Szkoła Matematyki Poglądowej, lato 2023

# Cierpienia młodego studenta

Paweł Naroski

Politechnika Warszawska

Siedlce, 25 VIII 2023

# Wszystko, co trzeba wiedzieć

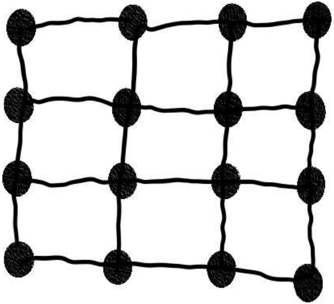
## Definicja

Graf nazwiemy *spójnym*, jeśli każde dwa jego wierzchołki są w nim połączone ścieżką.

# Wszystko, co trzeba wiedzieć

## Definicja

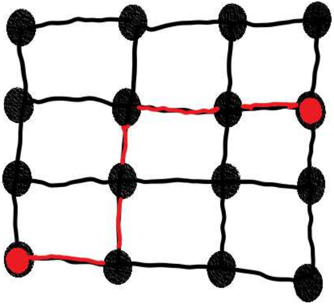
Graf nazwiemy *spójnym*, jeśli każde dwa jego wierzchołki są w nim połączone ścieżką.



# Wszystko, co trzeba wiedzieć

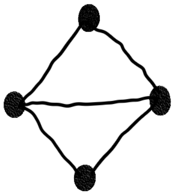
## Definicja

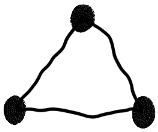
Graf nazwiemy *spójnym*, jeśli każde dwa jego wierzchołki są w nim połączone ścieżką.



### Definicja

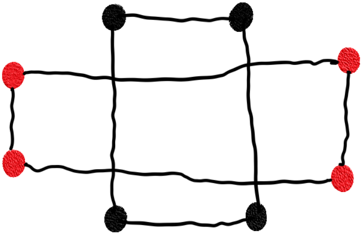
Graf nazwiemy *spójnym*, jeśli każde dwa jego wierzchołki są w nim połączone ścieżką.





## Definicja

Graf nazwiemy *spójnym*, jeśli każde dwa jego wierzchołki są w nim połączone ścieżką.



# Wszystko, co trzeba wiedzieć

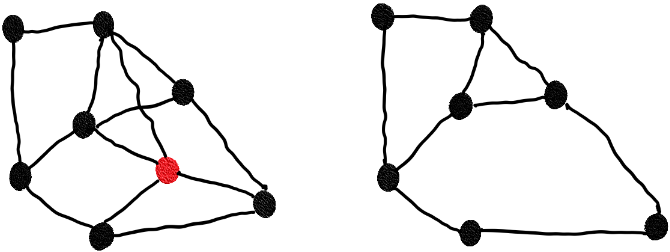
**Definicja**

Jeśli $G$ jest grafem, a $v$ jego wierzchołkiem, to $G - v$ oznacza graf powstały z $G$ przez usunięcie $v$ i wszystkich krawędzi incydentnych z $v$.

# Wszystko, co trzeba wiedzieć

## Definicja

Jeśli $G$ jest grafem, a $v$ jego wierzchołkiem, to $G - v$ oznacza graf powstały z $G$ przez usunięcie $v$ i wszystkich krawędzi incydentnych z $v$.



## Definicja

Graf $G$ nazwiemy *dwudzielnym*, jeśli zbiór jego wierzchołków można podzielić na dwie części $X$ i $Y$ tak, że każda krawędź grafu $G$ ma jeden koniec w $X$, a drugi w $Y$.

## Definicja

Graf $G$ nazwiemy *dwudzielnym*, jeśli zbiór jego wierzchołków można podzielić na dwie części $X$ i $Y$ tak, że każda krawędź grafu $G$ ma jeden koniec w $X$, a drugi w $Y$.

## Definicja

Graf $G$ nazwiemy $2$-*spójnym*, jeśli ma co najmniej trzy wierzchołki oraz dla każdego wierzchołka $v$ grafu $G$ graf $G - v$ jest spójny.

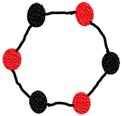
# Dwu i 2-

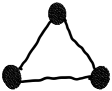
## Definicja

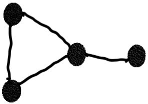
Graf $G$ nazwiemy *dwudzielnym*, jeśli zbiór jego wierzchołków można podzielić na dwie części $X$ i $Y$ tak, że każda krawędź grafu $G$ ma jeden koniec w $X$, a drugi w $Y$.

## Definicja

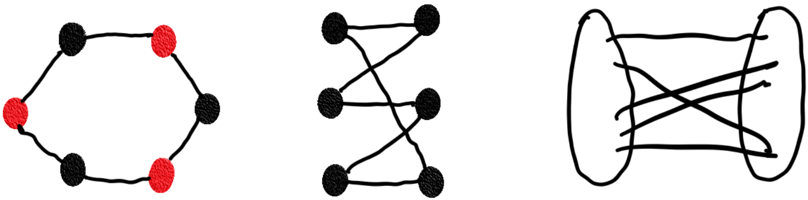
Graf $G$ nazwiemy $2$-*spójnym*, jeśli ma co najmniej trzy wierzchołki oraz dla każdego wierzchołka $v$ grafu $G$ graf $G - v$ jest spójny.



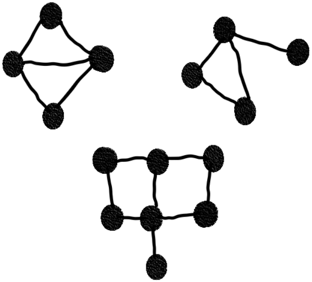


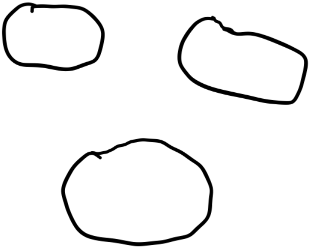


# Konwencje graficznej reprezentacji grafów

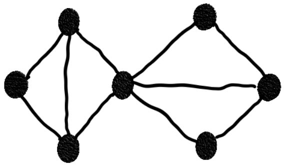


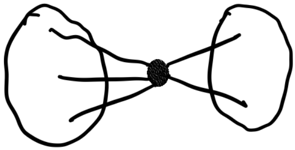
# Konwencje graficznej reprezentacji grafów



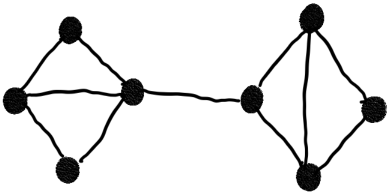


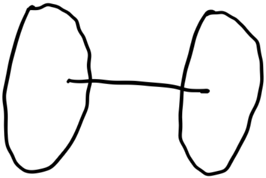
# Konwencje graficznej reprezentacji grafów



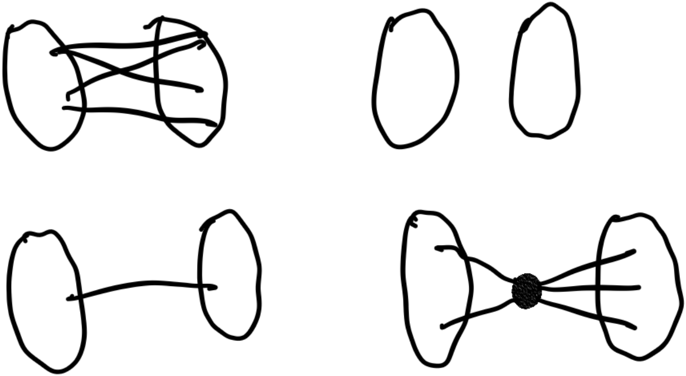


# Konwencje graficznej reprezentacji grafów





# Konwencje graficznej reprezentacji grafów



# Podwójne zliczanie, podwójne kłopoty

$$[n] := \{x \in \mathbb{N} : 1 \leqslant x \leqslant n\} = \{1, \ldots, n\}$$

$$\binom{[n]}{k} := \{A \in 2^{[n]} : |A| = k\}$$

# Podwójne zliczanie, podwójne kłopoty

$$[n] := \{x \in \mathbb{N} : 1 \leqslant x \leqslant n\} = \{1, \ldots, n\}$$

$$\binom{[n]}{k} := \{A \in 2^{[n]} : |A| = k\}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

# Podwójne zliczanie, podwójne kłopoty

$$[n] := \{x \in \mathbb{N} : 1 \leqslant x \leqslant n\} = \{1, \ldots, n\}$$

$$\binom{[n]}{k} := \{A \in 2^{[n]} : |A| = k\}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

# Podwójne zliczanie, podwójne kłopoty

$$[n] := \{x \in \mathbb{N} : 1 \leqslant x \leqslant n\} = \{1, \ldots, n\}$$

$$\binom{[n]}{k} := \{A \in 2^{[n]} : |A| = k\}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$$X := \{(x, A) \in [n] \times \binom{[n]}{k} : x \in A\}$$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$$X := \{(x, A) \in [n] \times \binom{[n]}{k} : x \in A\}$$

Dla każdego $x \in [n]$ jest dokładnie $\binom{n-1}{k-1}$ zbiorów $A \in \binom{[n]}{k}$ takich, że $x \in A$.

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$$X := \{(x, A) \in [n] \times \binom{[n]}{k} : x \in A\}$$

Dla każdego $x \in [n]$ jest dokładnie $\binom{n-1}{k-1}$ zbiorów $A \in \binom{[n]}{k}$ takich, że $x \in A$. Stąd $|X| = n\binom{n-1}{k-1}$.

# Podwójne zliczanie, podwójne kłopoty

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$$X := \{(x, A) \in [n] \times \binom{[n]}{k} : x \in A\}$$

Dla każdego $x \in [n]$ jest dokładnie $\binom{n-1}{k-1}$ zbiorów $A \in \binom{[n]}{k}$ takich, że $x \in A$. Stąd $|X| = n\binom{n-1}{k-1}$.

Dla każdego $A \in \binom{[n]}{k}$ jest dokładnie $k$ elementów $x \in [n]$ takich, że $x \in A$.

# Podwójne zliczanie, podwójne kłopoty

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$$X := \{(x, A) \in [n] \times \binom{[n]}{k} : x \in A\}$$

Dla każdego $x \in [n]$ jest dokładnie $\binom{n-1}{k-1}$ zbiorów $A \in \binom{[n]}{k}$ takich, że $x \in A$. Stąd $|X| = n\binom{n-1}{k-1}$.

Dla każdego $A \in \binom{[n]}{k}$ jest dokładnie $k$ elementów $x \in [n]$ takich, że $x \in A$. Stąd $|X| = k\binom{n}{k}$.

# Podwójne zliczanie, podwójne kłopoty

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

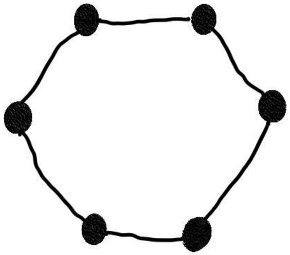
$$X := \{(x, A) \in [n] \times \binom{[n]}{k} : x \in A\}$$

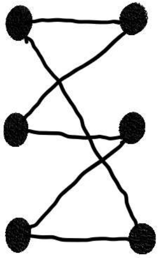
Dla każdego $x \in [n]$ jest dokładnie $\binom{n-1}{k-1}$ zbiorów $A \in \binom{[n]}{k}$ takich, że $x \in A$. Stąd $|X| = n\binom{n-1}{k-1}$.

Dla każdego $A \in \binom{[n]}{k}$ jest dokładnie $k$ elementów $x \in [n]$ takich, że $x \in A$. Stąd $|X| = k\binom{n}{k}$.

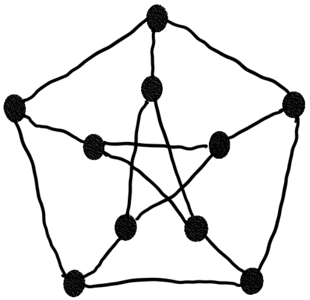
Oznacza to, że $k\binom{n}{k} = |X| = n\binom{n-1}{k-1}$.

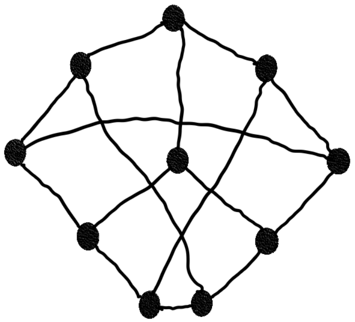
# Kłopotów z rysunkami ciąg dalszy



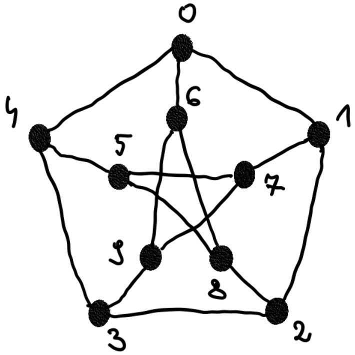


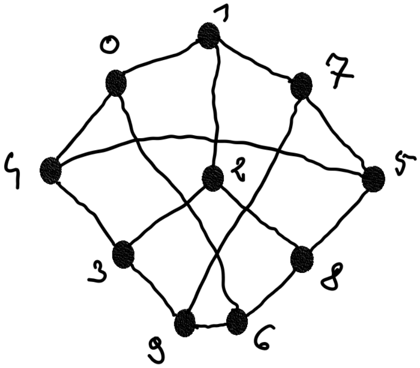
# Kłopotów z rysunkami ciąg dalszy



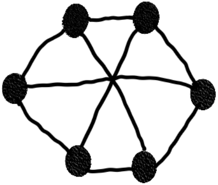


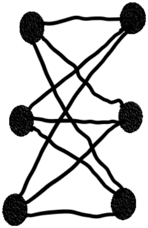
# Kłopotów z rysunkami ciąg dalszy

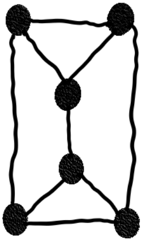


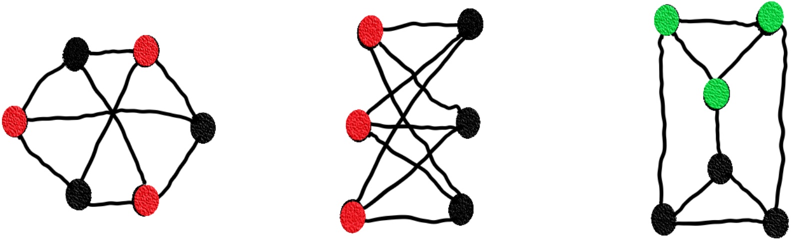
# Kłopotów z rysunkami ciąg dalszy



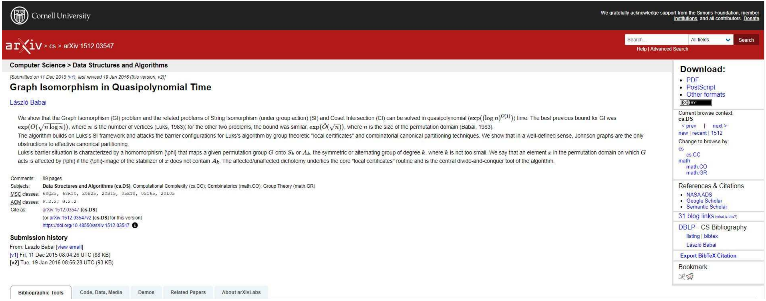




# Kłopotów z rysunkami ciąg dalszy



# Kłopotów z rysunkami ciąg dalszy



# „Krowa też. Ale nam chodzi o... O konia!”

Na ile sposobów można wybrać 2 graczy spośród 10 zawodników?

# „Krowa też. Ale nam chodzi o... O konia!”

Na ile sposobów można wybrać 2 graczy spośród 10 zawodników?

Na ile sposobów można wybrać do walki dwóch zapaśników spośród 10 zawodników?

# „Krowa też. Ale nam chodzi o... O konia!”

Na ile sposobów można wybrać 2 graczy spośród 10 zawodników?

Na ile sposobów można wybrać do walki dwóch zapaśników spośród 10 zawodników?

Na ile sposobów można wybrać do meczu dwóch szachistów spośród 10 zawodników?

**Definicja**

*Cyklem Eulera* w grafie $G$ nazywamy taki zamknięty spacer (sic!) w $G$, który zawiera wszystkie jego krawędzie (dokładnie raz).

# Wreszcie matematyka!

**Definicja**

*Cyklem Eulera* w grafie $G$ nazywamy taki zamknięty spacer (sic!) w $G$, który zawiera wszystkie jego krawędzie (dokładnie raz).

**Definicja**

*Cyklem Hamiltona* w grafie $G$ nazywamy taki zamknięty spacer (sic!) w $G$, który zawiera wszystkie jego wierzchołki dokładnie raz.

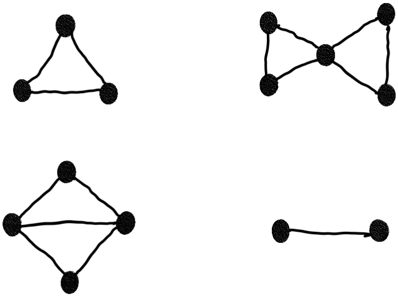
# Wreszcie matematyka!

**Definicja**

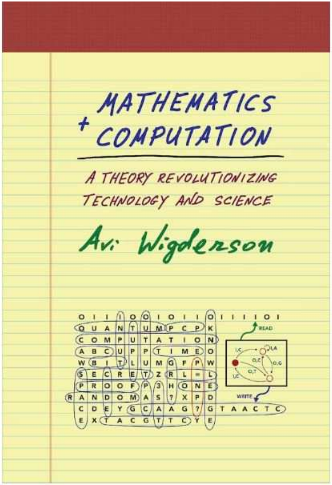
*Cyklem Eulera* w grafie $G$ nazywamy taki zamknięty spacer (sic!) w $G$, który zawiera wszystkie jego krawędzie (dokładnie raz).

**Definicja**

*Cyklem Hamiltona* w grafie $G$ nazywamy taki zamknięty spacer (sic!) w $G$, który zawiera wszystkie jego wierzchołki dokładnie raz.



# Słowa mają nie tylko znaczenie




Princeton University Press, 2019

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ :)!