Aleksandra Górecka
25 sierpnia 2024

Definicja

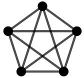
Dla zadanych dwóch (skończonych) grafów G, H poprzez $\tilde{R}(G, H)$ będziemy oznaczać poniższą grę.

- W grze bierze udział dwóch graczy, konstruktor i malarz.
- W każdej rundzie, konstruktor rysuje jedną krawędź, a malarz decyduje, czy ma być ona czerwona, czy niebieska.
- Gra kończy się wtedy, gdy pojawi się podgraf, który spełnia jeden z dwóch warunków:
  - jest czerwony i izomorficzny z G,
  - jest niebieski i izomorficzny z H.
- Celem konstruktora jest zakończyć grę jak najszybciej, z kolei malarz chce grać jak najdłużej.

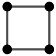
Rozgrywaną liczbą Ramseya dla pary (G, H) nazywamy liczbę ruchów w grze, w której obaj gracze grają optymalnie i oznaczamy ją przez $\tilde{r}(G, H)$.

Grafy

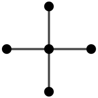
klika (clique) K_5



cykl (cycle) C_4



gwiazda (star) S_4



skojarzenie (matching) M_3

ścieżka (path) P_5

Rozgrzewka

- $\tilde{r}(G, H) = \tilde{r}(H, G)$

Rozgrzewka

- $\tilde{r}(G, H) = \tilde{r}(H, G)$
- Jeśli $H_1 \subset H_2$, to $\tilde{r}(G, H_1) \leqslant \tilde{r}(G, H_2)$

Rozgrzewka

- $\tilde{r}(G, H) = \tilde{r}(H, G)$
- Jeśli $H_1 \subset H_2$, to $\tilde{r}(G, H_1) \leqslant \tilde{r}(G, H_2)$
- $\tilde{r}(P_1, H) = 0$,

Rozgrzewka

- $\tilde{r}(G, H) = \tilde{r}(H, G)$
- Jeśli $H_1 \subset H_2$, to $\tilde{r}(G, H_1) \leqslant \tilde{r}(G, H_2)$
- $\tilde{r}(P_1, H) = 0$,
- $\tilde{r}(P_2, H) = e(H)$.

Elementarne oszacowanie

Twierdzenie

$\tilde{r}(G, H) \geqslant e(G) + e(H) - 1$

Dowód. Malarz maluje pierwsze $e(G) - 1$ krawędzi na czerwono, a następnie $e(H) - 1$ krawędzi na czerwono. Okazuje się wówczas, że nie powstanie ani czerwona kopia G, ani niebieska H, a zatem $\tilde{r}(G, H) > e(G) + e(H) - 2$.

Będę grać w grę

https://www.geogebra.org/classic/hbvcubnd
https://www.geogebra.org/classic/bqtf24qw

Pytanie

Czy istnieją grafy, dla których $\tilde{r}(G, H) = \infty$*?*

Pytanie

Czy istnieją grafy, dla których $\tilde{r}(G, H) = \infty$*?*

Nie, możemy to pokazać indukcyjnie. Zauważmy najpierw, że wystarczy pokazać nierówność $\tilde{r}(G, H) < \infty$ dla grafów pełnych K_n, ponieważ każdy (skończony) graf jest podgrafem grafu pełnego.

Dowód

Lemat

Jeśli oznaczymy $A = \tilde{r}(K_n, K_{m-1})$ *oraz* $B = \tilde{r}(K_{n-1}, K_m)$, *to*

$$\tilde{r}(K_n, K_m) \leqslant 2A + 2B + \max(A, B)$$

Dowód

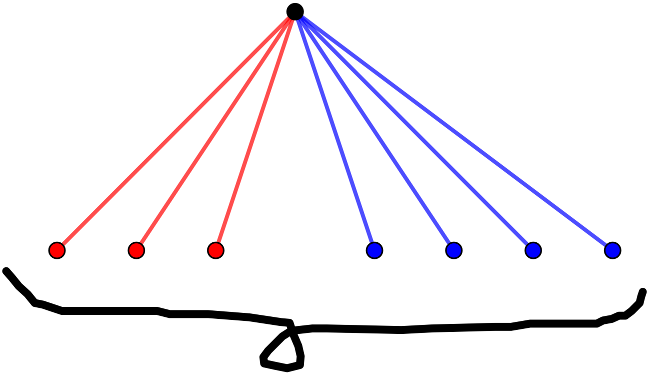
Lemat

Jeśli oznaczymy $A = \tilde{r}(K_n, K_{m-1})$ *oraz* $B = \tilde{r}(K_{n-1}, K_m)$, *to*

$$\tilde{r}(K_n, K_m) \leqslant 2A + 2B + \max(A, B)$$

Dowód. W pierwszym kroku konstruktor rysuje $2A + 2B - 1$ krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka u. Jeśli co najmniej $2A$ z nich jest niebieska, to tworzy czerwoną klikę K_n bądź niebieską K_{m-1} w A ruchów w taki sposób, by wykorzystać jedynie „niebieskie" wierzchołki. Jeśli powstanie niebieska klika K_{m-1}, to razem z wierzchołkiem u dadzą nam niebieską klikę K_m.
Jeśli w pierwszym kroku nie było 2A niebieskich krawędzi, to musiało być co najmniej $2B - 1$ czerwonych i prowadzimy analogiczne rozumowanie.

Dowód, c.d.



2A+2B-1

Zamiana ról

Rozważmy teraz modyfikację gry konstruktor-malarz, w której to malarz chce zakończyć grę jak najwcześniej, a konstruktor chce grać jak najdłużej. Oznaczmy liczbę ruchów w grze, w której gracze grają perfekcyjnie, przez $r_i(G, H)$.

Zamiana ról

Rozważmy teraz modyfikację gry konstruktor-malarz, w której to malarz chce zakończyć grę jak najwcześniej, a konstruktor chce grać jak najdłużej. Oznaczmy liczbę ruchów w grze, w której gracze grają perfekcyjnie, przez $r_i(G, H)$.

Pytanie

Czy istnieją grafy G, H, dla których $r_i(G, H) = \infty$?

Zamiana ról

Rozważmy teraz modyfikację gry konstruktor-malarz, w której to malarz chce zakończyć grę jak najwcześniej, a konstruktor chce grać jak najdłużej. Oznaczmy liczbę ruchów w grze, w której gracze grają perfekcyjnie, przez $r_i(G, H)$.

Pytanie

Czy istnieją grafy G, H, dla których $r_i(G, H) = \infty$?

Tak.

Twierdzenie

$r_i(G, H) < \infty$ dokładnie wtedy, gdy co najmniej jeden z grafów G, H jest skojarzeniem oraz co najmniej jeden z tych grafów jest gwiazdą (z dokładnością do wierzchołków izolowanych).

Dowód w lewo

Jeśli żaden z grafów G, H nie jest gwiazdą, to konstruktor może ciągnąć grę w nieskończoność, rysując krawędzie nieskończonej gwiazdy. Każdy podgraf gwiazdy jest gwiazdą, zatem malarz nie jest w stanie skończyć gry.
Analogicznie, jeśli G ani H nie są skojarzeniem, to konstruktor może rysować krawędzie nieskończonego skojarzenia, w ten sposób gra się nigdy nie skończy.

Dowód w to drugie lewo

Jeśli G jest zarówno skojarzeniem, jak i gwiazdą, to albo nie zawiera żadnej krawędzi (wtedy $r_i(G, H) = 0$) albo ma jedną krawędź. W tym drugim przypadku malarz jest w stanie skończyć grę w 1 ruch, więc $r_i(P_2, H) \leqslant 1$.

Pozostaje pokazać, że $r_i(M_k, S_n) < \infty$. Malarz stosuje następującą strategię: maluje krawędź na czerwono dokładnie wtedy, gdy żaden z końców nie ma jeszcze czerwonej krawędzi. Jeśli na planszy nie powstało jeszcze ani czerwone skojarzenie, ani niebieska gwiazda, to:

- jest co najwyżej $k - 1$ czerwonych krawędzi,
- każda niebieska krawędź sąsiaduje z co najmniej jedną czerwoną,
- każda czerwona krawędź sąsiaduje z co najwyżej $2n - 2$ niebieskimi krawędziami.

Stąd na planszy będzie nie więcej niż $(k - 1)(2n - 1)$ krawędzi, a więc $r_i(M_k, S_n) \leqslant (k - 1)(2n - 1) + 1$.

Rozważmy teraz grę, która jest połączeniem dwóch dotychczasowych. Ponownie celem gracza A będzie jak najszybciej skończyć grę, a gracza B – jak najdłużej ją ciągnąć.
Gracz A w nieparzystych rundach jest konstruktorem, a w parzystych malarzem, z kolei B na odwrót.
Liczbę ruchów w optymalnej grze będziemy oznaczać przez $\overset{\leftrightarrow}{r}(G, H)$

Pytanie

Czy istnieją takie grafy G, H, dla których $\overset{\leftrightarrow}{r}(G, H) = \infty$?

Twierdzenie

$\overleftrightarrow{r}(G, H) \leqslant 2\tilde{r}(G, H) - 1.$

Dowód. Rozważmy optymalną strategię konstruktora T w grze $\tilde{R}(G, H)$. Graf z pomalowanymi krawędziami będziemy nazywali osiągalnym, jeśli mógł powstać w trakcie gry $\tilde{R}(G, H)$, w której konstruktor stosował strategię T.

Gracz A w parzystych rundach gra dowolnie, a w nieparzystych znajduje największy podgraf na planszy, który jest osiągalny przy strategii T. Następnie wykonuje taki ruch, jak konstruktor grający zgodnie ze strategią T. W ten sposób A w każdym nieparzystym ruchu zwiększa największy osiągalny podgraf co najmniej o 1 krawędź. Ponadto każdy osiągalny graf, który ma $\tilde{r}(G, H)$ zawiera czerwony G lub niebieski H, co kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie

$\overleftrightarrow{r}(G, H) \leqslant 2\tilde{r}(G, H) - 1.$

Dowód. Rozważmy optymalną strategię konstruktora T w grze $\tilde{R}(G, H)$. Graf z pomalowanymi krawędziami będziemy nazywali osiągalnym, jeśli mógł powstać w trakcie gry $\tilde{R}(G, H)$, w której konstruktor stosował strategię T.
Gracz A w parzystych rundach gra dowolnie, a w nieparzystych znajduje największy podgraf na planszy, który jest osiągalny przy strategii T. Następnie wykonuje taki ruch, jak konstruktor grający zgodnie ze strategią T. W ten sposób A w każdym nieparzystym ruchu zwiększa największy osiągalny podgraf co najmniej o 1 krawędź. Ponadto każdy osiągalny graf, który ma $\tilde{r}(G, H)$ zawiera czerwony G lub niebieski H, co kończy dowód twierdzenia.
Analogicznie można pokazać, że $\overleftrightarrow{r}(G, H) \leqslant 2r_i(G, H)$.

Nierówności

Pytanie

Czy istnieją grafy G, H, dla których $\overleftrightarrow{r}(G, H) < \tilde{r}(G, H)$*?*

Nierówności

Pytanie

Czy istnieją grafy G, H, dla których $\overleftrightarrow{r}(G, H) < \tilde{r}(G, H)$?

Tak, $\overleftrightarrow{r}(P_2, G) \leqslant 2r_i(P_2, G) \leqslant 2$ oraz $\tilde{r}(P_2, G) = e(G)$.

Pytanie

Czy istnieją grafy G, H, dla których $\overleftrightarrow{r}(G, H) < r_i(G, H)$?

Nierówności

Pytanie

Czy istnieją grafy G, H, dla których $\overleftrightarrow{r}(G, H) < \tilde{r}(G, H)$?

Tak, $\overleftrightarrow{r}(P_2, G) \leqslant 2r_i(P_2, G) \leqslant 2$ oraz $\tilde{r}(P_2, G) = e(G)$.

Pytanie

Czy istnieją grafy G, H, dla których $\overleftrightarrow{r}(G, H) < r_i(G, H)$?

Tak, wiemy, że istnieją grafy, dla których $r_i(G, H) = \infty$, ale dla wszystkich grafów $\overleftrightarrow{r}(G, H) < \infty$.

Pytanie

Czy istnieją grafy G, H, dla których $\overleftrightarrow{r}(G, H) < r_i(G, H)$ oraz $\overleftrightarrow{r}(G, H) < r_i(G, H)$?

Nierówności

Pytanie

Czy istnieją grafy G, H, dla których $\overleftrightarrow{r}(G, H) < \tilde{r}(G, H)$?

Tak, $\overleftrightarrow{r}(P_2, G) \leqslant 2r_i(P_2, G) \leqslant 2$ oraz $\tilde{r}(P_2, G) = e(G)$.

Pytanie

Czy istnieją grafy G, H, dla których $\overleftrightarrow{r}(G, H) < r_i(G, H)$?

Tak, wiemy, że istnieją grafy, dla których $r_i(G, H) = \infty$, ale dla wszystkich grafów $\overleftrightarrow{r}(G, H) < \infty$.

Pytanie

Czy istnieją grafy G, H, dla których $\overleftrightarrow{r}(G, H) < r_i(G, H)$ oraz $\overleftrightarrow{r}(G, H) < r_i(G, H)$?

Nie wiem.

Dziękuję za uwagę!