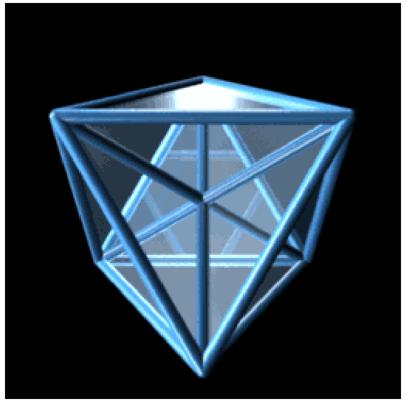
LXVI Szkoła Matematyki Poglądowej
Siedlce 25.08 – 28.08

O zaskakujących podobieństwach i dziwnych różnicach, czyli scenki o problemach klasyfikacji

Zdzisław Pogoda

Instytut Matematyki UJ

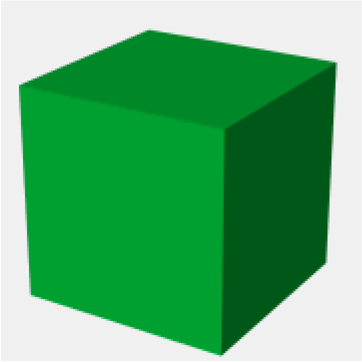


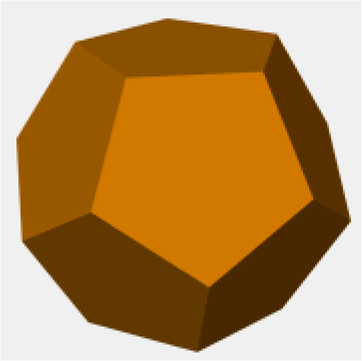
Scenka I
Wielościany i ich kuzyni

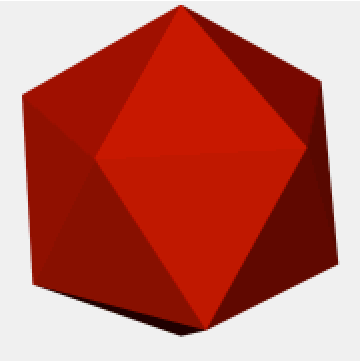
Wielościany…

- Wielościany foremne wypukłe
- Wielościany foremne niewypukłe
- Wielościany półforemne wypukłe (archimedesowe)
- Wielościany… jednostajne (jednorodne, uniform, półforemne niewypukłe)

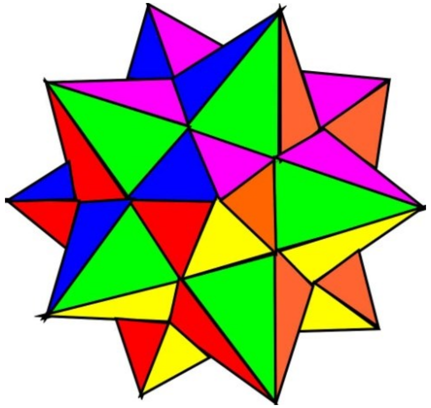
Wielościany foremne

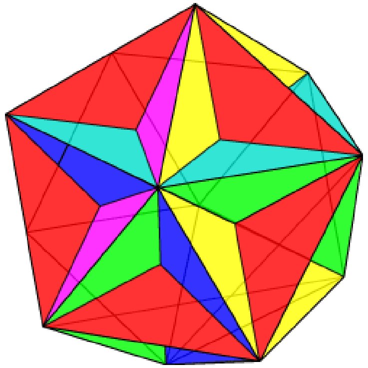


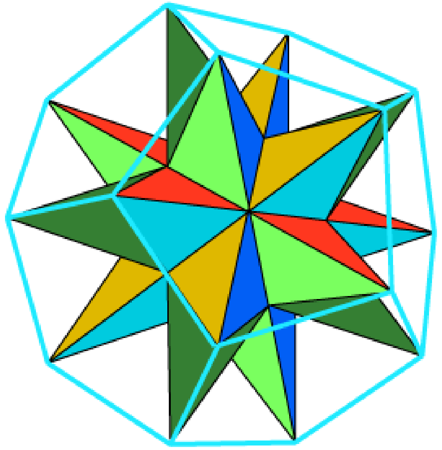


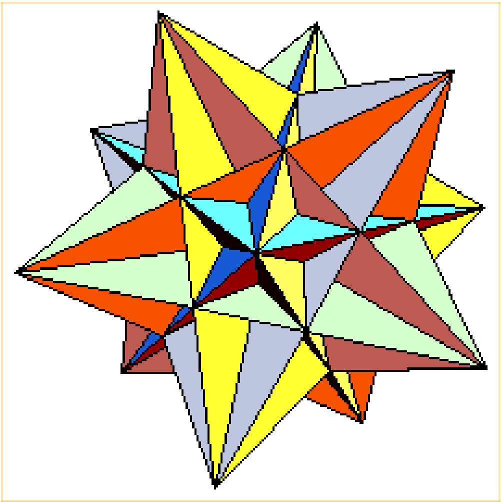


Wielościany niewypukłe foremne
Keplera - Poinsota

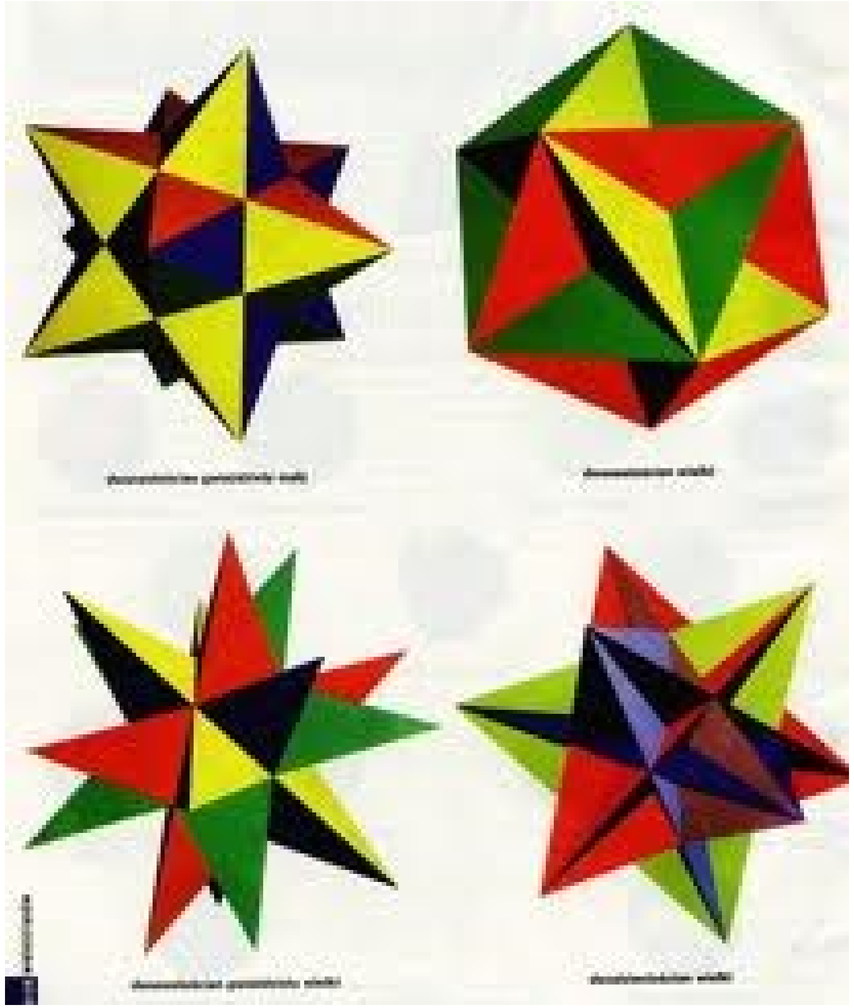




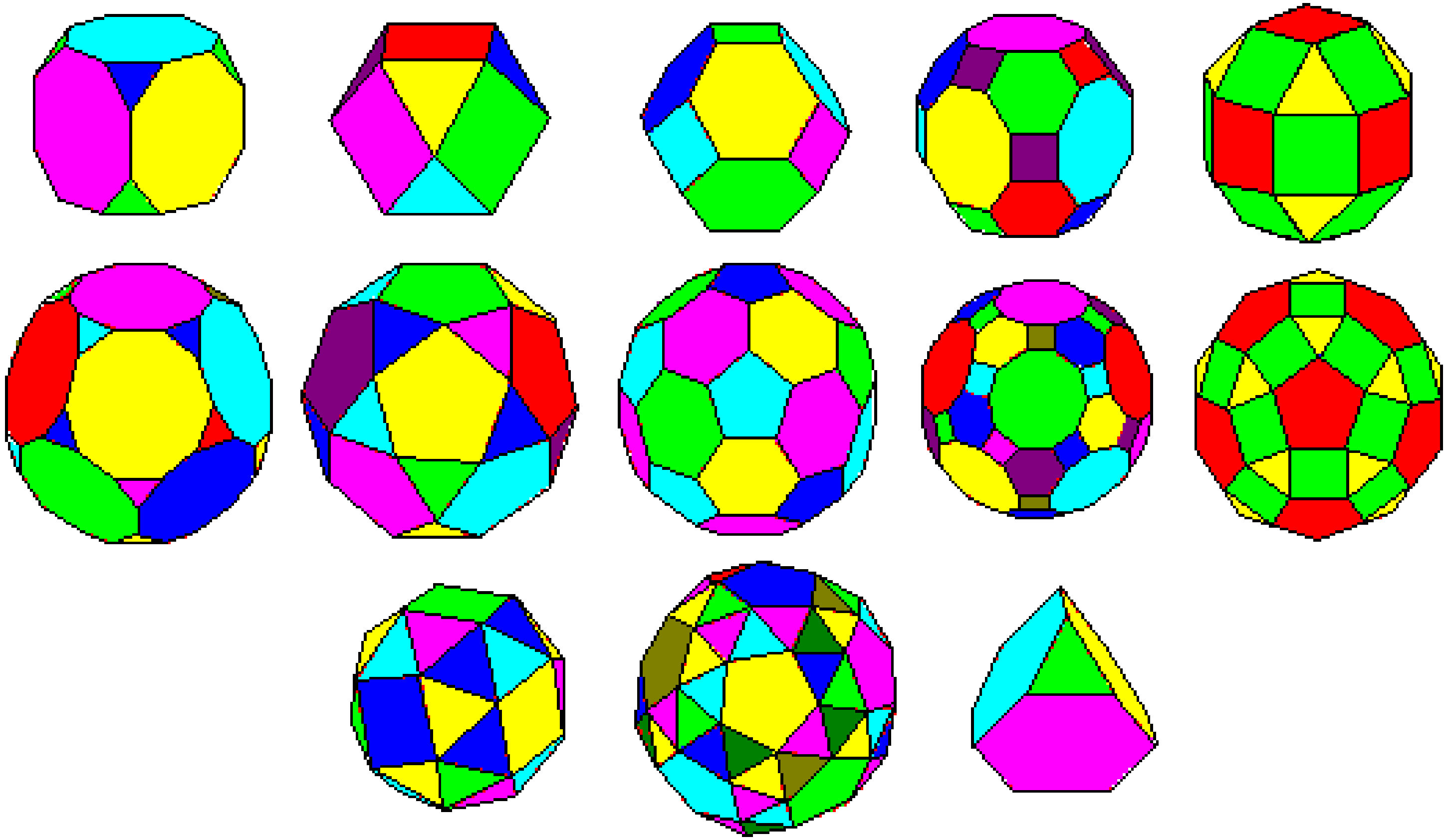




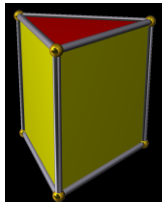
Wielościany gwiaździste foremne

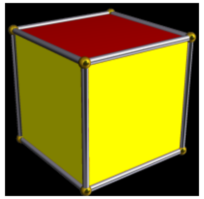


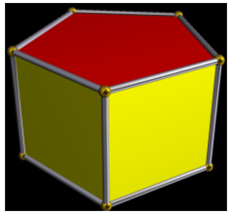
Wielościany półforemne archimedesowe

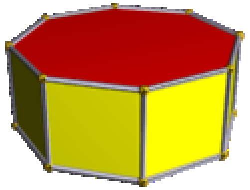


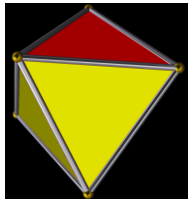
Graniastosłupy i antygraniastosłupy

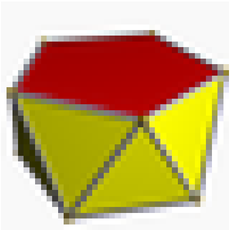


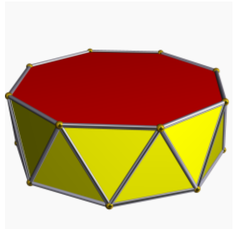










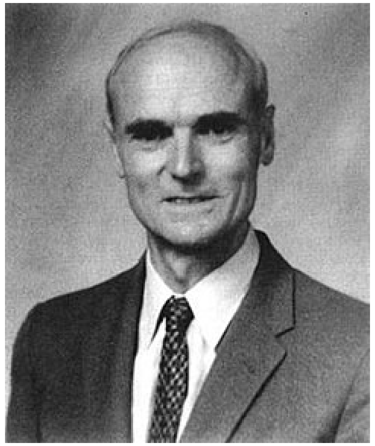


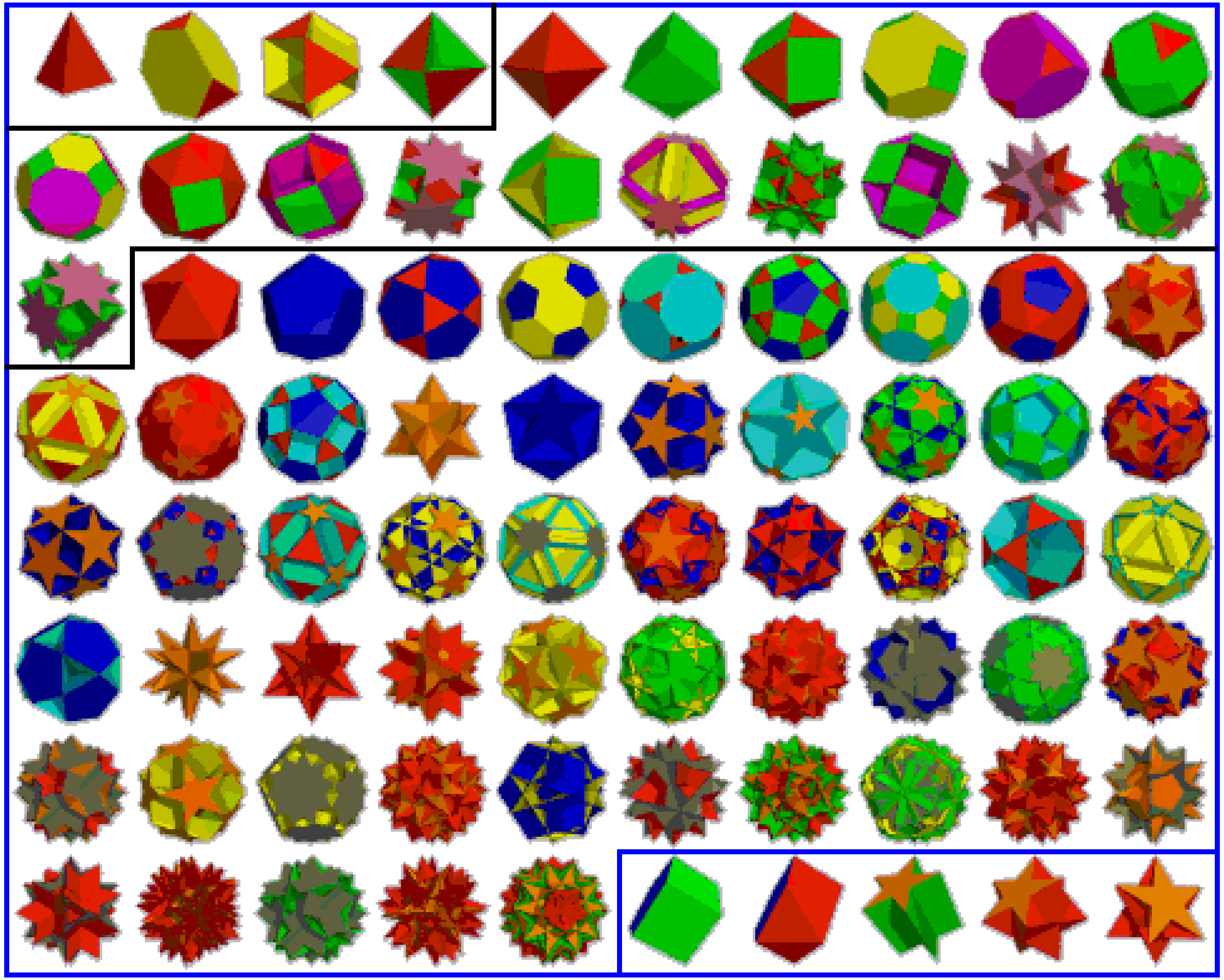
Półforemne niewypukłe

Istnieje 57 wielościanów niewypukłych jednostajnych.

Ponadto

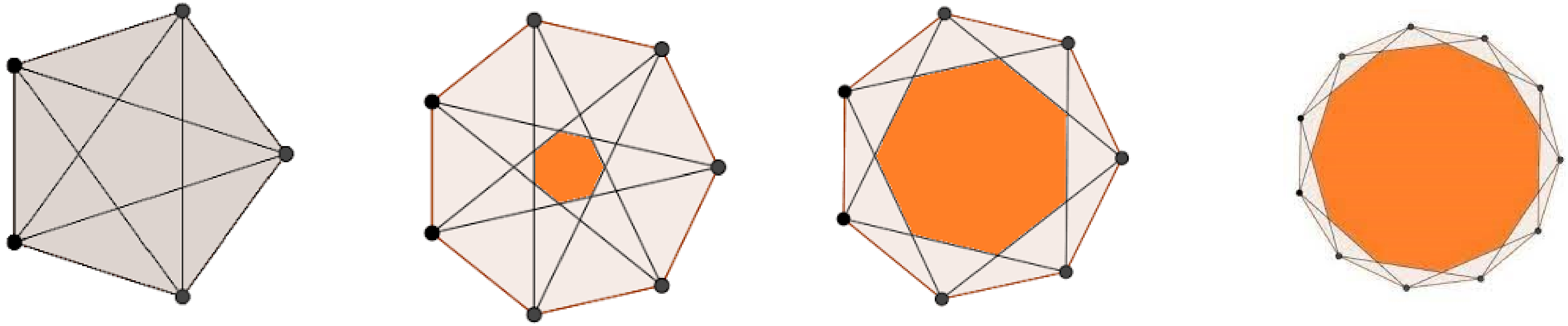
są trzy nieskończone serie





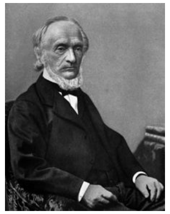
...kuzyni
wielokąty

- Wielokąty foremne wypukłe
- Wielokąty foremne niewypukłe (gwiaździste)



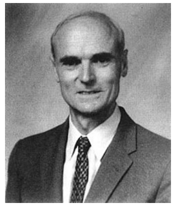
Komórki czterowymiarowe

- Definicja przez analogię.
- Problem z terminologią: komórki, politopy, polichora, hiperwielościany…
- Foremne wypukłe: 6.
- Foremne niewypukłe: 10 (Schläfli-Hess polychora)




- Półforemne (?) wypukłe: 41, 17 pryzm (odpowiedniki, graniastosłupów), dwie nieskończone serie (Conway)

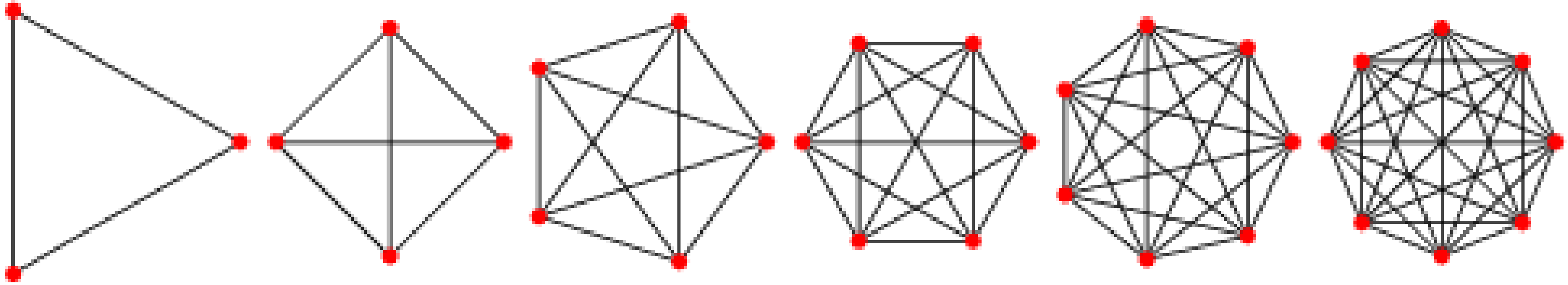
- Półforemne niewypukłe: **Brak klasyfikacji!** Znane: trzy nieskończone serie, 57 pryzm oraz ponad 2189 innych przykładów…

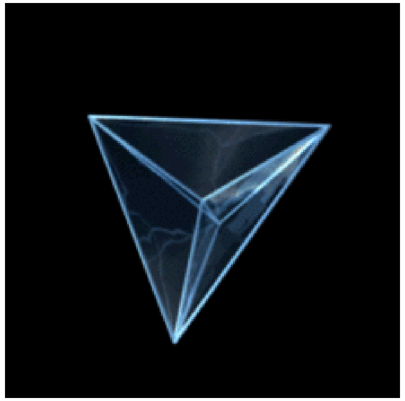



Komórki wyżej wymiarowe
n>4

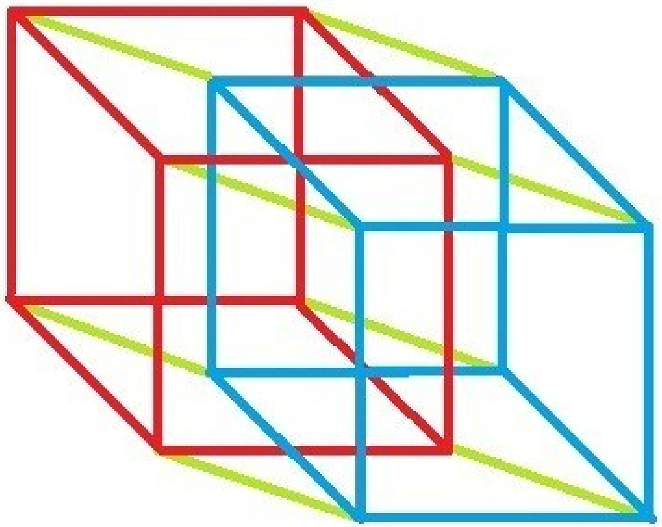
- Istnieją **trzy** wypukłe foremne.
- **Nie istnieją** wielościany foremne niewypukłe.
- Cząstkowa wiedza o komórkach półforemnych.

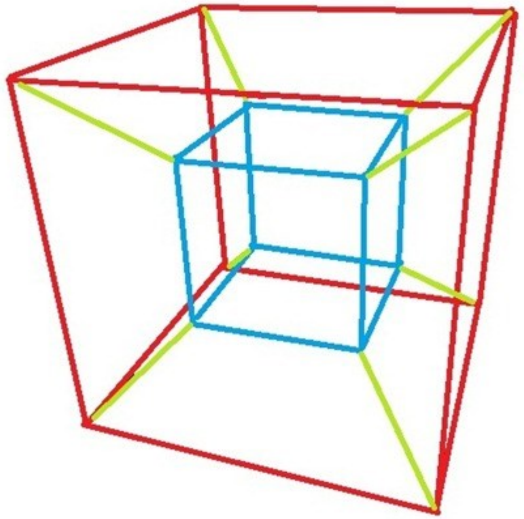
5-komórka
(sympleks)

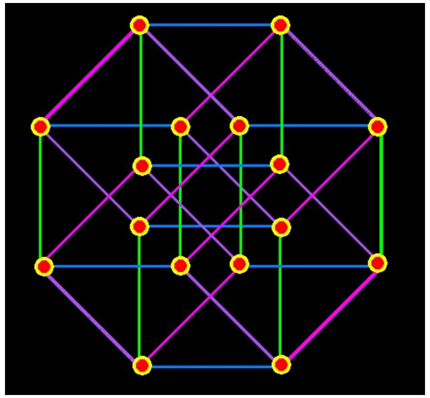


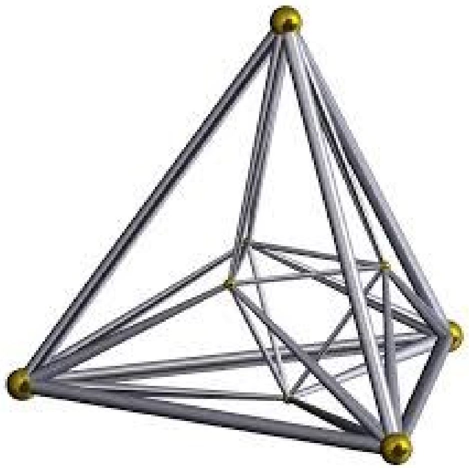


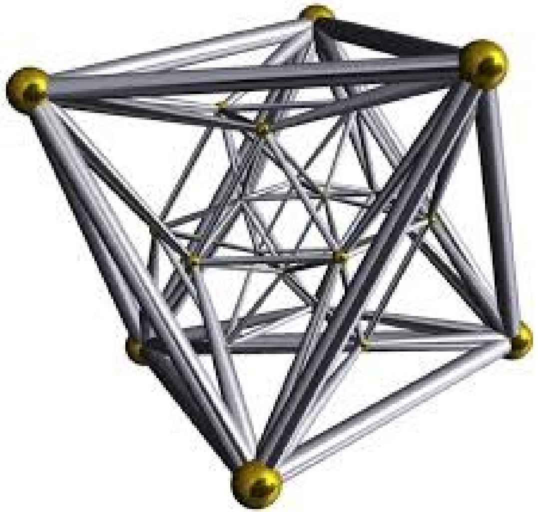
Hipersześcian, hiperkostka, 8- komórka, tessarakt

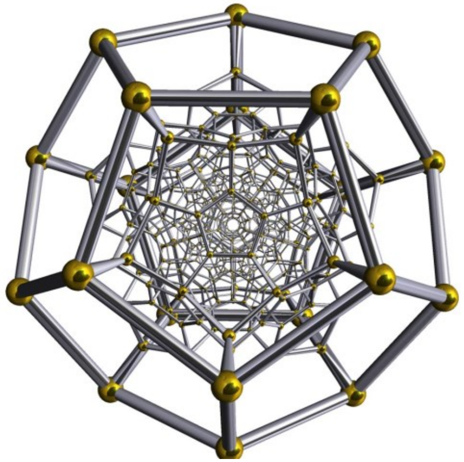


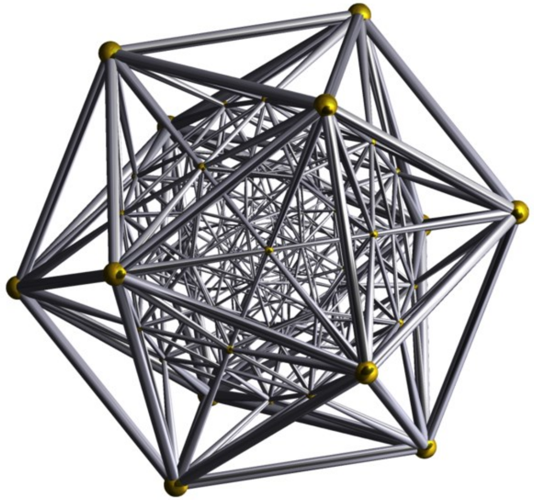


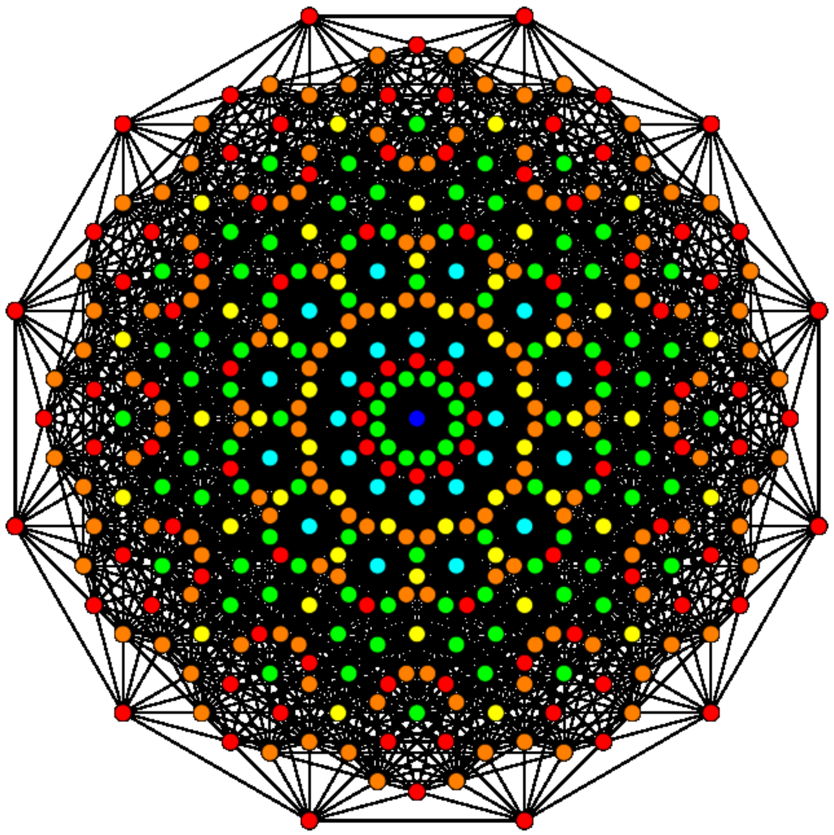


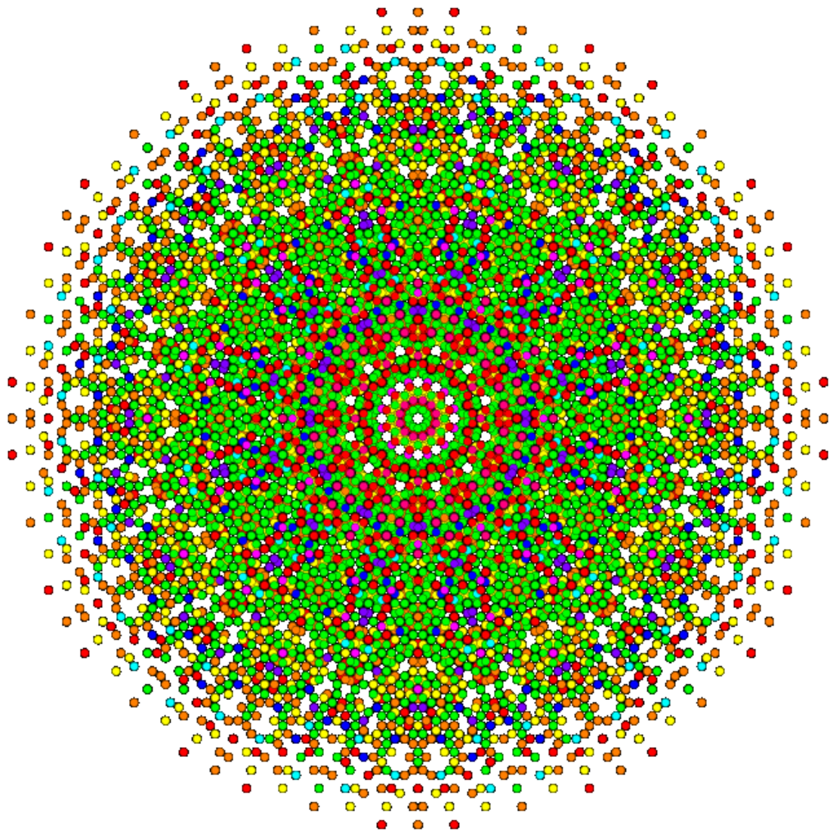










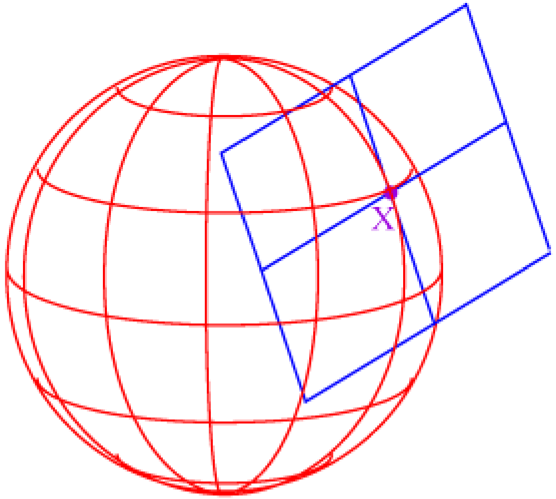


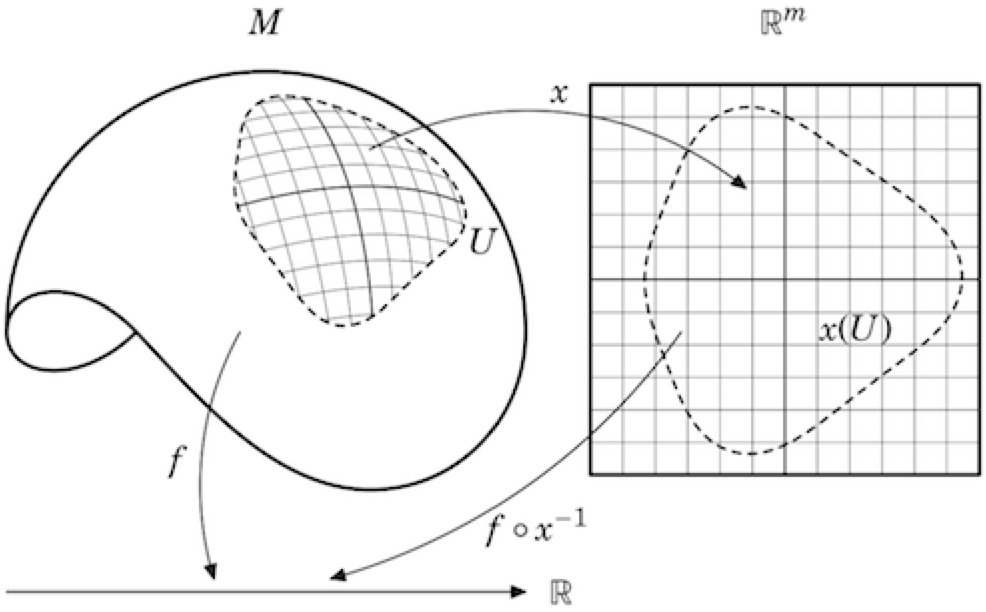
Scenka II
Rozmaitości

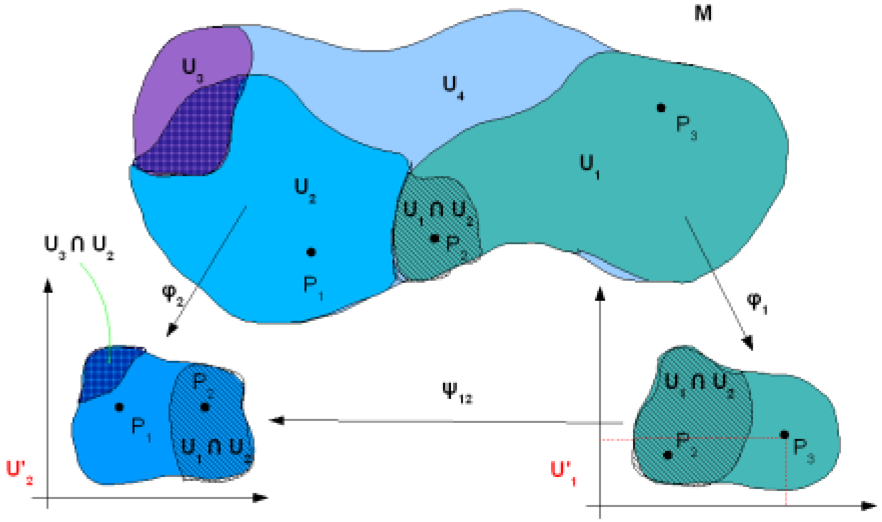
Kilka wątków

- Problemy klasyfikacji
- Hipoteza Poincarégo
- Struktury na rozmaitościach
- Problemy zanurzania

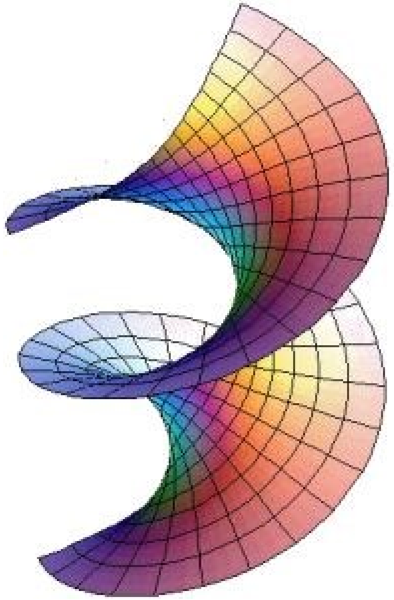
Rozmaitości

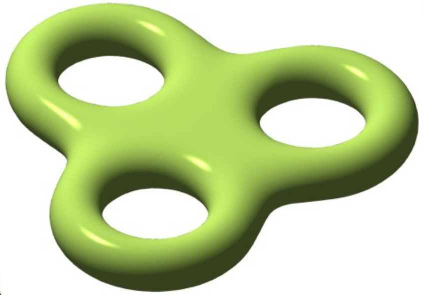


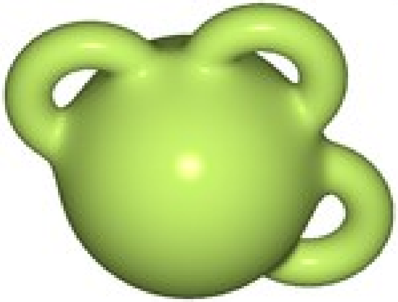


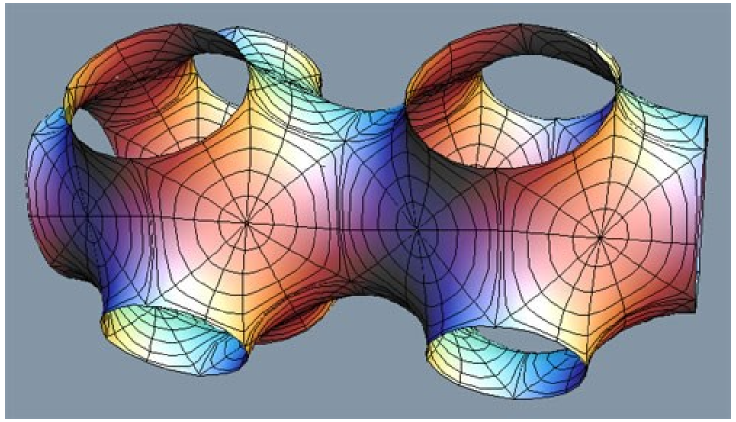


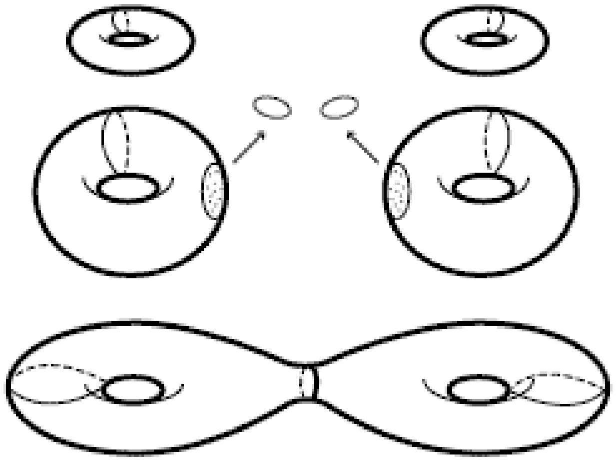
Powierzchnie

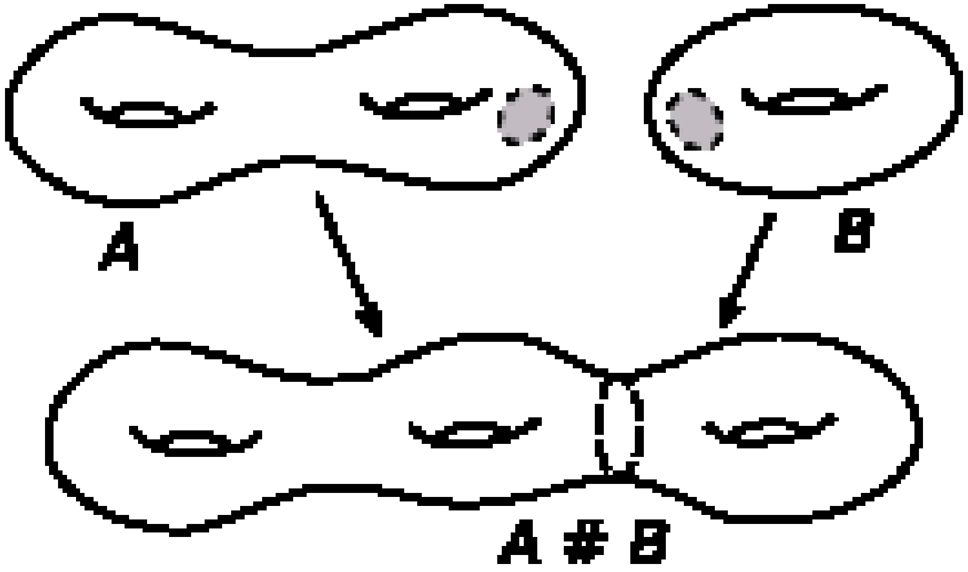






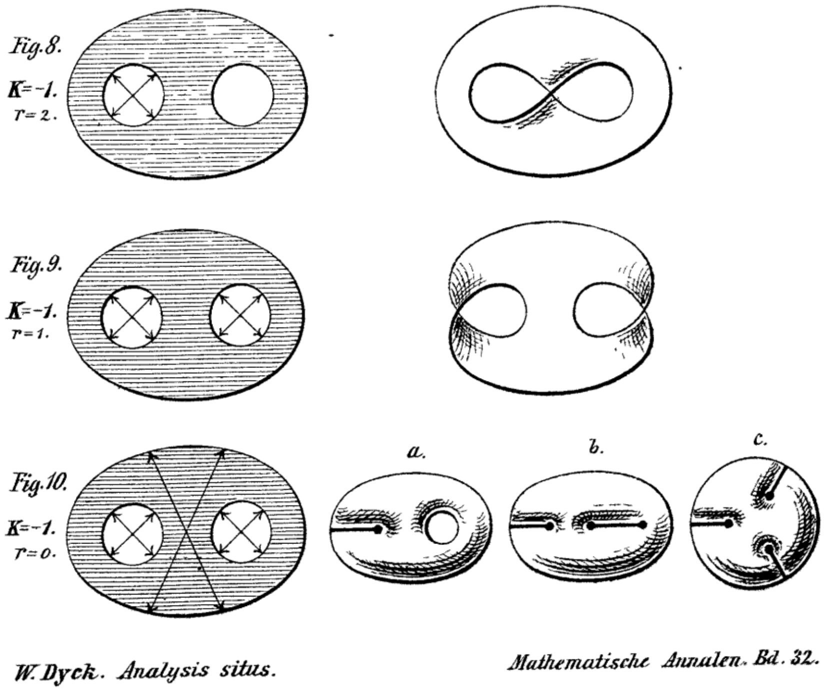


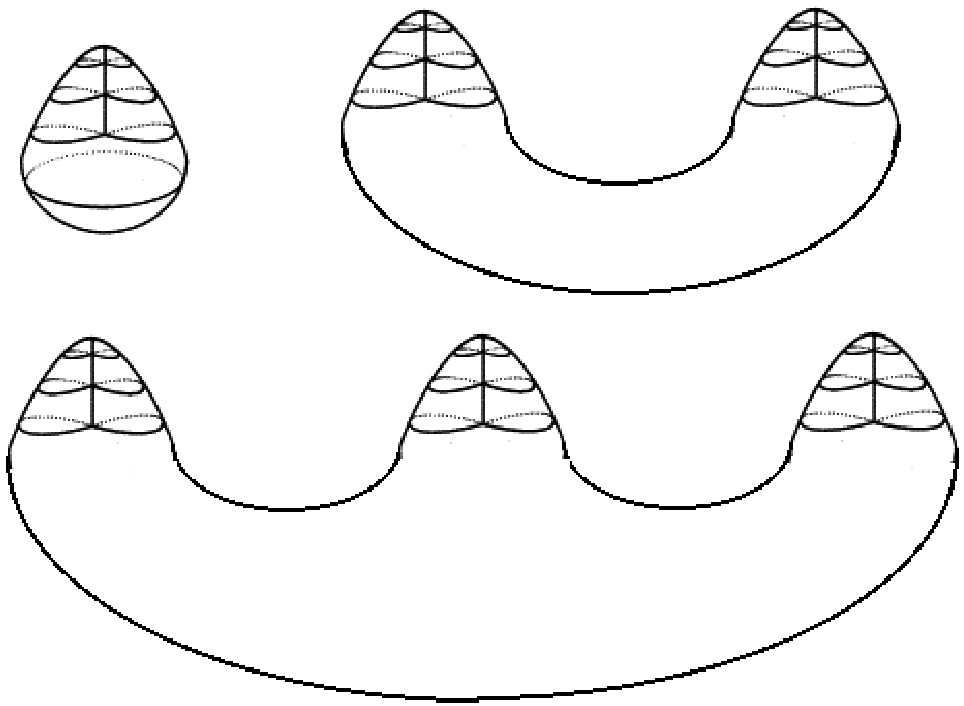


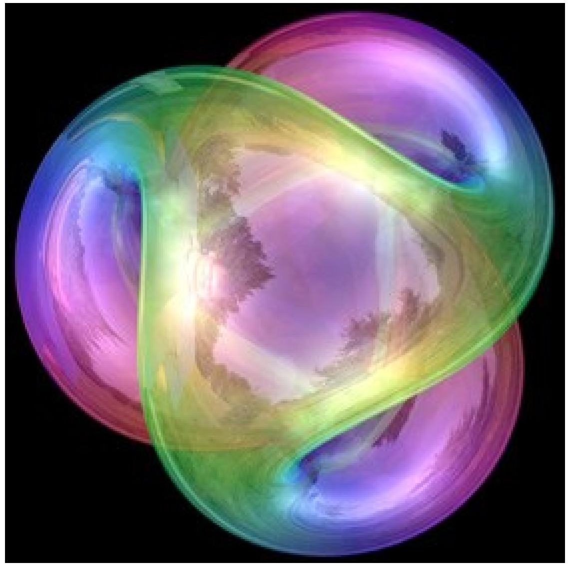

A
B
A # B

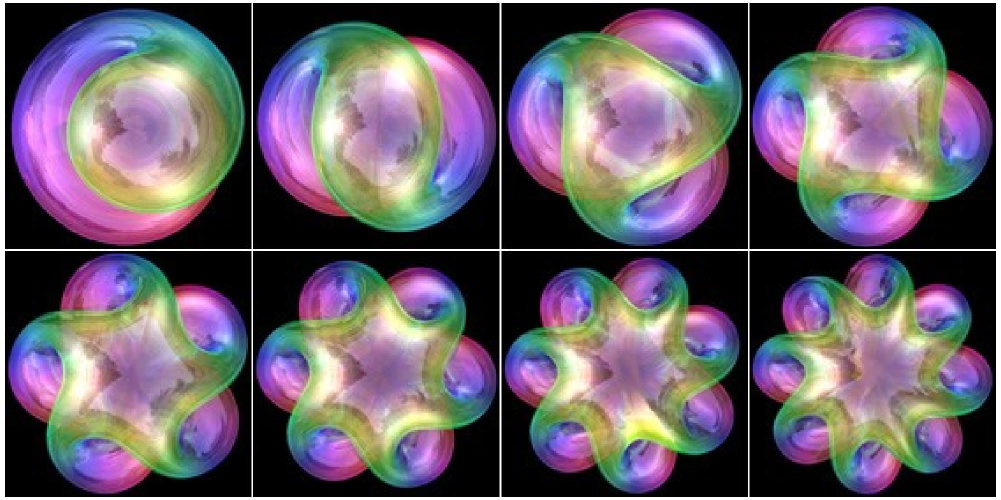
W. Von Dyck

- M.Dehn i P. Heegaard







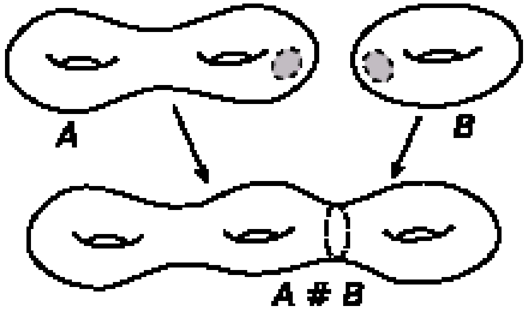


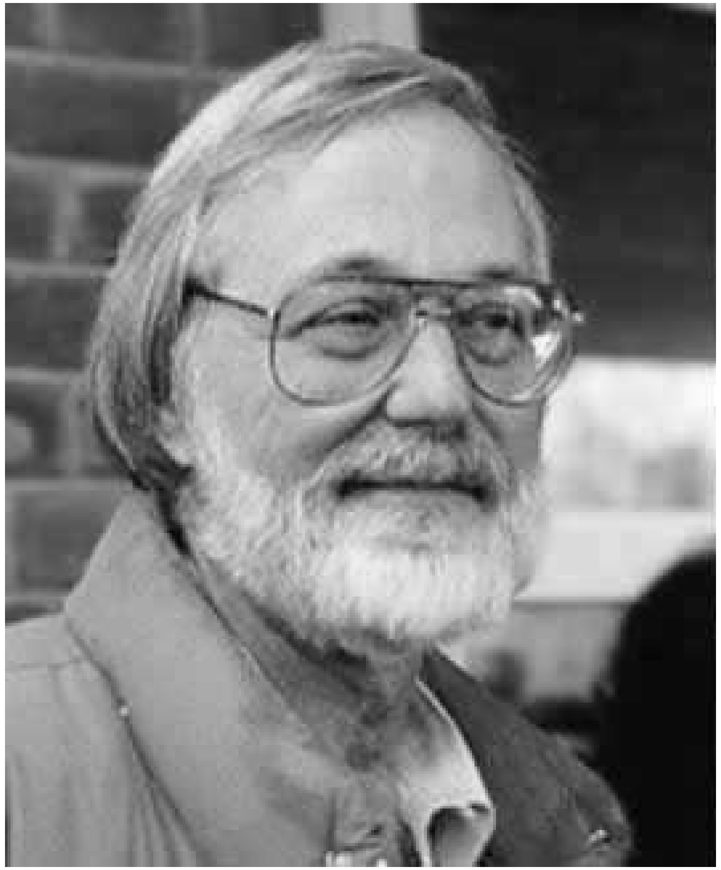
Podobieństwa

John Willard Milnor

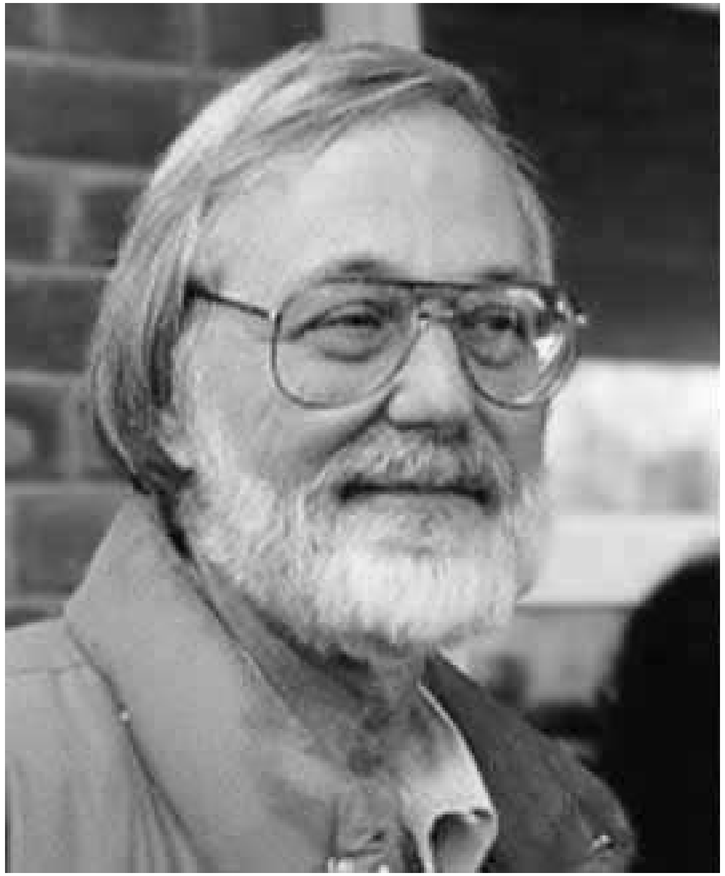
- Medal Fieldsa 1962 (sfery egzotyczne)
- Nagroda Abela 2011

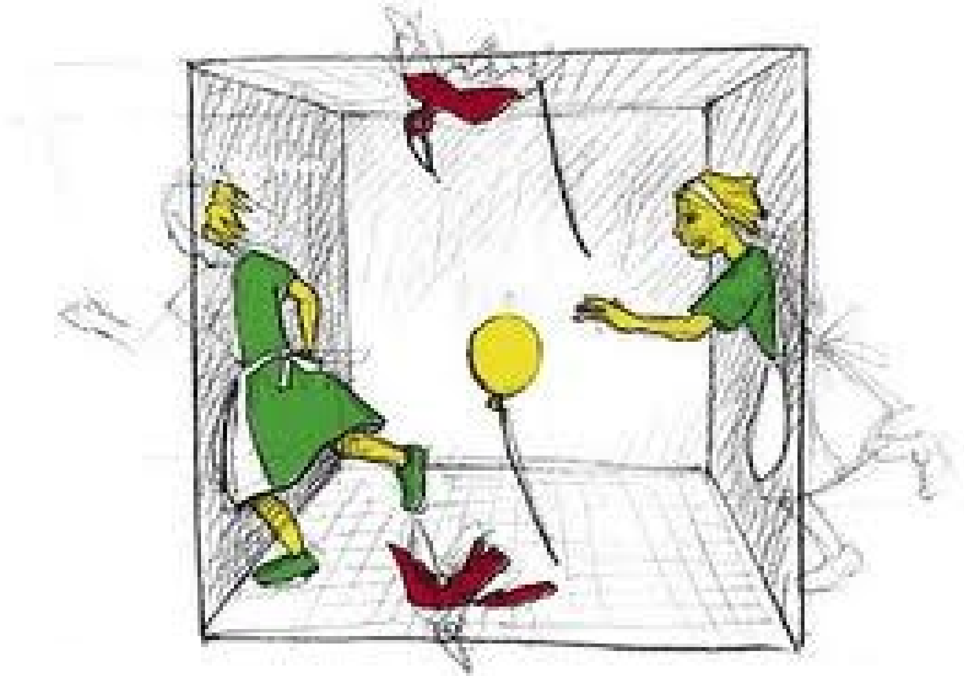
A unique factorization theorem for 3-manifolds,
Amer. J. Math. 84 (1962) 1-7.

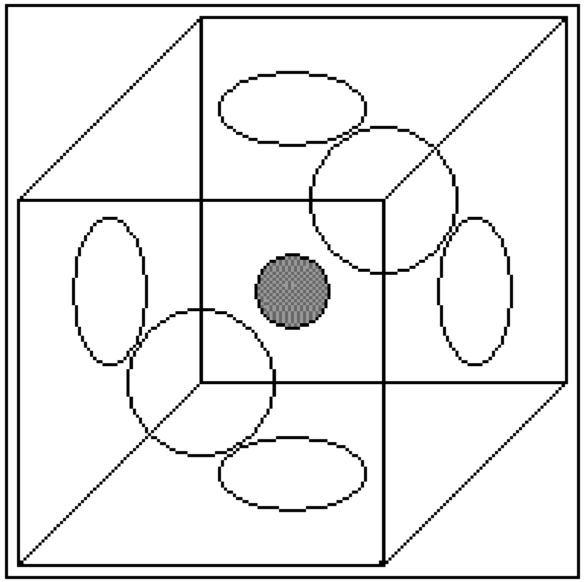




John Willard Milnor

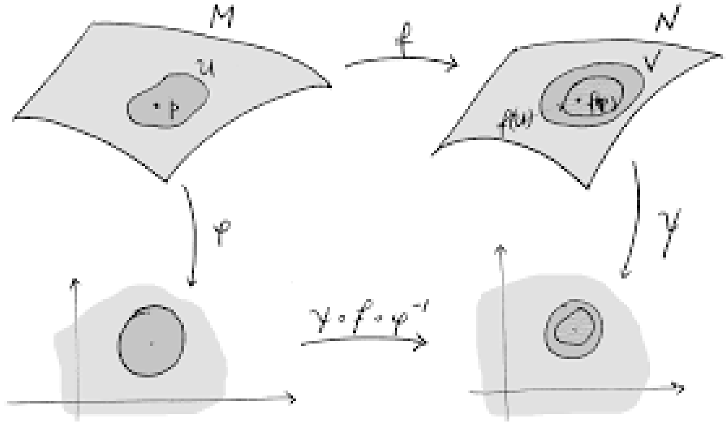






Struktury

- Struktura TOP
- Struktura PL
- Struktura DIFF
- *n*<4 DIFF=TOP=PL
- DIFF → PL
- *n* < 7 PL dopuszcza jednoznaczną DIFF strukturę (DIFF=PL)



- (1956), "On manifolds homeomorphic to the 7-sphere", *Annals of Mathematics,* 64 (2): 399–405.
- (1959)*"Sommes de variétés différentiables et structures différentiables des sphères",* Bulletin de la Société Mathématique de France, **87**: 439–444.
- Michel A. Kervaire; John W. Milnor
  The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 77, No. 3. (May, 1963), pp. 504-537

Michael Hartley Freedman
1951

- The topology of four dimensional manifolds, J. Diff. Geom. 17, 1983, 357-454
- Klasyfikacja jednospójnych 4-rozmaitości topologicznych.
- Hipoteza Poincarégo w wymiarze 4 (topologiczna).
- Istnienie egzotycznego $\boldsymbol{R}^4$.

Simon Kirwan Donaldson
1957

- An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds, J. Diff. Geometry, 18 1983, 279-315.
- Kryteria na wygładzalność 4-rozmaitości.
- Istnienie egzotycznego $\boldsymbol{R}^4$

Rozmaitości zamknięte
(zwarte bez brzegu)

- Dla $n<4$ dokładnie jedna struktura.
- Dla $n>4$ co najwyżej skończona liczba struktur.
- Dla $n=4$ istnieją rozmaitości dopuszczające nieskończenie wiele różnych struktur gładkich i nieznane są rozmaitości, które miałyby skończoną liczbę struktur.
- **Hipoteza:** wszystkie zamknięte 4-rozmaitości dopuszczają przeliczalną ilość różnych struktur gładkich.

Otwarte rozmaitości (niezwarte)

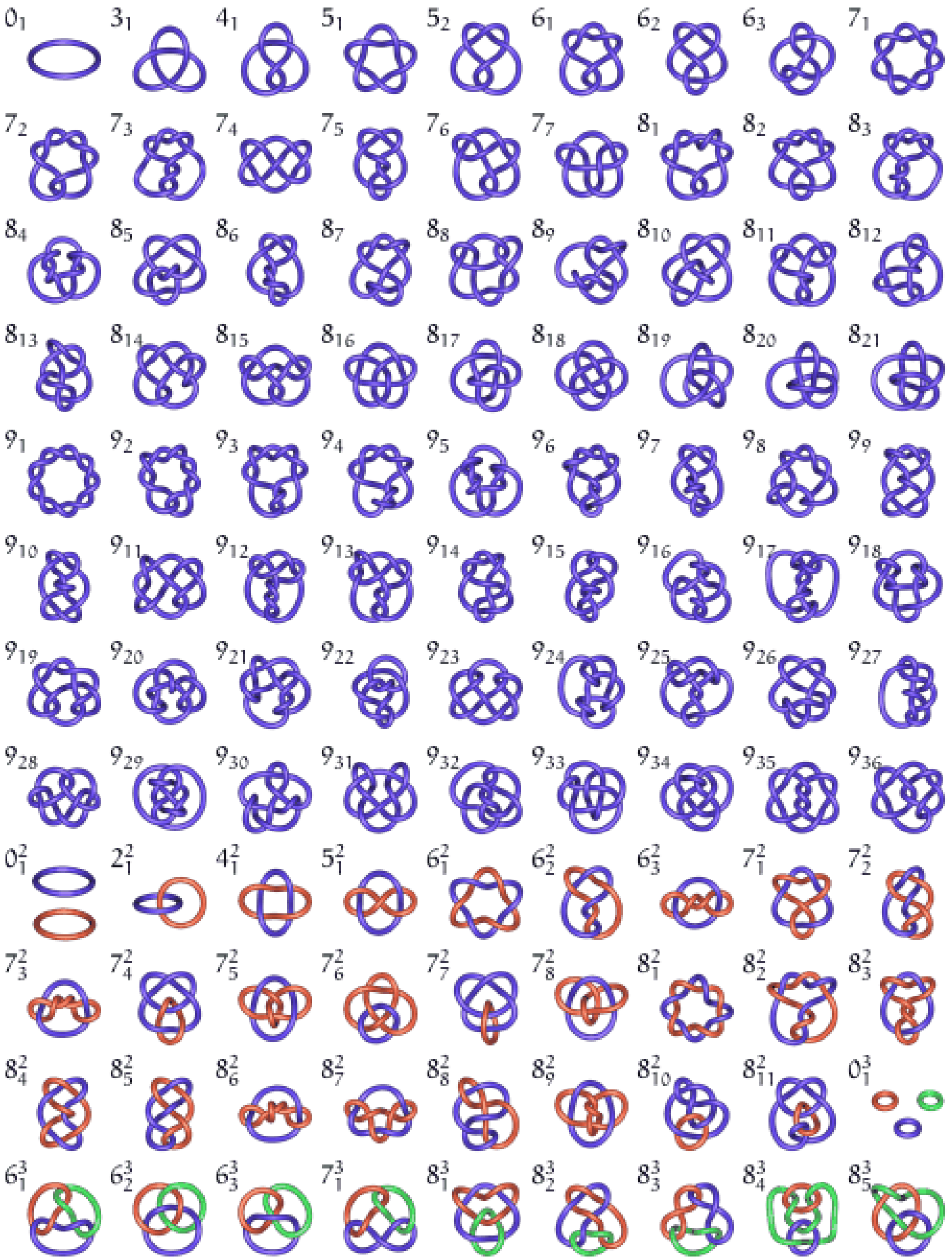
- Tylko dla $n=4$ przestrzeń $\boldsymbol{R}^n$ dopuszcza nieprzeliczalną liczbę struktur gładkich.
- W pozostałych ($n\neq4$) przypadkach struktura gładka jest tylko jedna.
- $\boldsymbol{R}^4$ ze strukturą egzotyczną pomnożone przez $\boldsymbol{R}^1$ jest dyfeomoriczne z $\boldsymbol{R}^5$. Jak to egzotyczne $\boldsymbol{R}^4$ „wygląda" w $\boldsymbol{R}^5$?
- Znane są przykłady 4-rozmaitości otwartych też dopuszczających nieprzeliczalną ilość struktur gładkich. Pytanie: czy tak jest zawsze?

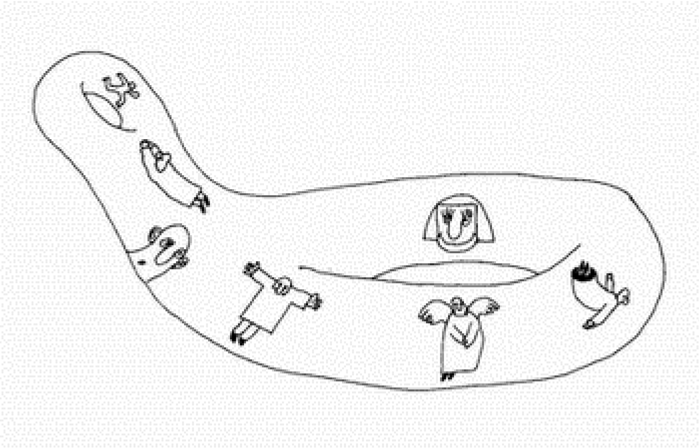
Hipoteza Poincarégo

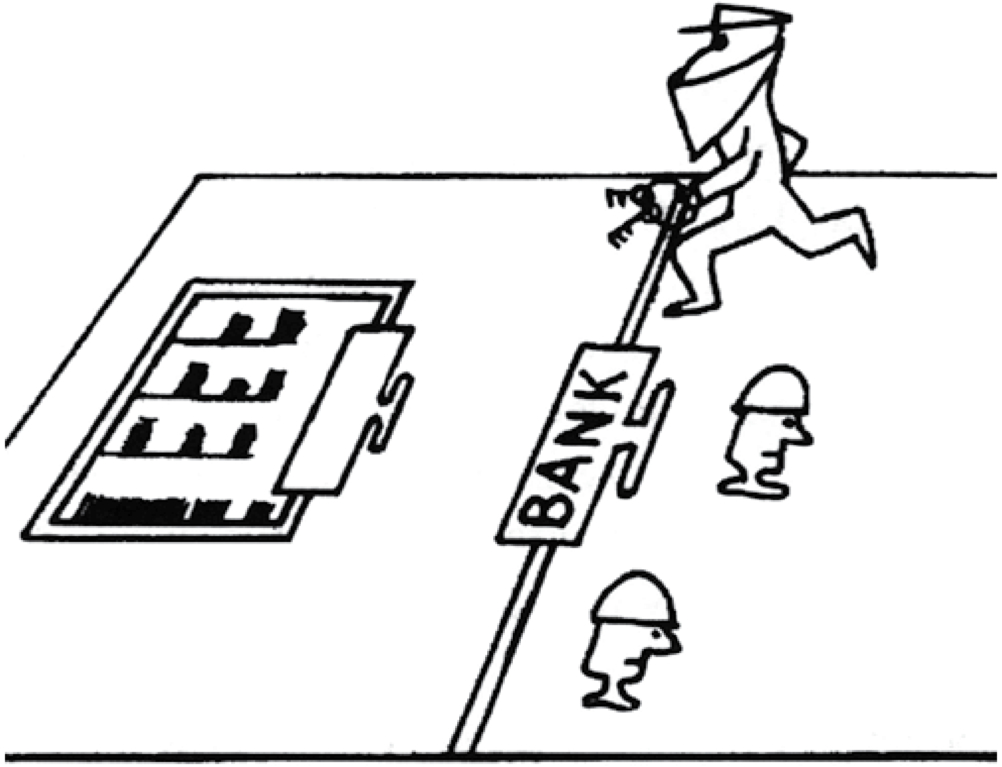
- Trójwymiarowa rozmaitość (bez brzegu) zwarta, spójna i jednospójna jest homeomorficzna ze sferą trójwymiarową.
- Czy może być tak, że grupa fundamentalna rozmaitości V redukuje się do trywialnej, a mimo to V nie jest jednospójna?

Hipoteza Poincarégo

Dowolna jednospójna zamknięta rozmaitość trójwymiarowa dopuszcza metrykę Einsteina.


0_1 3_1 4_1 5_1 5_2 6_1 6_2 6_3 7_1
7_2 7_3 7_4 7_5 7_6 7_7 8_1 8_2 8_3
8_4 8_5 8_6 8_7 8_8 8_9 8_{10} 8_{11} 8_{12}
8_{13} 8_{14} 8_{15} 8_{16} 8_{17} 8_{18} 8_{19} 8_{20} 8_{21}
9_1 9_2 9_3 9_4 9_5 9_6 9_7 9_8 9_9
9_{10} 9_{11} 9_{12} 9_{13} 9_{14} 9_{15} 9_{16} 9_{17} 9_{18}
9_{19} 9_{20} 9_{21} 9_{22} 9_{23} 9_{24} 9_{25} 9_{26} 9_{27}
9_{28} 9_{29} 9_{30} 9_{31} 9_{32} 9_{33} 9_{34} 9_{35} 9_{36}
0^2_1 2^2_1 4^2_1 5^2_1 6^2_1 6^2_2 6^2_3 7^2_1 7^2_2
7^2_3 7^2_4 7^2_5 7^2_6 7^2_7 7^2_8 8^2_1 8^2_2 8^2_3
8^2_4 8^2_5 8^2_6 8^2_7 8^2_8 8^2_9 8^2_{10} 8^2_{11} 0^3_1
6^3_1 6^3_2 6^3_3 7^3_1 8^3_1 8^3_2 8^3_3 8^3_4 8^3_5




BANK