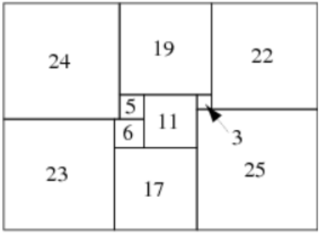
Pokrycia prostokątów przez prostokąty

Jakub Byszewski

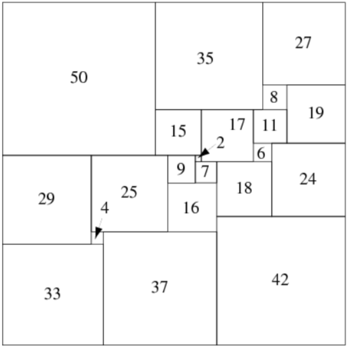
JAGIELLONIAN UNIVERSITY IN KRAKÓW

Siedlce, 24 sierpnia 2024

Pokrycia prostokątów przez kwadraty



10-*square rectangle*



21-*square perfect square*

Rysunki ze strony https://mathworld.wolfram.com/PerfectSquareDissection.html. Drugie pokrycie pochodzi od Duijvestijna (1978)

Pokrycia prostokątów przez kwadraty

Pytanie

Kiedy prostokąt można pokryć kwadratami?

Pokrycia prostokątów przez kwadraty

Pytanie

Kiedy prostokąt można pokryć kwadratami?

Odpowiedź (Dehn, 1903)

Dokładnie wtedy, gdy stosunek długości jego boków jest liczbą wymierną.

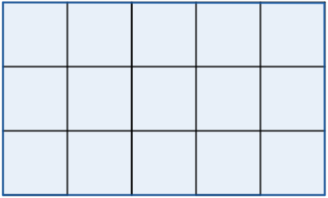
Pokrycia prostokątów przez kwadraty

Pytanie

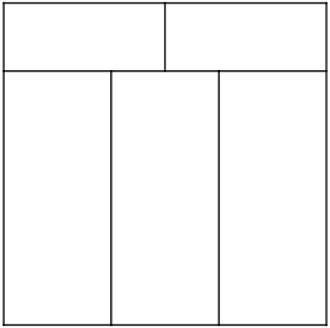
Kiedy prostokąt można pokryć kwadratami?

Odpowiedź (Dehn, 1903)

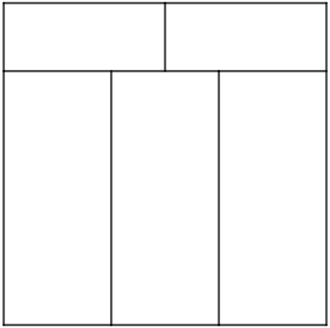
Dokładnie wtedy, gdy stosunek długości jego boków jest liczbą wymierną.



Pokrycia kwadratów przez prostokąty

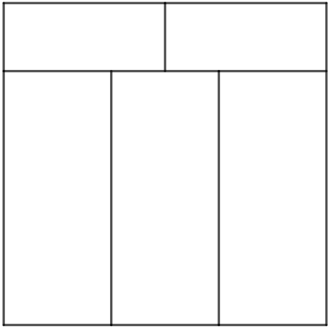


Pokrycia kwadratów przez prostokąty



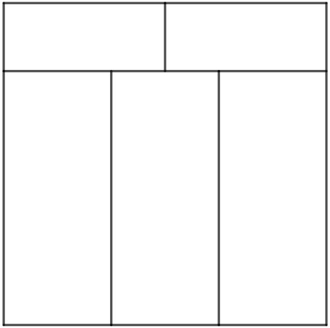
Na powyższym rysunku kwadrat złożono z pięciu podobnych prostokątów. Ich stosunek długości boków to $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Pokrycia kwadratów przez prostokąty



Na powyższym rysunku kwadrat złożono z pięciu podobnych prostokątów. Ich stosunek długości boków to $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.
Okazuje się, że kwadrat można też złożyć z prostokątów o stosunku boków $2+\sqrt{2}$.

Pokrycia kwadratów przez prostokąty



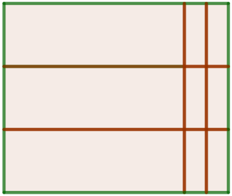
Na powyższym rysunku kwadrat złożono z pięciu podobnych prostokątów. Ich stosunek długości boków to $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.
Okazuje się, że kwadrat można też złożyć z prostokątów o stosunku boków $2 + \sqrt{2}$.
Ale dla $1 + \sqrt{2}$ się nie da!

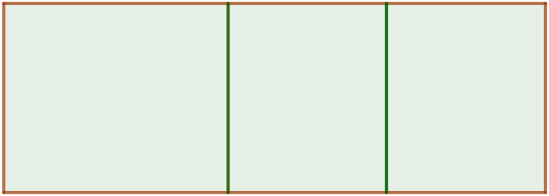
Wzajemne pokrycia prostokątów przez prostokąty

A czy może być tak, że z prostokątów jednego kształtu składamy prostokąt drugiego kształtu, a z prostokątów drugiego kształtu – prostokąt pierwszego kształtu?

Wzajemne pokrycia prostokątów przez prostokąty

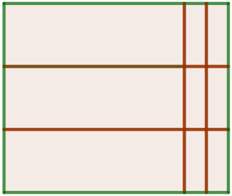
A czy może być tak, że z prostokątów jednego kształtu składamy prostokąt drugiego kształtu, a z prostokątów drugiego kształtu – prostokąt pierwszego kształtu?

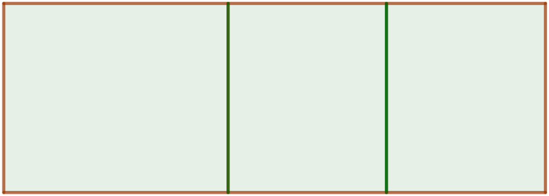




Wzajemne pokrycia prostokątów przez prostokąty

A czy może być tak, że z prostokątów jednego kształtu składamy prostokąt drugiego kształtu, a z prostokątów drugiego kształtu – prostokąt pierwszego kształtu?





Na powyższym rysunku zielony prostokąt można pokryć różowymi prostokątami, a różowy – zielonymi. Jakie są ich stosunki boków?

Wzajemne pokrycia prostokątów przez prostokąty

A czy może być tak, że z prostokątów jednego kształtu składamy prostokąt drugiego kształtu, a z prostokątów drugiego kształtu – prostokąt pierwszego kształtu?

Na powyższym rysunku zielony prostokąt można pokryć różowymi prostokątami, a różowy – zielonymi. Jakie są ich stosunki boków? Różowy prostokąt ma stosunek boków α, a zielony β. Podział opiera się na zależnościach

$$\alpha = \frac{\beta}{3} + \frac{2}{3\beta}, \qquad \beta = \alpha + \frac{2}{\alpha}.$$

Laczkovich–Szekeres, Freiling–Rinne, 1994

Pytanie

Z jakich prostokątów można złożyć kwadrat?

Laczkovich–Szekeres, Freiling–Rinne, 1994

Pytanie

Z jakich prostokątów można złożyć kwadrat?

Twierdzenie

Dla dowolnego $\alpha > 0$ następujące warunki są równoważne:

1. Kwadrat można pokryć prostokątami o stosunku boków α.

Laczkovich–Szekeres, Freiling–Rinne, 1994

Pytanie

Z jakich prostokątów można złożyć kwadrat?

Twierdzenie

Dla dowolnego $\alpha > 0$ następujące warunki są równoważne:

1. Kwadrat można pokryć prostokątami o stosunku boków α.
2. Liczba α jest liczbą algebraiczną, której wszystkie sprzężenia mają dodatnią część rzeczywistą.

Laczkovich–Szekeres, Freiling–Rinne, 1994

Pytanie

Z jakich prostokątów można złożyć kwadrat?

Twierdzenie

Dla dowolnego $\alpha > 0$ następujące warunki są równoważne:

1. Kwadrat można pokryć prostokątami o stosunku boków α.
2. Liczba α jest liczbą algebraiczną, której wszystkie sprzężenia mają dodatnią część rzeczywistą.
3. Istnieją takie liczby wymierne $a_0, \ldots, a_m > 0$, że

$$a_0\alpha + \cfrac{1}{a_1\alpha + \cfrac{1}{a_2\alpha + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_m\alpha}}}} = 1$$

Twierdzenie FLRS: Implikacja 3 $\to$ 1

Dla $\alpha > 0$ rozpatrzymy zbiór $X(\alpha)$ takich $\beta > 0$, że prostokąt o stosunku długości poziomego do pionowego boku β można pokryć prostokątami o stosunku boków α.

Twierdzenie FLRS: Implikacja $3 \longrightarrow 1$

Dla $\alpha > 0$ rozpatrzymy zbiór $X(\alpha)$ takich $\beta > 0$, że prostokąt o stosunku długości poziomego do pionowego boku β można pokryć prostokątami o stosunku boków α.
Wówczas:

1. $\beta_1, \beta_2 \in S \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 \in S$,
2. $\beta \in S \Rightarrow 1/\beta \in S$,
3. $\beta \in S \Rightarrow a\beta \in S$ dla $a \in \mathbb{Q}$.

Liczby algebraiczne

Liczbę rzeczywistą x nazywamy *algebraiczną*, jeśli spełnia równanie wielomianowe

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

o współczynnikach wymiernych. Stopień liczby algebraicznej to najniższy stopień równania, które spełnia.

Liczby algebraiczne

Liczbę rzeczywistą x nazywamy *algebraiczną*, jeśli spełnia równanie wielomianowe

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

o współczynnikach wymiernych. Stopień liczby algebraicznej to najniższy stopień równania, które spełnia.
Przykłady liczb algebraicznych to

$$7, \quad 5/2, \quad \sqrt{6}, \quad \sqrt{2}+\sqrt{3}, \quad \frac{2+\sqrt[3]{7}}{\sqrt{13}}.$$

Liczby algebraiczne

Liczbę rzeczywistą x nazywamy *algebraiczną*, jeśli spełnia równanie wielomianowe

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

o współczynnikach wymiernych. Stopień liczby algebraicznej to najniższy stopień równania, które spełnia.
Przykłady liczb algebraicznych to

$$7, \quad 5/2, \quad \sqrt{6}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad \frac{2 + \sqrt[3]{7}}{\sqrt{13}}.$$

Przykłady liczb *przestępnych* (nie-algebraicznych) to

$$\pi, \quad e, \quad \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{10^{n!}} = 0,110001000000000000000001 0 \cdots .$$

Sprzężone liczby algebraiczne

Liczby algebraiczne nazywamy sprzężonymi, jeśli spełniają te same równania o współczynnikach wymiernych.

Liczby $a + b\sqrt{2}$ oraz $a - b\sqrt{2}$, gdzie a i b to liczby wymierne, są sprzężone. Obie spełniają równanie

$$x^2 - 2ax + (a^2 - 2b^2) = 0.$$

Liczba algebraiczna stopnia n ma dokładnie n sprzężeń.

Sprzężone liczby algebraiczne

Liczby algebraiczne nazywamy sprzężonymi, jeśli spełniają te same równania o współczynnikach wymiernych.

Liczby $a + b\sqrt{2}$ oraz $a - b\sqrt{2}$, gdzie a i b to liczby wymierne, są sprzężone. Obie spełniają równanie

$$x^2 - 2ax + (a^2 - 2b^2) = 0.$$

Liczba algebraiczna stopnia n ma dokładnie n sprzężeń.

Uwaga! Sprzężenia te mogą być zespolone. Liczby zespolone są postaci $a + b\sqrt{-1}$, gdzie a, b to liczby rzeczywiste.

Sprzężone liczby algebraiczne

Liczby algebraiczne nazywamy sprzężonymi, jeśli spełniają te same równania o współczynnikach wymiernych.

Liczby $a + b\sqrt{2}$ oraz $a - b\sqrt{2}$, gdzie a i b to liczby wymierne, są sprzężone. Obie spełniają równanie

$$x^2 - 2ax + (a^2 - 2b^2) = 0.$$

Liczba algebraiczna stopnia n ma dokładnie n sprzężeń.

Uwaga! Sprzężenia te mogą być zespolone. Liczby zespolone są postaci $a + b\sqrt{-1}$, gdzie a, b to liczby rzeczywiste.

Liczba $\sqrt[3]{2}$ jest sprzężona z liczbami $\frac{1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{2}$ i $\frac{1-\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{2}$.

A co z dowolnymi prostokątami?

Twierdzenie (Freiling–Laczkovich–Rinne, 1997)

Dla dowolnych $\alpha, \beta > 0$ następujące warunki są równoważne:

1. Prostokąt o stusunku boków β można pokryć prostokątami o stosunku boków α, to znaczy $\beta \in X(\alpha)$.
2. Istnieją takie liczby wymierne $a_0 \geqslant 0$, $a_1, \ldots, a_m > 0$, że

$$\beta = a_0\alpha + \cfrac{1}{a_1\alpha + \cfrac{1}{a_2\alpha + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_m\alpha}}}}$$

Dodatnie funkcje wymierne

Funkcję wymierną g o współczynnikach rzeczywistych nazywamy dodatnią, jeśli jest postaci

$$g = a_0X + \cfrac{1}{a_1X + \cfrac{1}{a_2X + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_mX}}}}$$

dla pewnych liczb **rzeczywistych** $a_0 \geqslant 0$ i $a_1, \ldots, a_m > 0$.

Dodatnie funkcje wymierne

Funkcję wymierną g o współczynnikach rzeczywistych nazywamy dodatnią, jeśli jest postaci

$$g = a_0X + \cfrac{1}{a_1X + \cfrac{1}{a_2X + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_mX}}}}$$

dla pewnych liczb **rzeczywistych** $a_0 \geqslant 0$ i $a_1, \ldots, a_m > 0$.

Stwierdzenie

Funkcja wymierna g jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy przekształca prawą półpłaszczyznę zespoloną w siebie i lewą półpłaszczyznę zespoloną w siebie.

Dodatnie funkcje wymierne

Funkcję wymierną g o współczynnikach rzeczywistych nazywamy dodatnią, jeśli jest postaci

$$g = a_0X + \cfrac{1}{a_1X + \cfrac{1}{a_2X + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_mX}}}}$$

dla pewnych liczb **rzeczywistych** $a_0 \geqslant 0$ i $a_1, \ldots, a_m > 0$.

Stwierdzenie

Funkcja wymierna g jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy przekształca prawą półpłaszczyznę zespoloną w siebie i lewą półpłaszczyznę zespoloną w siebie.

$$X(\alpha) = \{g(\alpha) \mid g \text{ jest dodatnią funkcją wymierną o wsp. } \textbf{wymiernych}\}.$$

Zanurzenia ciała liczbowego w przestrzeń euklidesową

Oznaczmy wszystkie sprzężenia liczby algebraicznej α przez $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ (sprzężenia rzeczywiste) oraz $\alpha_{r+1}, \overline{\alpha_{r+1}}, \ldots, \alpha_{r+s}, \overline{\alpha_{r+s}}$ (sprzężenia zespolone).

Zanurzenia ciała liczbowego w przestrzeń euklidesową

Oznaczmy wszystkie sprzężenia liczby algebraicznej α przez $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ (sprzężenia rzeczywiste) oraz $\alpha_{r+1}, \overline{\alpha_{r+1}}, \ldots, \alpha_{r+s}, \overline{\alpha_{r+s}}$ (sprzężenia zespolone).
Niech $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r+s} \colon K \to \mathbb{C}$ będą zanurzeniami zdefiniowanymi przez $\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$. Rozważmy

$$\begin{aligned} \varphi \colon K &\to \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s \\ x &\mapsto (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_{r+s}(x)). \end{aligned}$$

Zanurzenia ciała liczbowego w przestrzeń euklidesową

Oznaczmy wszystkie sprzężenia liczby algebraicznej α przez $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ (sprzężenia rzeczywiste) oraz $\alpha_{r+1}, \overline{\alpha_{r+1}}, \ldots, \alpha_{r+s}, \overline{\alpha_{r+s}}$ (sprzężenia zespolone).
Niech $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r+s} \colon K \to \mathbb{C}$ będą zanurzeniami zdefiniowanymi przez $\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$. Rozważmy

$$\begin{aligned} \varphi \colon K &\to \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s \\ x &\mapsto (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_{r+s}(x)). \end{aligned}$$

1. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\varphi \colon K \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(a + b\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2}, a - b\sqrt{2}).$$

Zanurzenia ciała liczbowego w przestrzeń euklidesową

Oznaczmy wszystkie sprzężenia liczby algebraicznej α przez $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ (sprzężenia rzeczywiste) oraz $\alpha_{r+1}, \overline{\alpha_{r+1}}, \ldots, \alpha_{r+s}, \overline{\alpha_{r+s}}$ (sprzężenia zespolone).
Niech $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r+s} \colon K \to \mathbb{C}$ będą zanurzeniami zdefiniowanymi przez $\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$. Rozważmy

$$\begin{aligned} \varphi \colon K &\to \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s \\ x &\mapsto (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_{r+s}(x)). \end{aligned}$$

1. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\varphi \colon K \to \mathbb{R}^2$,
$$\varphi(a + b\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2}, a - b\sqrt{2}).$$

2. $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\varphi \colon K \to \mathbb{R} \times \mathbb{C}$,
$$\varphi(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) = (a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}, a + be^{2i\pi/3}\sqrt[3]{2} + ce^{4i\pi/3}\sqrt[3]{4}).$$

Stożki odwracalne

Dla $\varphi\colon K \to V = \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ oznaczamy $\varphi(\alpha)$ przez p.

Stożki odwracalne

Dla $\varphi\colon K \to V = \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ oznaczamy $\varphi(\alpha)$ przez p.
Oznaczmy przez $Y(p)$ najmniejszy podzbiór V zawiejący punkt p i zamknięty na:

- dodawanie;
- mnożenie przez dodatnie skalary
- odwracanie *po współrzędnych*

Stożki odwracalne

Dla $\varphi \colon K \to V = \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ oznaczamy $\varphi(\alpha)$ przez p.
Oznaczmy przez $Y(p)$ najmniejszy podzbiór V zawiejący punkt p i zamknięty na:

- dodawanie;
- mnożenie przez dodatnie skalary
- odwracanie *po współrzędnych*

Wówczas

$$\varphi(X(\alpha)) \subset Y(p).$$

Stożki odwracalne

Dla $\varphi\colon K \to V = \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ oznaczamy $\varphi(\alpha)$ przez p.
Oznaczmy przez $Y(p)$ najmniejszy podzbiór V zawiejący punkt p i zamknięty na:

- dodawanie;
- mnożenie przez dodatnie skalary
- odwracanie *po współrzędnych*

Wówczas

$$\varphi(X(\alpha)) \subset Y(p).$$

Mamy bezpośredni opis

$$Y(p) = \{g(p) \mid g \text{ jest dodatnią funkcją wymierną}\},$$

gdzie dla $p = (p_1, \ldots, p_{r+s})$ wyrażenie $g(p)$ oznacza

$$g(p) = (g(p_1), \ldots, g(p_{r+s})).$$

Stożki odwracalne

Dla $\varphi \colon K \to V = \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ oznaczamy $\varphi(\alpha)$ przez p.

Stożki odwracalne

Dla $\varphi \colon K \to V = \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ oznaczamy $\varphi(\alpha)$ przez p.
Oznaczmy przez $Y(p)$ najmniejszy podzbiór V zawiejący punkt p i zamknięty na:

- dodawanie;
- mnożenie przez dodatnie skalary
- odwracanie *po współrzędnych*

Stożki odwracalne

Dla $\varphi\colon K \to V = \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ oznaczamy $\varphi(\alpha)$ przez p.
Oznaczmy przez $Y(p)$ najmniejszy podzbiór V zawiejący punkt p i zamknięty na:

- dodawanie;
- mnożenie przez dodatnie skalary
- odwracanie *po współrzędnych*

Wówczas

$$\varphi(X(\alpha)) \subset Y(p).$$

Stożki odwracalne

Dla $\varphi\colon K \to V = \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ oznaczamy $\varphi(\alpha)$ przez p.
Oznaczmy przez $Y(p)$ najmniejszy podzbiór V zawiejący punkt p i zamknięty na:

- dodawanie;
- mnożenie przez dodatnie skalary
- odwracanie *po współrzędnych*

Wówczas

$$\varphi(X(\alpha)) \subset Y(p).$$

Mamy bezpośredni opis

$$Y(p) = \{g(p) \mid g \text{ jest dodatnią funkcją wymierną}\},$$

gdzie dla $p = (p_1, \dots, p_{r+s})$ wyrażenie $g(p)$ oznacza

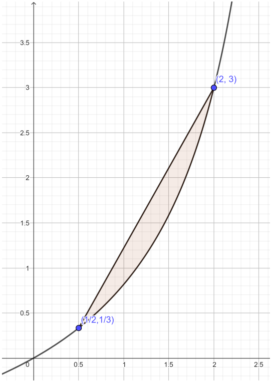
$$g(p) = (g(p_1), \dots, g(p_{r+s})).$$

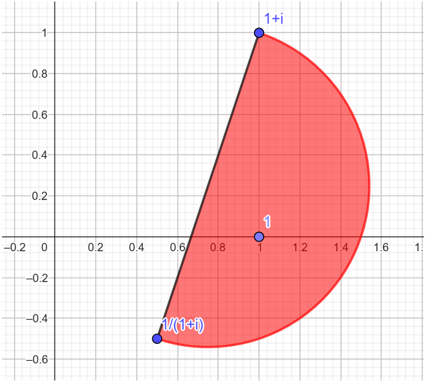
Odwracalne otoczki wypukłe

Aby zrozumieć stożki odwracalne $Y(p)$ najlepiej przeciąć je z płaszczyzną H wyznaczoną równaniem $x_1 = 1$. Niech $\tilde{p}$ oznacza punkt przeciecią prostej $0p$ z tą płaszczyzną. Wówczas $Y(p) \cap H$ to najmniejszy zbiór **wypukły** zawierający $\tilde{p}$ i domknięty na odwracanie. Jak one wyglądają?

Odwracalne otoczki wypukłe

Aby zrozumieć stożki odwracalne $Y(p)$ najlepiej przeciąć je z płaszczyzną H wyznaczoną równaniem $x_1 = 1$. Niech $\tilde{p}$ oznacza punkt przeciecią prostej $0p$ z tą płaszczyzną. Wówczas $Y(p) \cap H$ to najmniejszy zbiór **wypukły** zawierający $\tilde{p}$ i domknięty na odwracanie. Jak one wyglądają?





Stożki odwracalne

Poprzez analizę geometrii stożków wypukłych

$$Y(p) = \{g(p) \mid g \text{ jest dodatnią funkcją wymierną}\}$$

można wykazać, że punkty na brzegu mają reprezentację przez dokładnie jedną dodatnią funkcję wymierną g, a punkty we wnętrzu – przez nieskończenie wiele, ale dokładnie dwie minimalnej „wysokości". Ponadto pewien punkt postaci $(\pm 1, \ldots, \pm 1)$ zawsze leży we wnętrzu tego zbioru. Pojęcia wnętrza i brzegu w sytuacjach zdegenerowanych należy rozumieć względem przestrzeni liniowej rozpiętej przez te stożki.

Jak przestać oszukiwać?!

Na poprzednich slajdach oszukiwałem. A gdzie?

Jak przestać oszukiwać?!

Na poprzednich slajdach oszukiwałem. A gdzie?
Problemem jest dzielenie przez zero. Czy mamy gwarancję, że w konstrukcji stożka $Y(p)$ nie pojawią się na współrzędnych zera?

Jak przestać oszukiwać?!

Na poprzednich slajdach oszukiwałem. A gdzie?
Problemem jest dzielenie przez zero. Czy mamy gwarancję, że w konstrukcji stożka $Y(p)$ nie pojawią się na współrzędnych zera?
Problem pojawia się tylko wtedy, gdy α posiada sprzężenia na osi urojonej.

Jak przestać oszukiwać?!

Na poprzednich slajdach oszukiwałem. A gdzie?
Problemem jest dzielenie przez zero. Czy mamy gwarancję, że w konstrukcji stożka $Y(p)$ nie pojawią się na współrzędnych zera?
Problem pojawia się tylko wtedy, gdy α posiada sprzężenia na osi urojonej.
To ma miejsce dla $\alpha = \sqrt[4]{2}$, które ma sprzężenia $\pm\sqrt[4]{2}$, $\pm i\sqrt[4]{2}$.

Jak przestać oszukiwać?!

Na poprzednich slajdach oszukiwałem. A gdzie?
Problemem jest dzielenie przez zero. Czy mamy gwarancję, że w konstrukcji stożka $Y(p)$ nie pojawią się na współrzędnych zera?
Problem pojawia się tylko wtedy, gdy α posiada sprzężenia na osi urojonej.
To ma miejsce dla $\alpha = \sqrt[4]{2}$, które ma sprzężenia $\pm\sqrt[4]{2}$, $\pm i\sqrt[4]{2}$.
Zmodyfikujmy definicję φ pomijając te współrzędne dla których odpowiednie sprzężenie α leży na osi urojonej. Otrzymujemy

$$\varphi' \colon K \to \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^{s'}, \qquad p' = \varphi'(\alpha).$$

Geometryczny opis zbiorów $X(\alpha)$

Twierdzenie (Baran, B.)

Niech β będzie elementem $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Przy powyższych oznaczeniach następujące warunki są równoważne:

1. $\beta \in X(\alpha)$, czyli prostokąt $1 \times \beta$ można złożyć z prostokątów o stosunku boków α.
2. $\varphi'(\beta)$ leży w stożku $Y(p')$; ponadto, jeśli punkt ten leży na brzegu tego stożka, żądamy, by **jedyna** dodatnia funkcja wymierna g spełniająca $\varphi'(\beta) = g(p')$ miała współczynniki wymierne.

Geometryczny opis zbiorów $X(\alpha)$

Twierdzenie (Baran, B.)

Niech β będzie elementem $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Przy powyższych oznaczeniach następujące warunki są równoważne:

1. $\beta \in X(\alpha)$, czyli prostokąt $1 \times \beta$ można złożyć z prostokątów o stosunku boków α.
2. $\varphi'(\beta)$ leży w stożku $Y(p')$; ponadto, jeśli punkt ten leży na brzegu tego stożka, żądamy, by **jedyna** dodatnia funkcja wymierna g spełniająca $\varphi'(\beta) = g(p')$ miała współczynniki wymierne.

Ponadto $\varphi'(X(\alpha))$ jest gęste w $Y(p')$.

Prostokąty, które można złożyć z siebie nawzajem

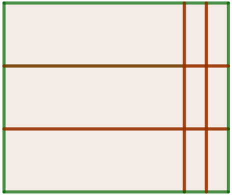
Dla jakich α, β prostokąty o długości boków α, β można złożyć z siebie nawzajem?

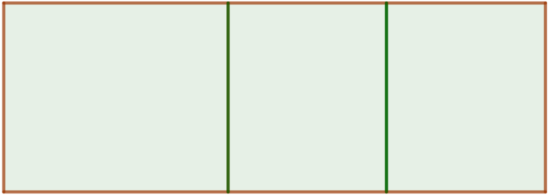
Prostokąty, które można złożyć z siebie nawzajem

Dla jakich α, β prostokąty o długości boków α, β można złożyć z siebie nawzajem?
Trywialny przypadek to taki, w którym α jest wymierną wielokrotnością β lub $1/\beta$.

Prostokąty, które można złożyć z siebie nawzajem

Dla jakich α, β prostokąty o długości boków α, β można złożyć z siebie nawzajem?
Trywialny przypadek to taki, w którym α jest wymierną wielokrotnością β lub $1/\beta$.
Ale przykład:





miał stosunki boków długości $\alpha = \sqrt[4]{2}$ oraz $\beta = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8}$.

Prostokąty, które można złożyć z siebie nawzajem

Twierdzenie (Baran, B.)

Niech $\alpha, \beta > 0$ będą liczbami rzeczywistymi. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. Prostokąty o stosunkach boków α i β można złożyć z siebie nazwajem
2. Zachodzi jeden z następujących warunków:
   - β jest wymierną wielokrotnością α.
   - β jest wymierną wielokrotnością $1/\alpha$.
   - α i β są liczbami algebraicznymi, α jest sprzężone z $-\alpha$, ale wszystkie pozostałe sprzężenia α leżą na osi urojonej, a β/α należy do $\mathbb{Q}(\alpha^2)$.

Pokrycia kwadratu kilkoma prostokątami

Twierdzenie (Baran, B.)

Jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ są liczbami algebraicznymi, to kwadrat można pokryć prostokątami o stosunkach boków $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego automorfizmu σ ciała liczb zespolonych co najmniej jedna z liczb $\sigma(\alpha_i)$ ma dodatnią część rzeczywistą.

Dowód jednej z implikacji

Niech $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie automorfizmem ciała liczb zespolonych. Definiujemy „pole" prostokąta $a \times b$ jako $\sigma(a)\overline{\sigma(b)}$. Tak zdefiniowane pole jest skończenie addytywne dla pokryć prostokątów przez prostokąty. Prostokąt o rozmiarze $r\alpha_i \times r$ ma pole

$$|\sigma(r)|^2\sigma(\alpha_i).$$

Prostokąt o rozmiarze $r \times r\alpha_i$ ma pole

$$|\sigma(r)|^2\overline{\sigma(\alpha_i)},$$

a zatem jeśli wszystkie $\sigma(\alpha_i)$ mają niedodatnią część rzeczywistą, to pole każdego małego prostokąta też. Ale pole kwadratu to 1!

Pokrycia trójkatami

A co z pokryciami trójkątami?

Pokrycia trójkatami

A co z pokryciami trójkątami?

Pytanie L. Pósy

Czy kwadrat można pokryć trójkątami o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$?

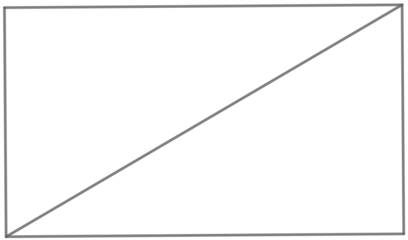
Pokrycia trójkatami

A co z pokryciami trójkątami?

Pytanie L. Pósy

Czy kwadrat można pokryć trójkątami o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$?

Można by dwa takie trójkąty złożyć ze sobą dostając prostokąt.



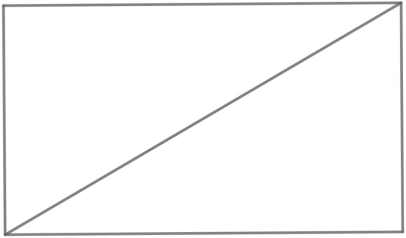
Jaki stosunek boków ma taki prostokąt? Czy takim prostokątem da się pokryć kwadrat?

A co z pokryciami trójkątami?

Pytanie L. Pósy

Czy kwadrat można pokryć trójkątami o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$?

Można by dwa takie trójkąty złożyć ze sobą dostając prostokąt.



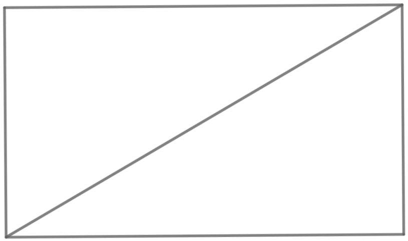
Jaki stosunek boków ma taki prostokąt? Czy takim prostokątem da się pokryć kwadrat? A może da się inaczej?

A co z pokryciami trójkątami?

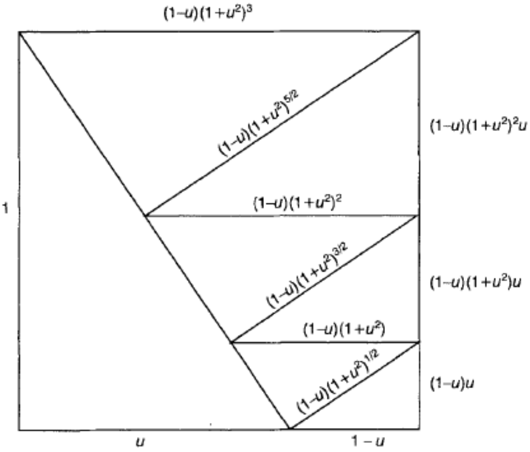
Pytanie L. Pósy

Czy kwadrat można pokryć trójkątami o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$?

Można by dwa takie trójkąty złożyć ze sobą dostając prostokąt.



Jaki stosunek boków ma taki prostokąt? Czy takim prostokątem da się pokryć kwadrat? A może da się inaczej?



We claim that the figure is correct, that is $(1-u)(1+u^2)^3 = 1$. Indeed, we have $[1-(1-u)(1+u^2)^3]/u = u^6 - u^5 + 3u^4 - 3u^3 + 3u^2 - 3u + 1 = (u^3 + u - 1) \times (u^3 - u^2 + 2u - 1) = 0$.

Rysunek z pracy Laczkovicha *„Tilings of the square with similar rectangles"*.

Pokrycia trójkatami

Laczkovich (1990): Trójkątem o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ nie da się pokryć kwadratu!

Pokrycia trójkatami

Laczkovich (1990): Trójkątem o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ nie da się pokryć kwadratu!

Twierdzenie Laczkovicha–Szegedy'ego, 1990, 2001

Kwadrat można pokryć trójkątami prostokątnymi o kącie ostrym α wtedy i tylko wtedy, gdy $\tan\alpha$ jest liczbą algebraiczną, której wszystkie rzeczywiste sprzężenia są dodatnie.

Twierdzenie Laczkovicha, 1990

Kwadrat można pokryć trójkątami podobnymi do ustalonego trójkąta nieprostokątnego wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ten ma następujące kąty: $(120^\circ, 45^\circ, 15^\circ)$, $(112{,}5^\circ, 45^\circ, 22{,}5^\circ)$ lub $(75^\circ, 60^\circ, 45^\circ)$.

Pokrycia trójkatami

Twierdzenie Laczkovicha, 1990

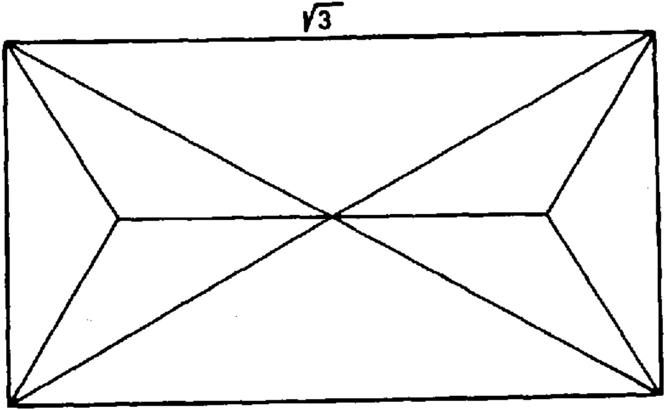
Kwadrat można pokryć trójkątami podobnymi do ustalonego trójkąta nieprostokątnego wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ten ma następujące kąty: $(120^\circ, 45^\circ, 15^\circ)$, $(112{,}5^\circ, 45^\circ, 22{,}5^\circ)$ lub $(75^\circ, 60^\circ, 45^\circ)$.

Twierdzenie Laczkovicha, 1990

Prostokąt można pokryć trójkątami podobnymi do ustalonego trójkąta nieprostokątnego wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ten ma następujące kąty: $(120^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$, $(120^\circ, 45^\circ, 15^\circ)$, $(112{,}5^\circ, 45^\circ, 22{,}5^\circ)$ lub $(75^\circ, 60^\circ, 45^\circ)$.

Pokrycia trójkatami

Trójkąty o kątach $(120^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$ pokrywają prostokąt $1 \times \sqrt{3}$.



Rysunek z pracy Laczkovicha *„Tilings of polygons with similar triangles"*.

Pokrycia kwadratu przez pozostałe trzy trójkąty są dużo bardziej skomplikowane (kilkadziesiąt/kilkaset trójkątów).

Pytanie całkowicie otwarte

Pytanie:

Z jakich prostopadłościanów można złożyć sześcian?