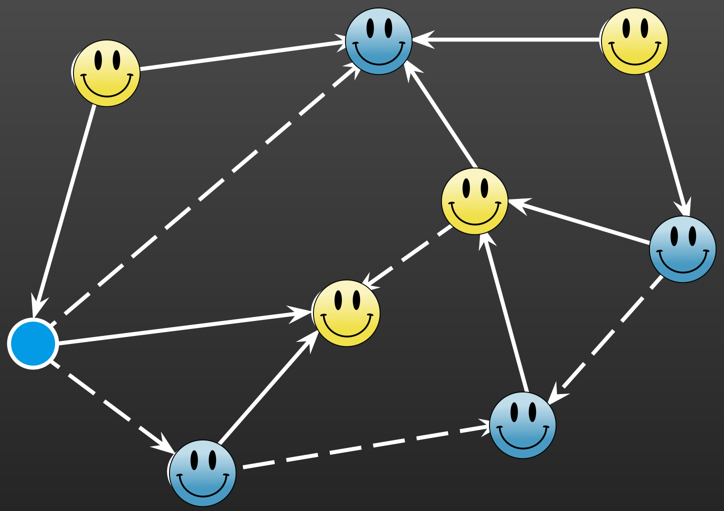


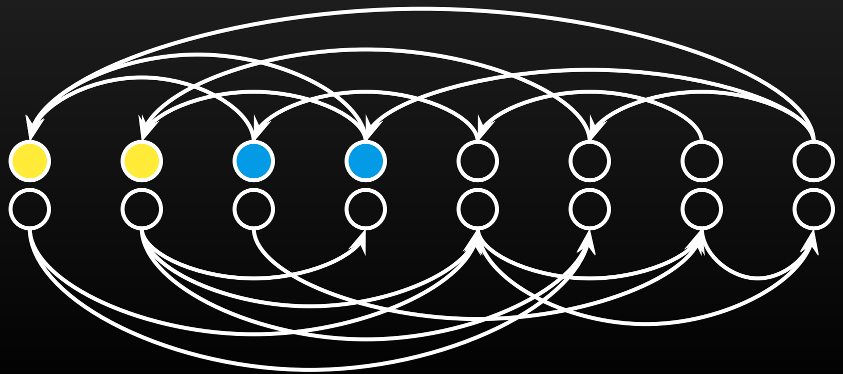
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



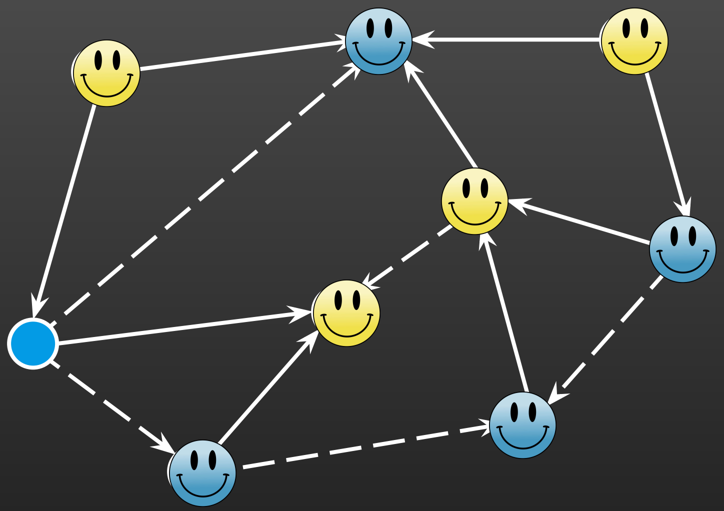


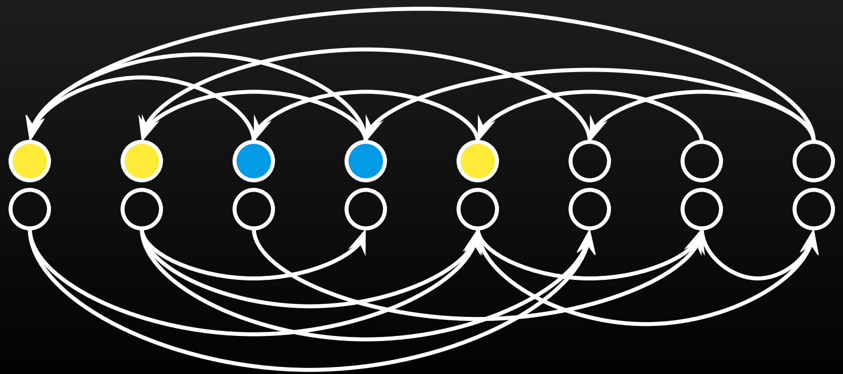
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



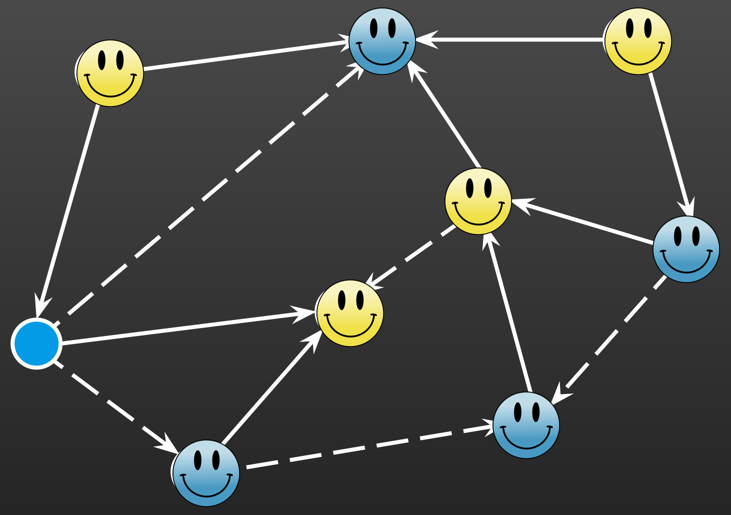


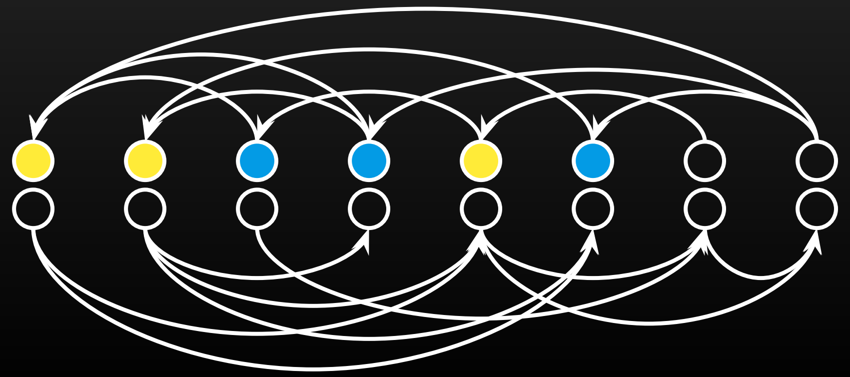
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



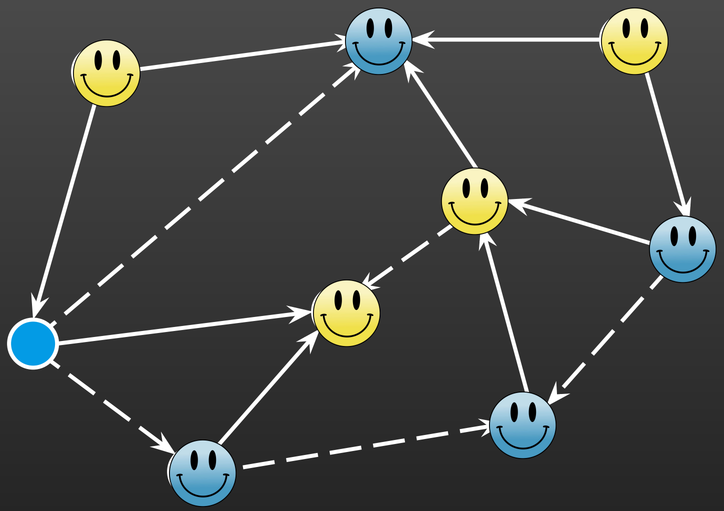


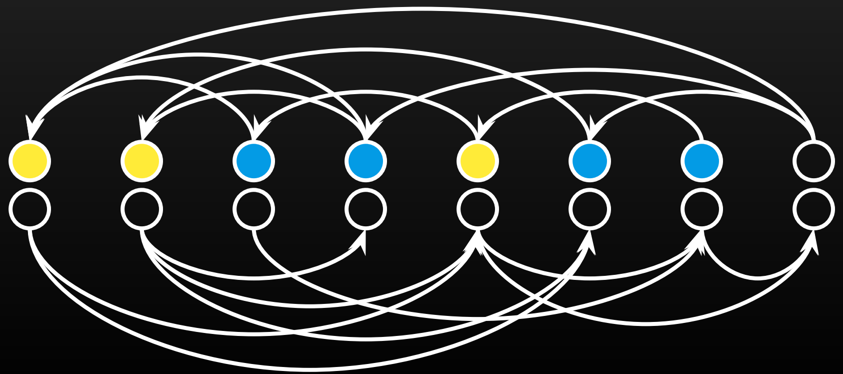
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



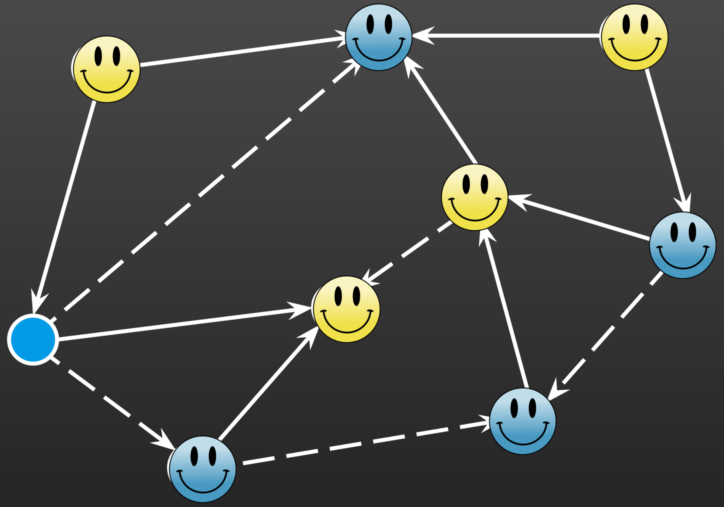


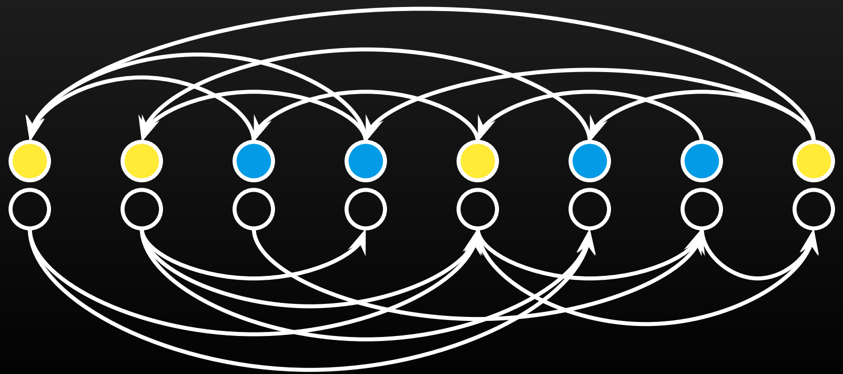
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



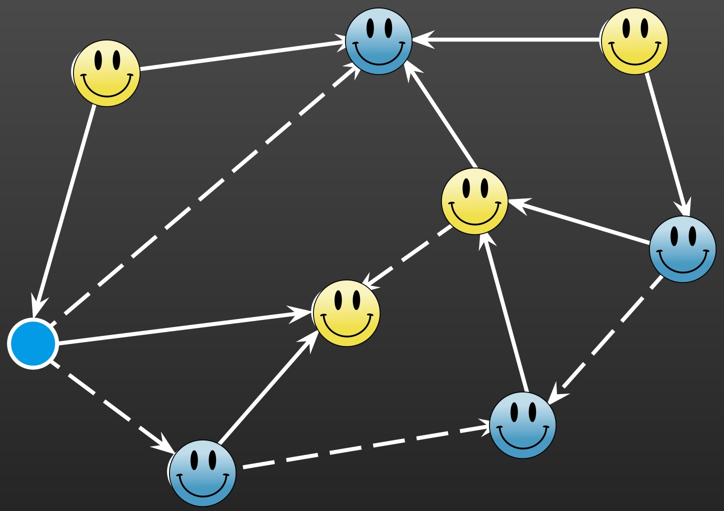


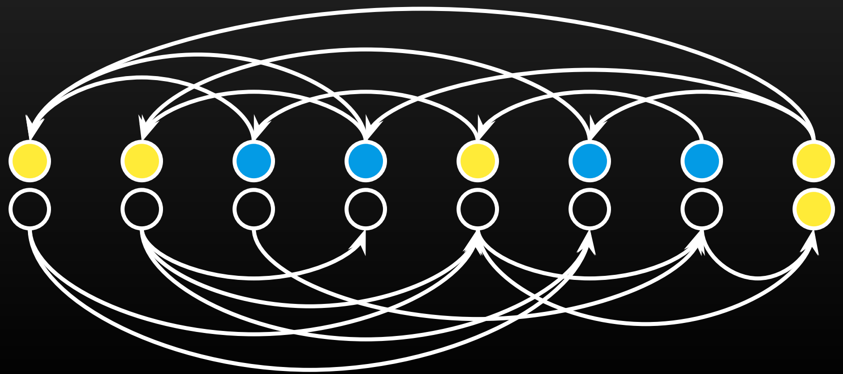
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



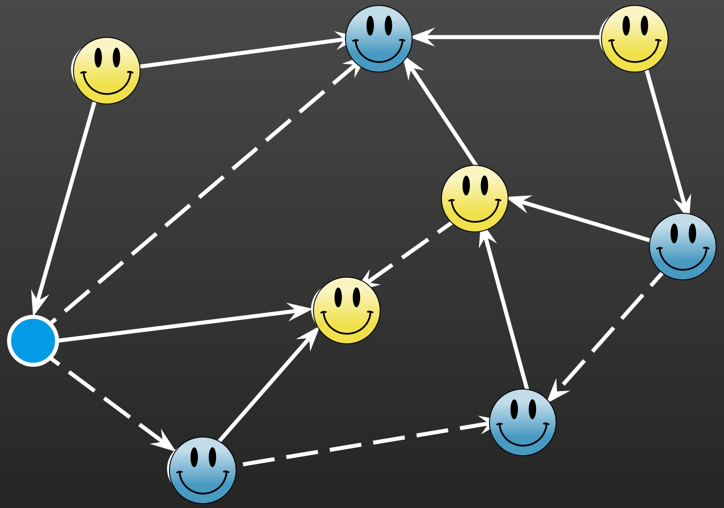


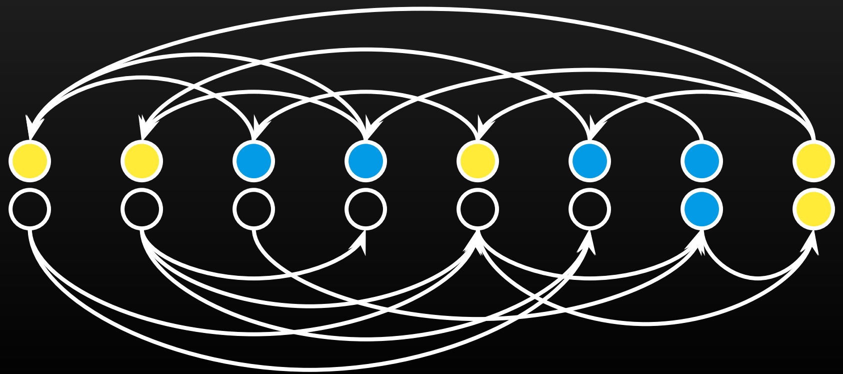
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



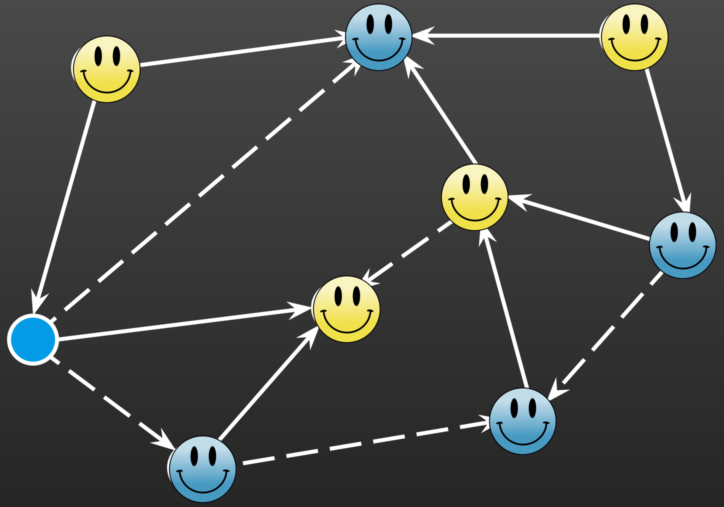


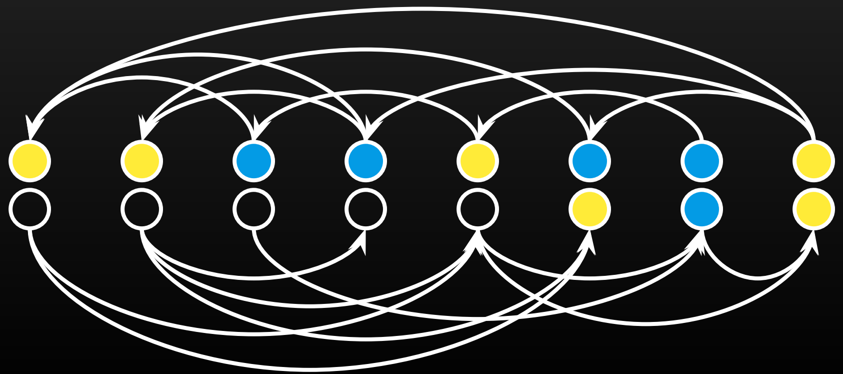
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



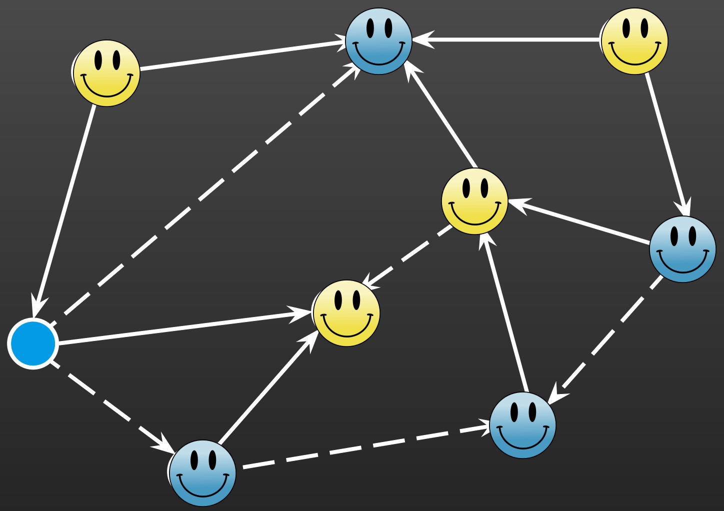


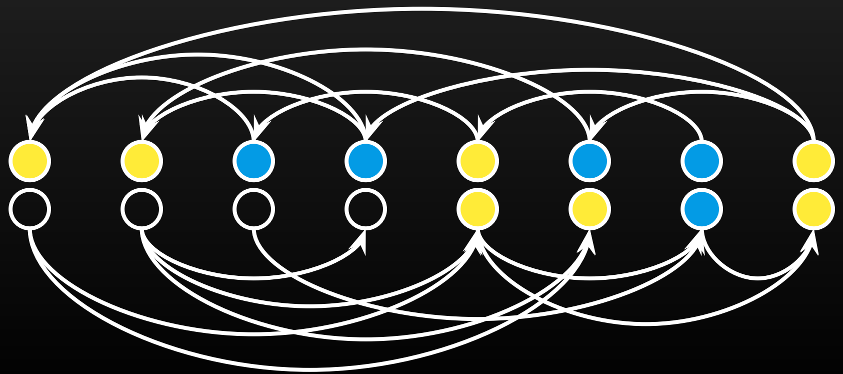
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



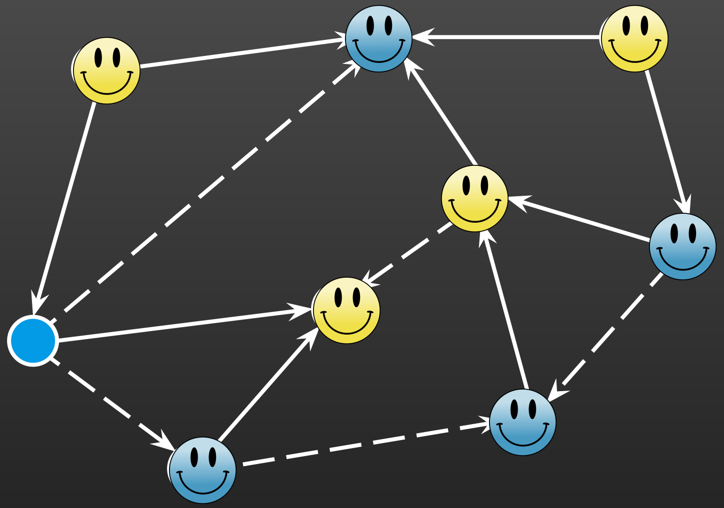


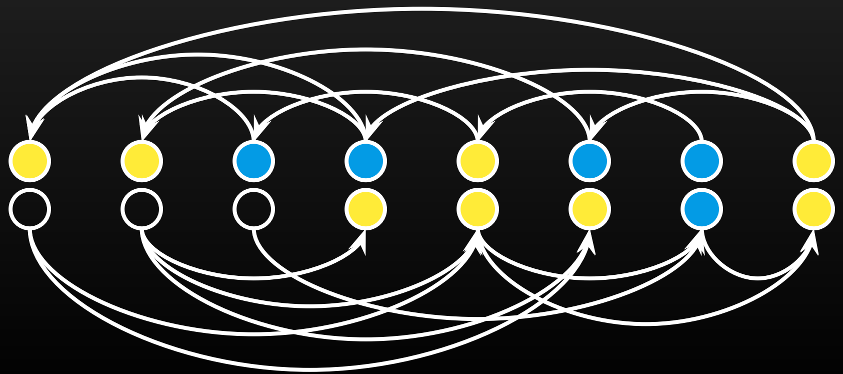
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



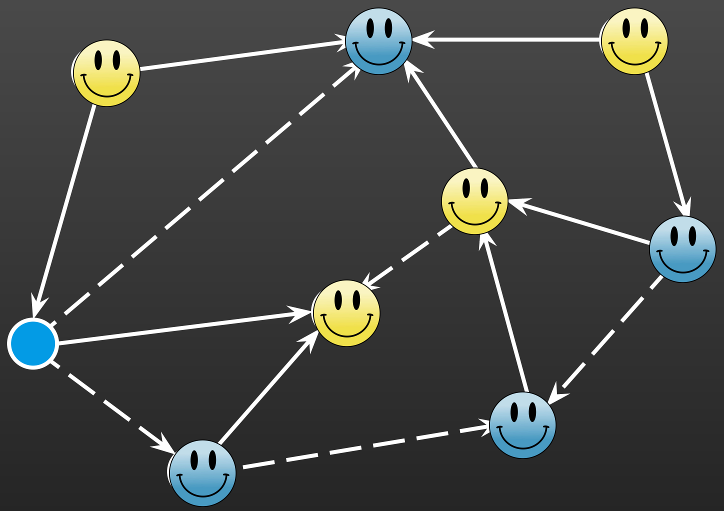


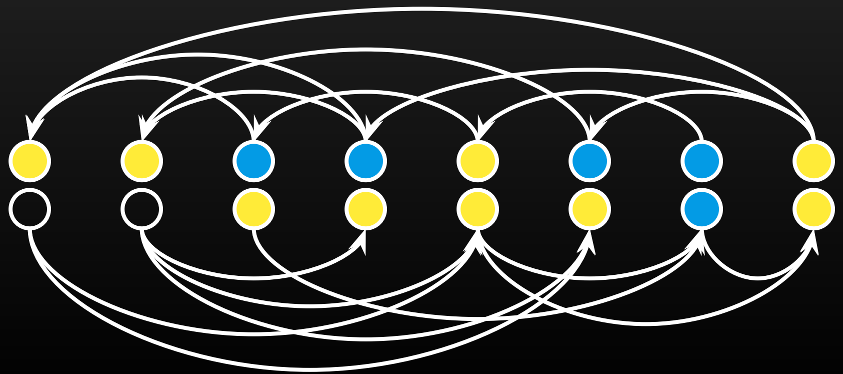
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



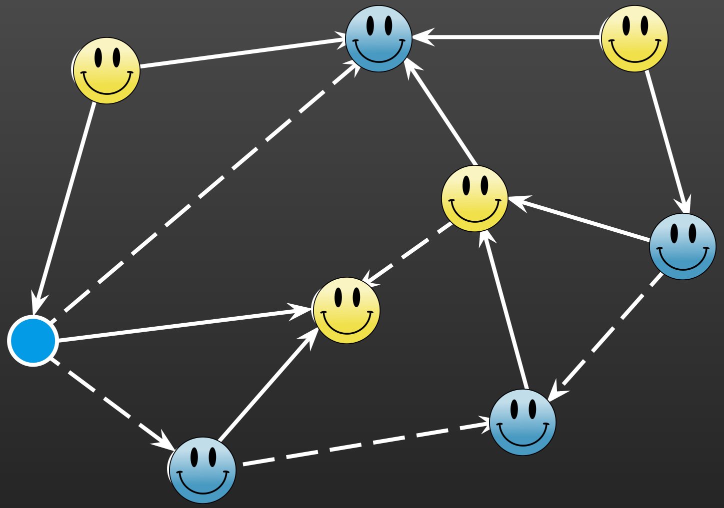


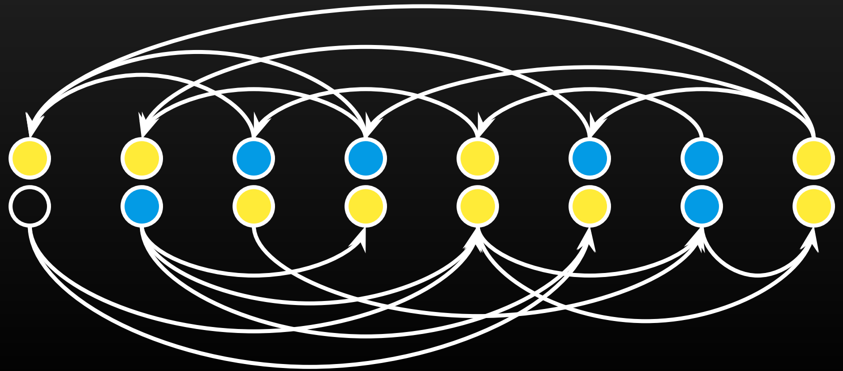
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



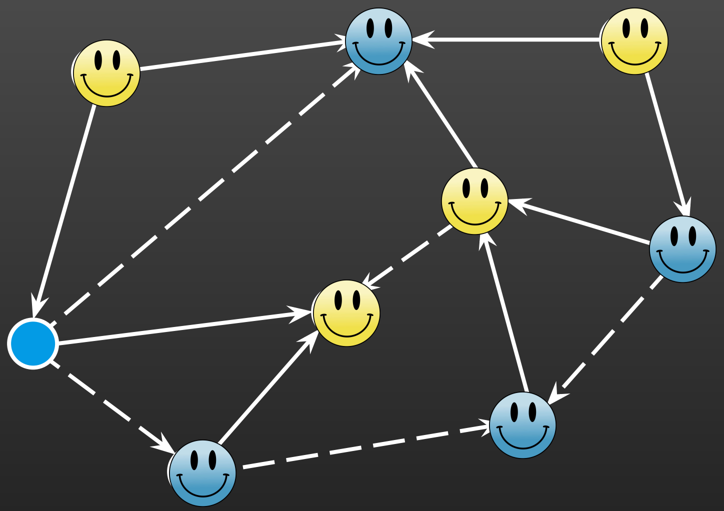


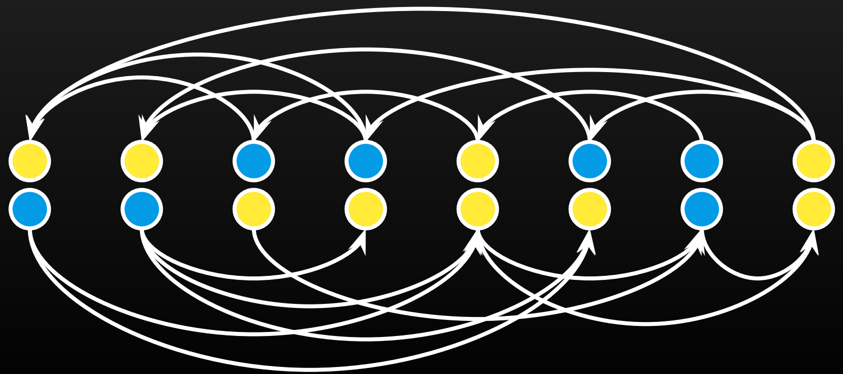
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



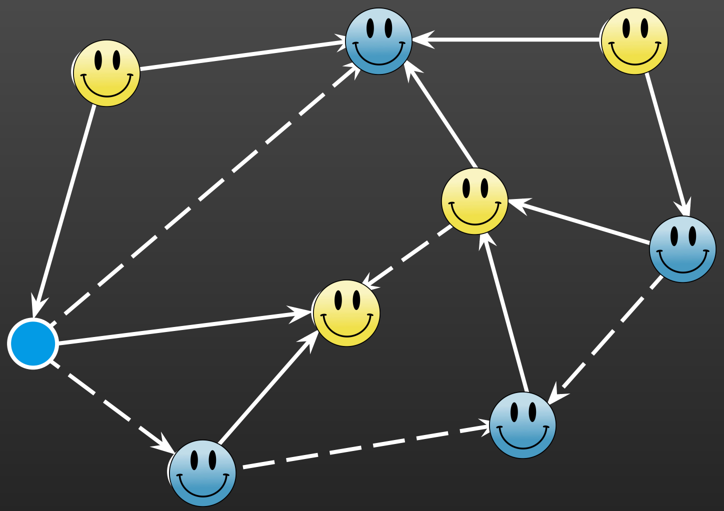


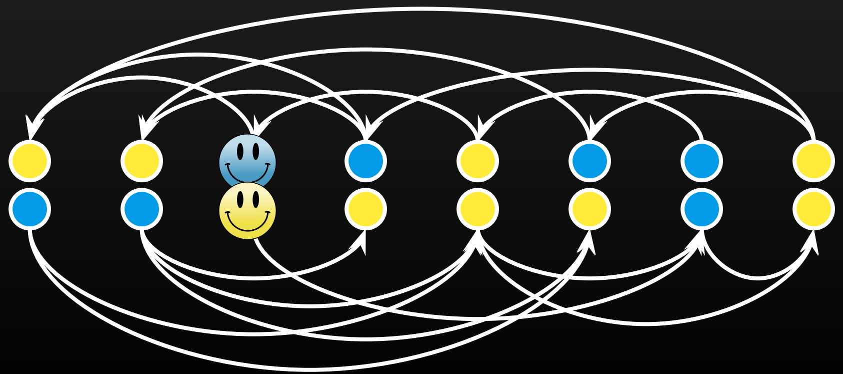
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



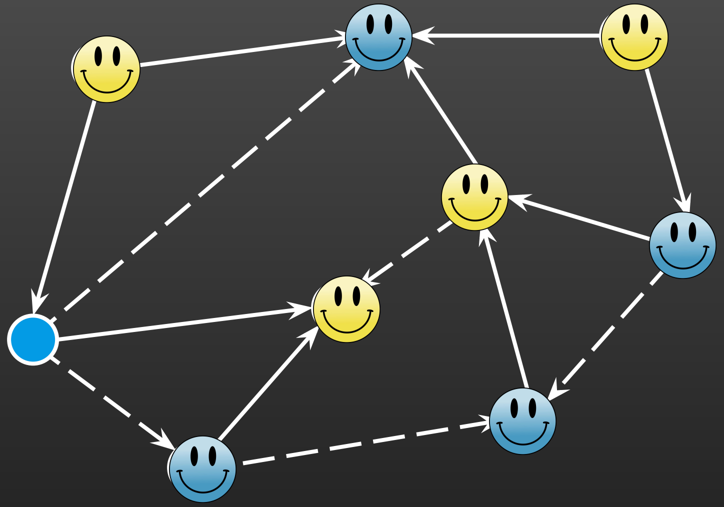


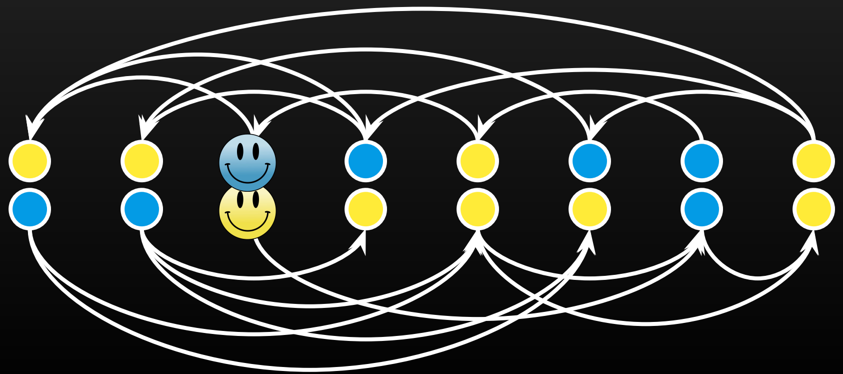
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.

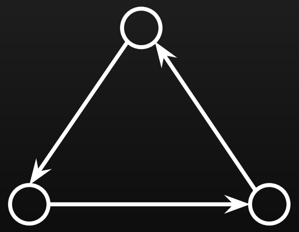




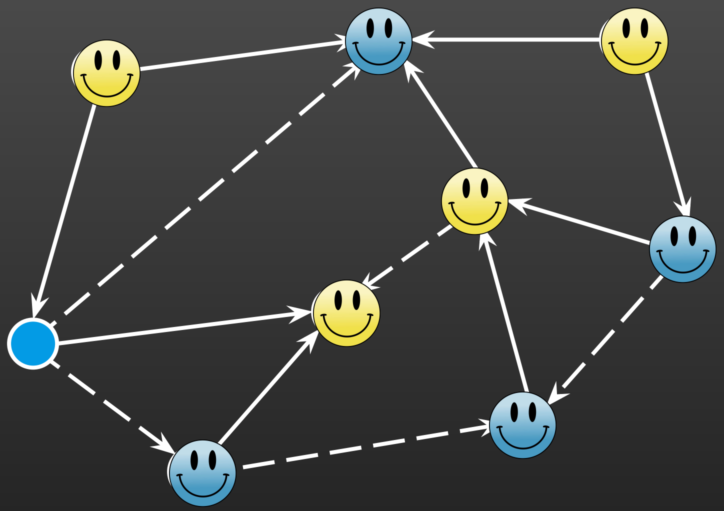
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.

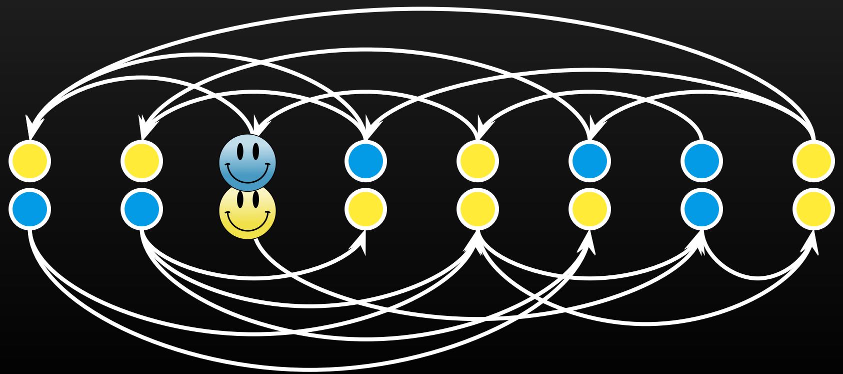


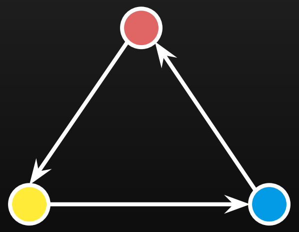




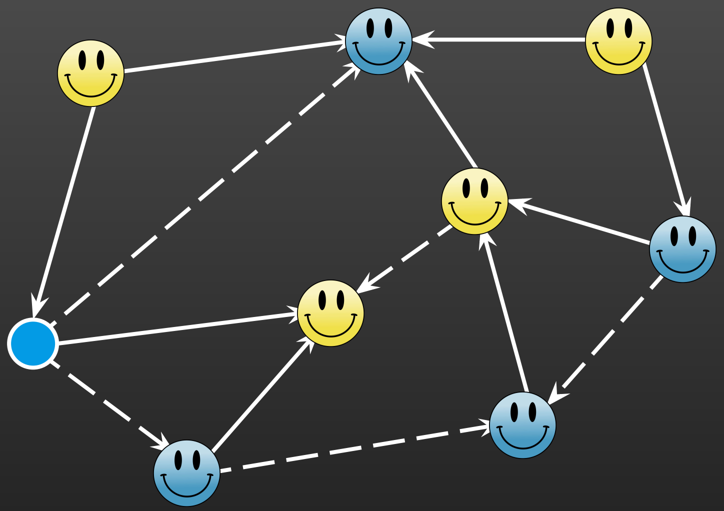
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.

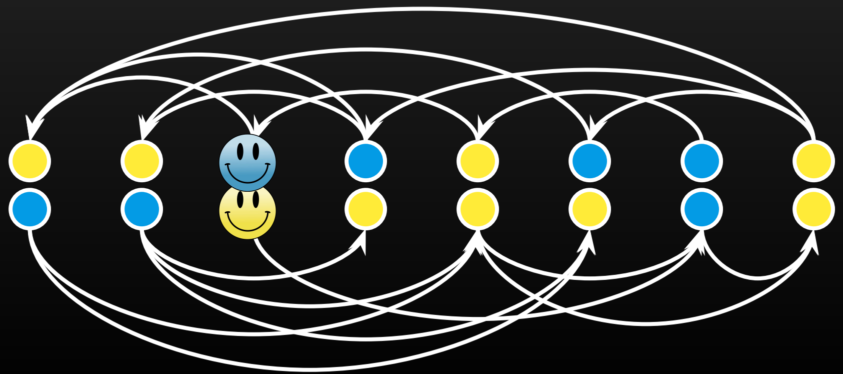


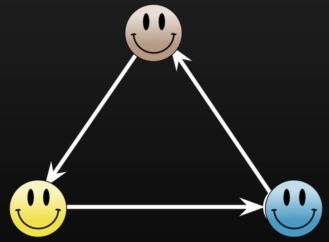




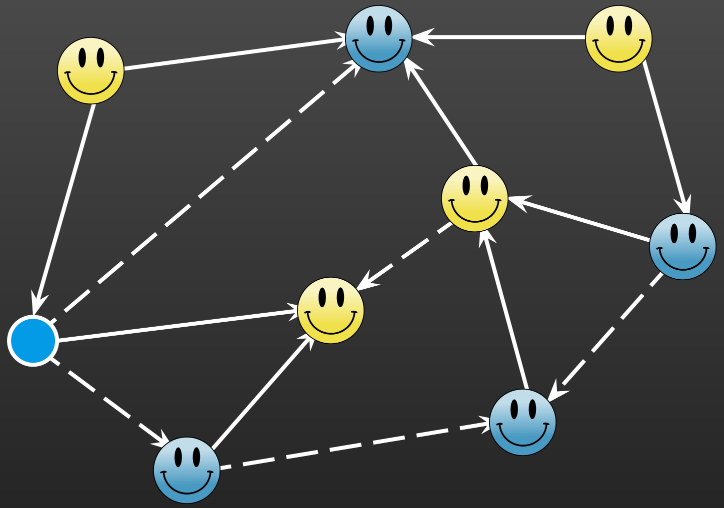
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.



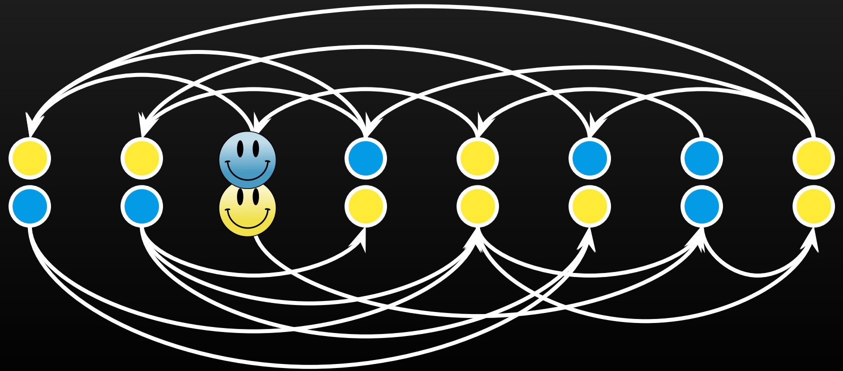


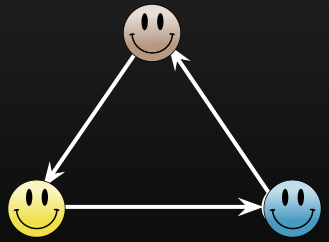


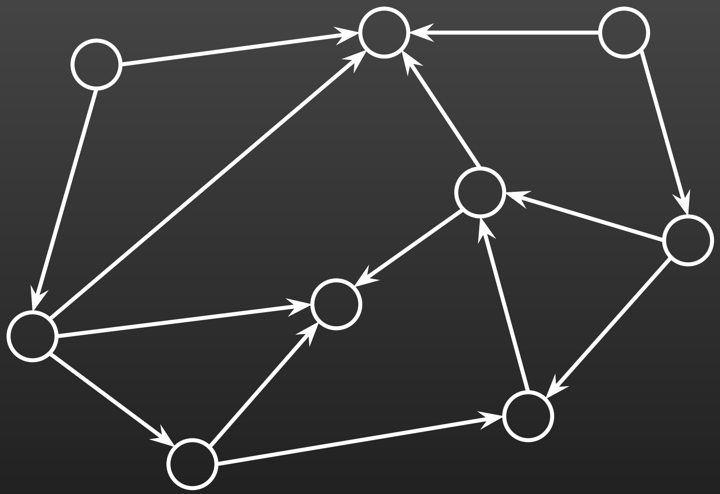
Twierdzenie (Kreutzer, Oum, Seymour, van der Zypen, Wood, 2016): W każdym grafie *skierowanym* (skończonym) można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki przy pmocy *czterech* kolorów.

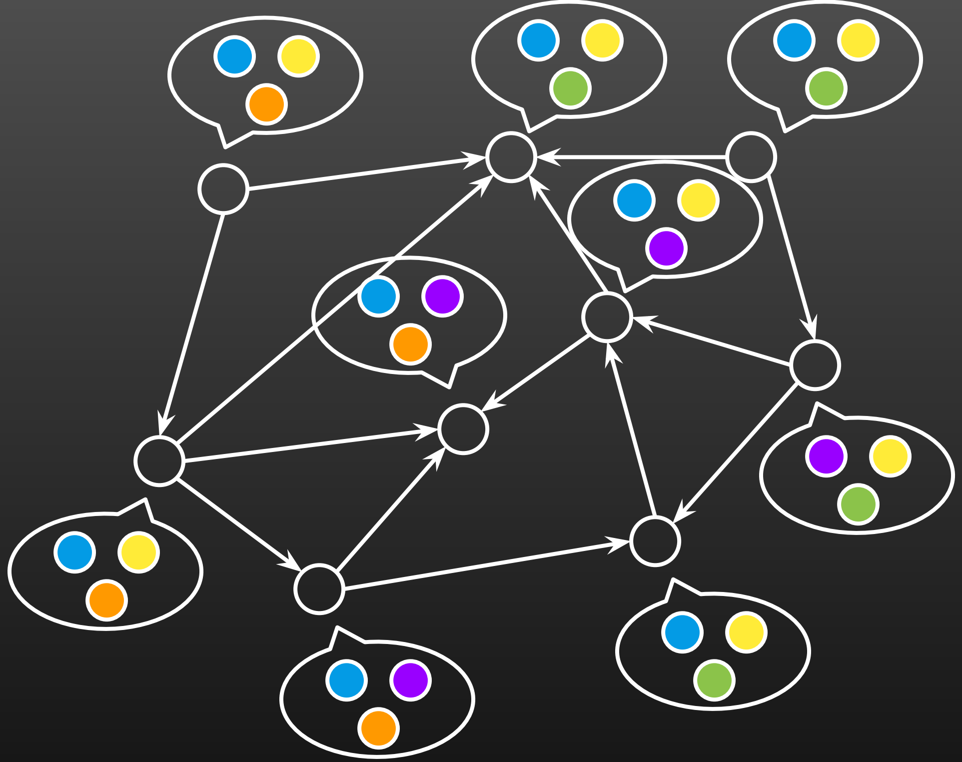


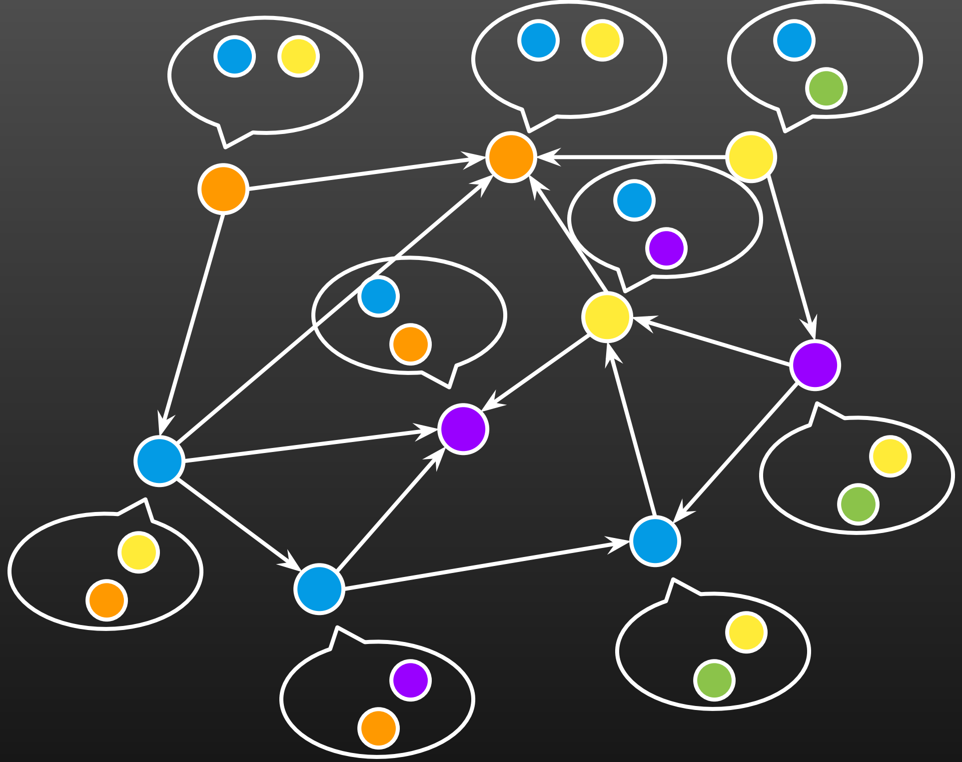
Pytanie: A może jednak wystarczą *trzy* kolory?

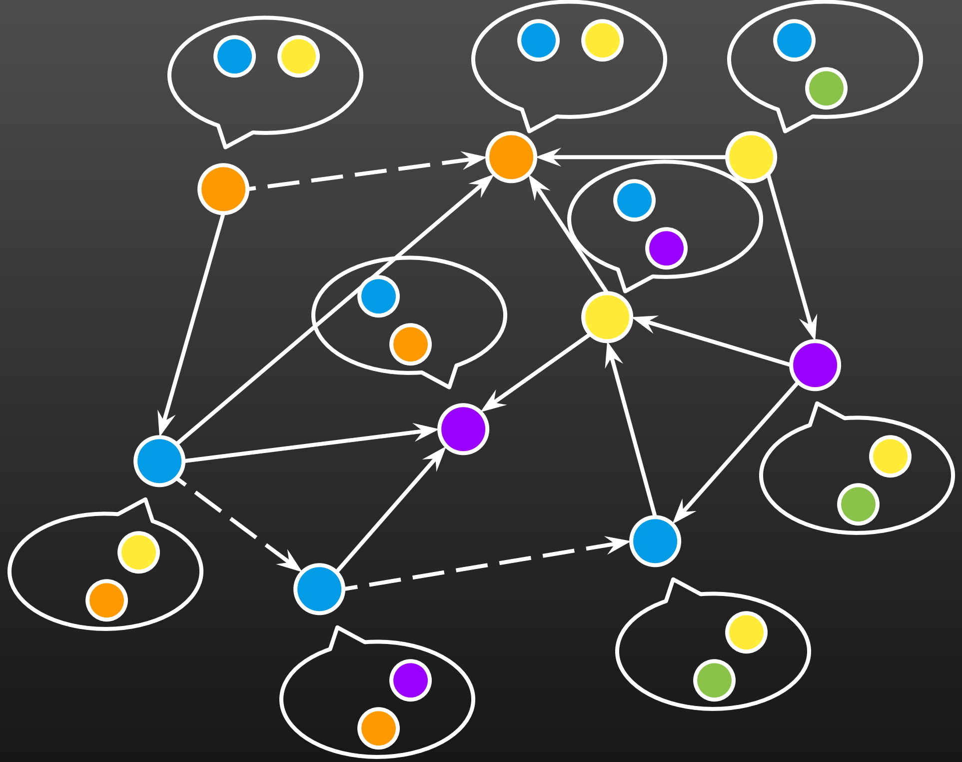


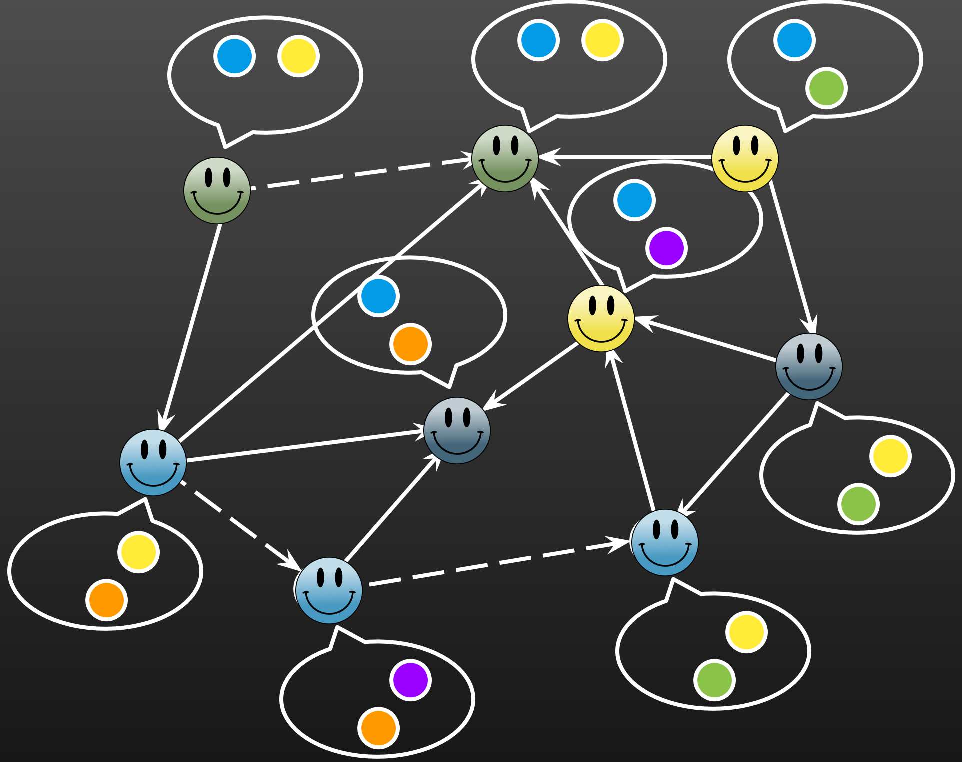




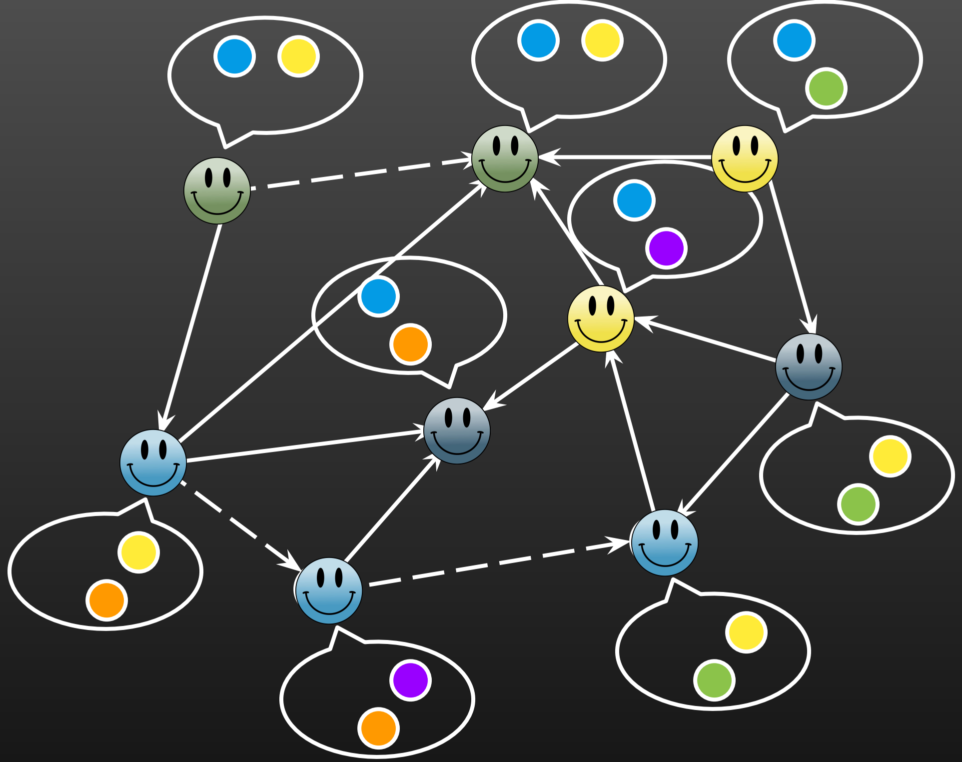








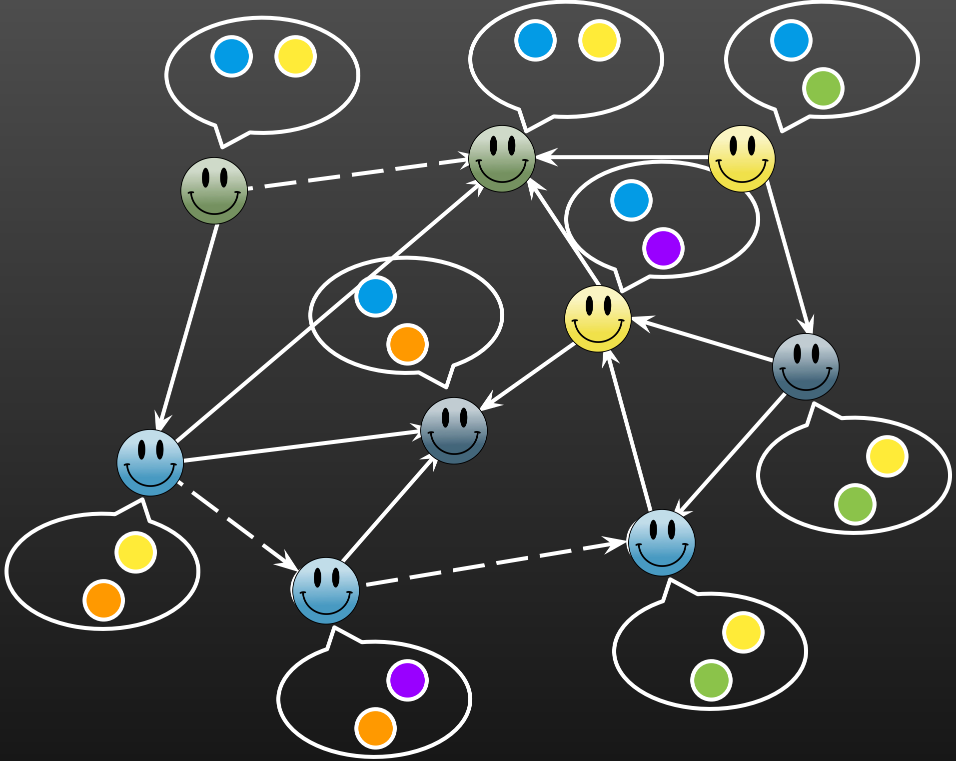
Twierdzenie (Anholcer, Bosek, Grytczuk, 2018): W każdym grafie *skierowanym* można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje *cztery* ulubione kolory.



Twierdzenie (Anholcer, Bosek, Grytczuk, 2018): W każdym grafie *skierowanym* można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje *cztery* ulubione kolory.

Marcin Anholcer

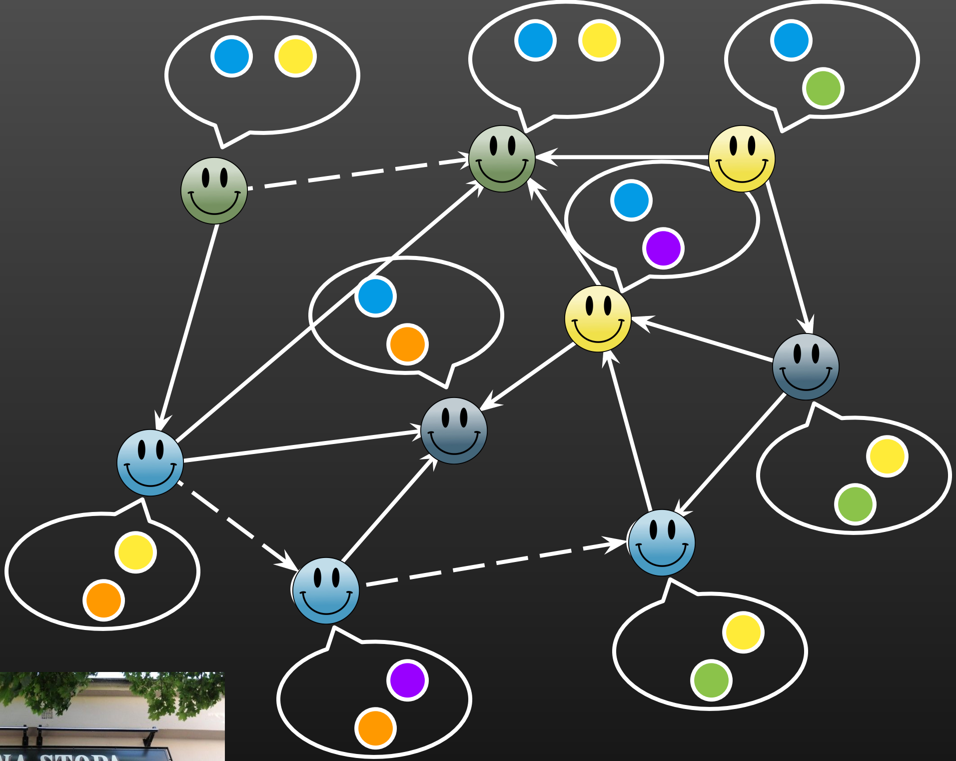
Bartek Bosek



Twierdzenie (Anholcer, Bosek, Grytczuk, 2018): W każdym grafie *skierowanym* można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje *cztery* ulubione kolory.

Marcin Anholcer

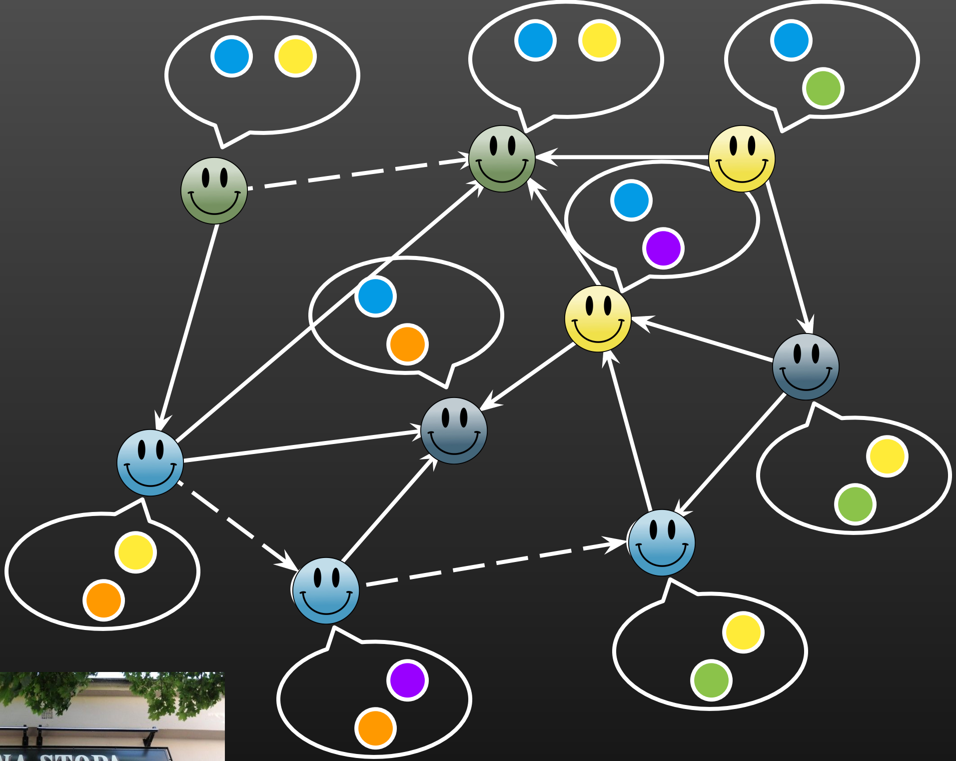
Bartek Bosek



Twierdzenie (Anholcer, Bosek, Grytczuk, 2018): W każdym grafie *skierowanym* można uszczęśliwić wszystkie wierzchołki nawet jeśli każdy ma swoje *cztery* ulubione kolory.

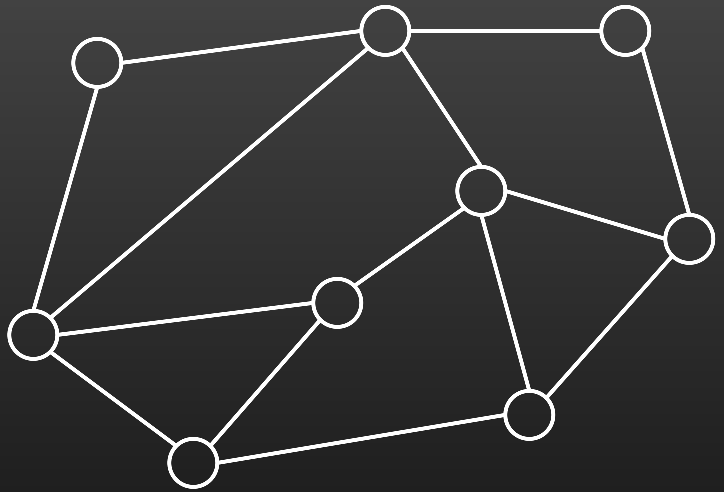
Marcin Anholcer

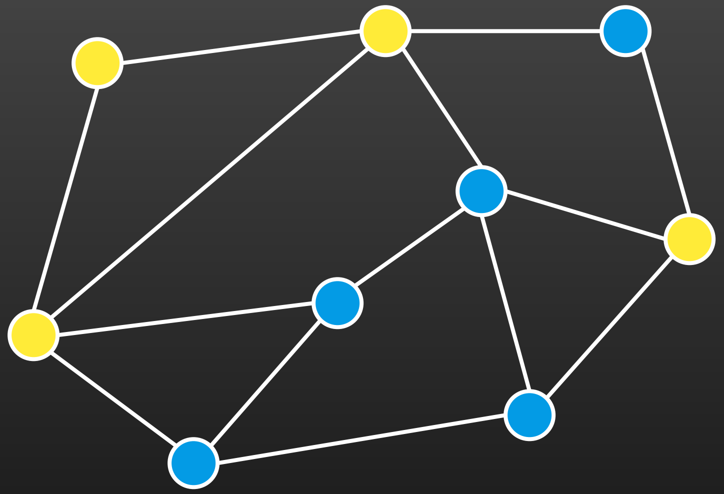
Bartek Bosek

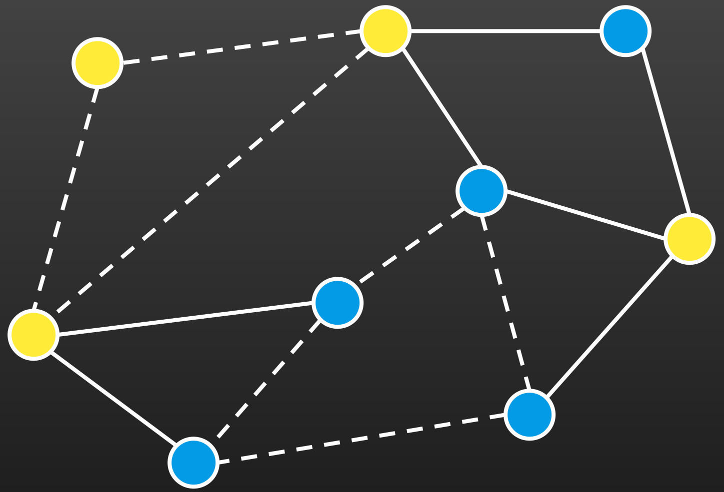


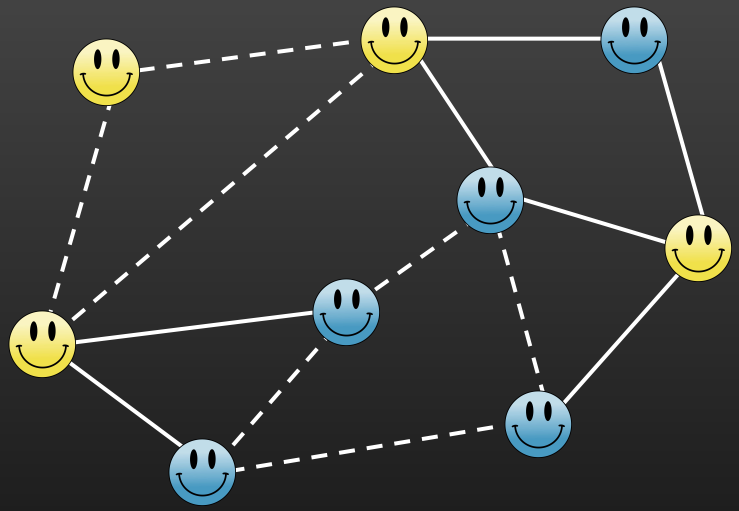
Pytanie: Czy to pozostaje prawdą przy zmniejszeniu liczby ulubionych kolorów do *trzech*?

Misie lubią tylko liczby parzyste i pierwsze





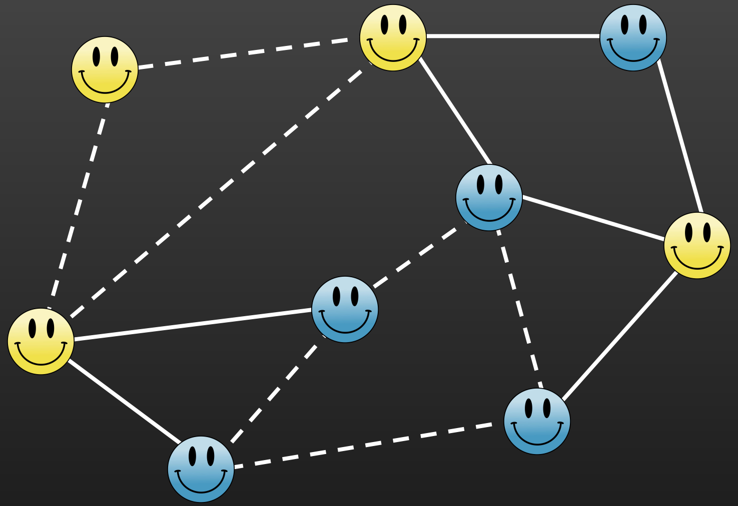




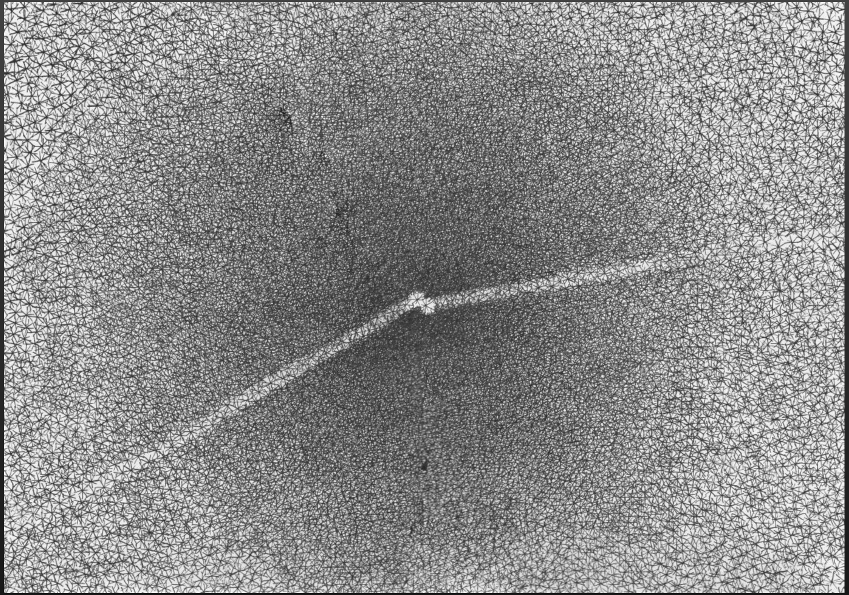
Twierdzenie (Gallai, 1964): Każdy graf ma kolorowanie "*poprawne modulo* 2" przy użyciu tylko dwóch kolorów.

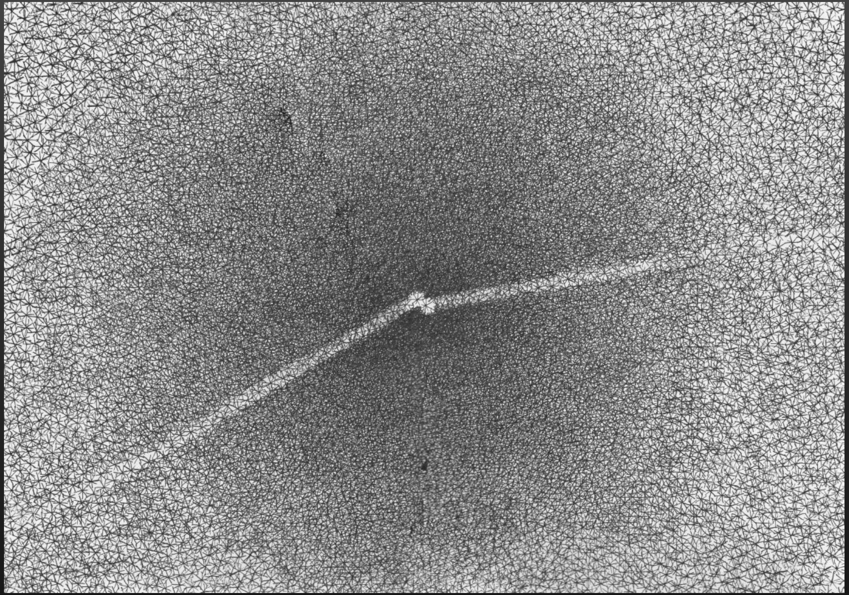
Tibor Gallai

Sam Spiro



Pytanie: Czy dla każdej liczby *pierwszej* p istnieje taka stała K, że każdy graf ma kolorowanie "*poprawne modulo* p" przy użyciu nie więcej niż K kolorów?





Dziękuję

za

uwagę…