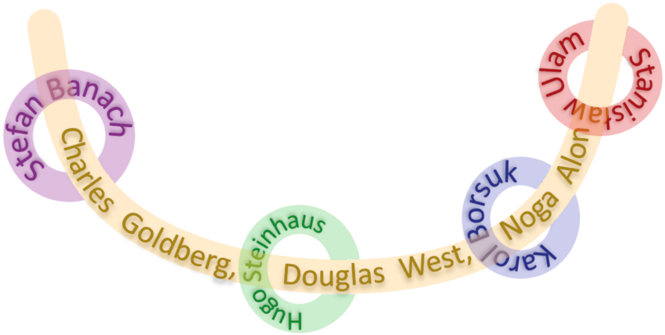
O uczciwych złodziejach naszyjników

Małgorzata Śleszyńska-Nowak

Politechnika Warszawska,
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

25 sierpnia 2023

Naszyjnik wielkich matematyków



Podstawowy przypadek

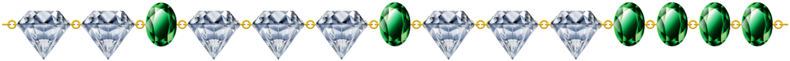
Dwóch złodziei  ukradło naszyjnik składający się z diamentów  i szmaragdów .

Podstawowy przypadek

Dwóch złodziei  ukradło naszyjnik składający się z diamentów  i szmaragdów .

Podstawowy przypadek

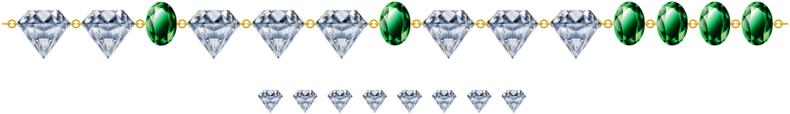
Dwóch złodziei  ukradło naszyjnik składający się z diamentów  i szmaragdów .



Złodzieje są uczciwi. Chcą pociąć naszyjnik *sprawiedliwie*, czyli tak, aby każdy mógł dostać tę samą liczbę diamentów i tę samą liczbę szmaragdów.

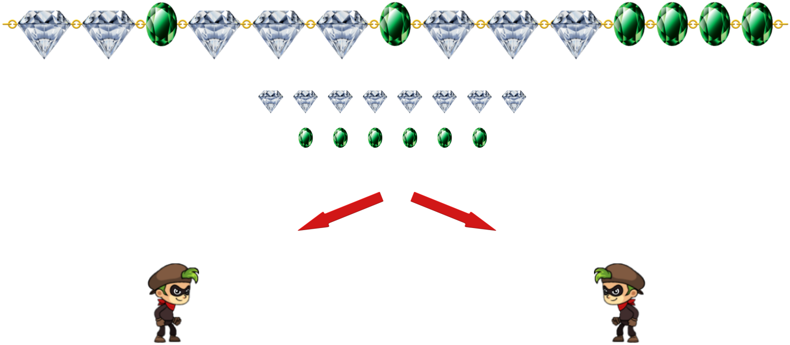
Dwóch uczciwych złodziei

Dwóch uczciwych złodziei

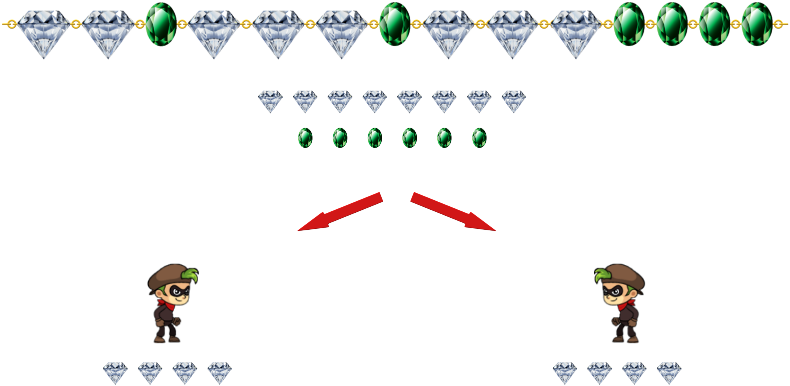


Dwóch uczciwych złodziei

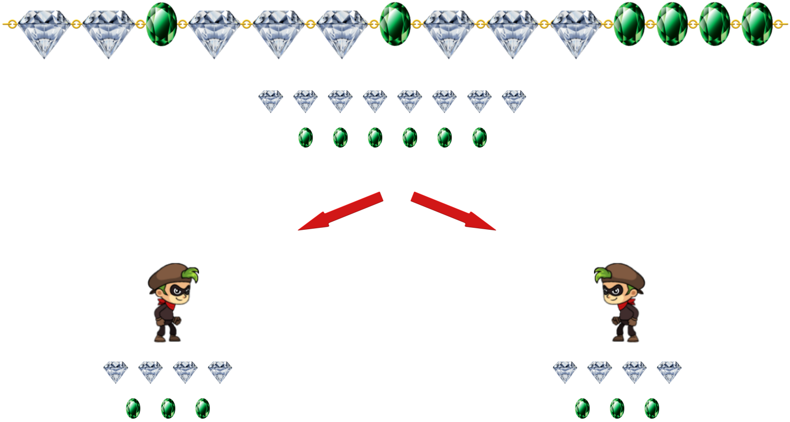
Dwóch uczciwych złodziei



Dwóch uczciwych złodziei



Dwóch uczciwych złodziei



Nie niszczmy złotego łańcuszka

Złodzieje chcą przeciąć naszyjnik w jak najmniejszej liczbie miejsc.

Definicja problemu

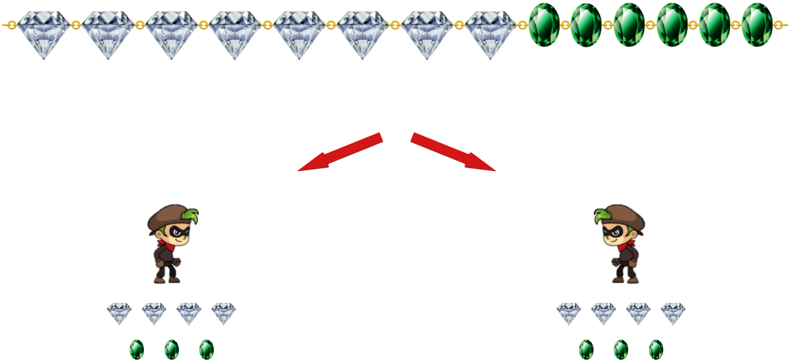
Dane:

- Liczba złodziei: 2
- Naszyjnik: ciąg składający się z $2n_1$ diamentów i $2n_2$ szmaragdów

Szukane:
Minimalna liczba cięć potrzebna do sprawiedliwego podziału naszyjnika.

Przykład 1

Przykład 1



Przykład 1

Przykład 1

Przykład 1

Dwóch uczciwych złodziei

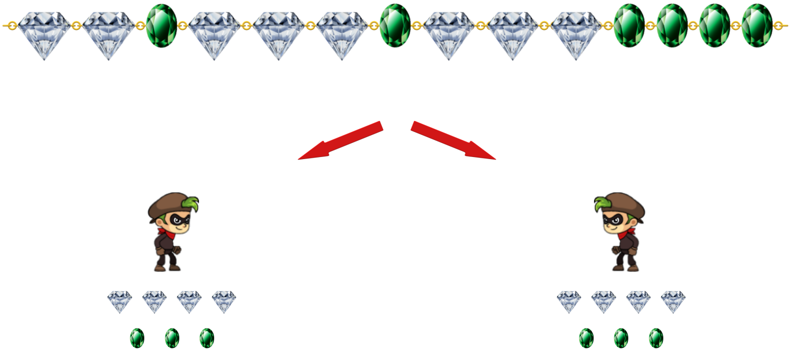
Wniosek:
Czasami 2 cięcia są konieczne.

Wniosek:
Czasami 2 cięcia są konieczne.

Pytanie:
Czy 2 cięcia zawsze wystarczą?

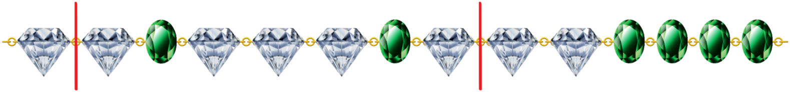
Przykład 2

Przykład 2



Przykład 2

Przykład 2



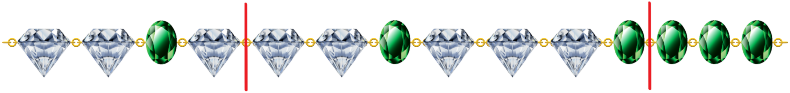
5

2

Przykład

Przykład

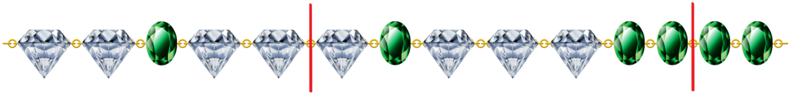
Przykład



 5

 2

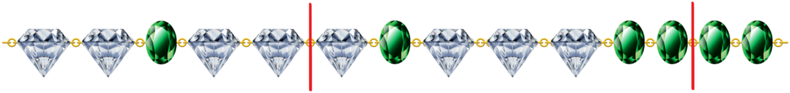
Przykład



 4

 3

Przykład



SUKCES!

Dwóch uczciwych złodziei

Twierdzenie (Ch. H. Goldberg, D. B. West 1985)

*Każdy naszyjnik składający się z **dwóch** rodzajów kamieni można podzielić sprawiedliwie pomiędzy **dwóch** złodziei wykonując **co najwyżej dwa cięcia**.*

Szkic dowodu

Algorytm

1. Zrób pierwsze cięcie w połowie naszyjnika

Szkic dowodu

Algorytm

1. Zrób pierwsze cięcie w połowie naszyjnika
   a. jeżeli w obu częściach jest tyle samo diamentów to KONIEC

Szkic dowodu

Algorytm

1. Zrób pierwsze cięcie w połowie naszyjnika
   a. jeżeli w obu częściach jest tyle samo diamentów to KONIEC

   b. w przeciwnym przypadku idź do punktu 2

Szkic dowodu

Algorytm

1. Zrób pierwsze cięcie w połowie naszyjnika
   a. jeżeli w obu częściach jest tyle samo diamentów to KONIEC

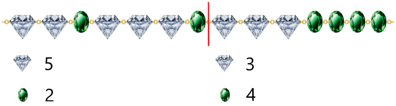
   b. w przeciwnym przypadku idź do punktu 2
      Tak się dzieje wtedy, gdy w jednej części jest więcej diamentów, załóżmy, że w lewej

Szkic dowodu

Algorytm

1. Zrób pierwsze cięcie w połowie naszyjnika
   a. jeżeli w obu częściach jest tyle samo diamentów to KONIEC

   b. w przeciwnym przypadku idź do punktu 2
      Tak się dzieje wtedy, gdy w jednej części jest więcej diamentów, załóżmy, że w lewej

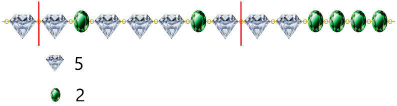


Szkic dowodu cd.

2. Przesuń cięcie o jeden kamień w prawo, dodaj drugie cięcie za pierwszym kamieniem

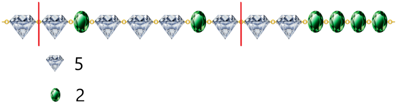
Szkic dowodu cd.

2. Przesuń cięcie o jeden kamień w prawo, dodaj drugie cięcie za pierwszym kamieniem



Szkic dowodu cd.

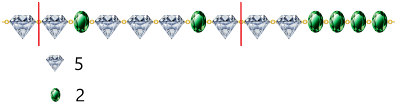
2. Przesuń cięcie o jeden kamień w prawo, dodaj drugie cięcie za pierwszym kamieniem



   a. jeżeli liczba diamentów w środkowej części jest równa sumie liczb diamentów w częściach lewej i prawej to KONIEC

Szkic dowodu cd.

2. Przesuń cięcie o jeden kamień w prawo, dodaj drugie cięcie za pierwszym kamieniem



   a. jeżeli liczba diamentów w środkowej części jest równa sumie liczb diamentów w częściach lewej i prawej to KONIEC
   b. w przeciwnym przypadku idź do punktu 3

Szkic dowodu cd.

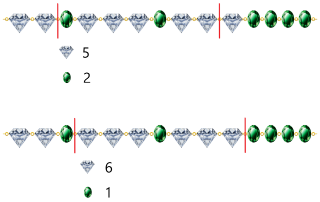
3. Dopóki liczba diamentów w środkowej części jest różna od sumy liczb diamentów w częściach lewej i prawej, przesuwaj oba cięcia o jeden kamień w prawo

Szkic dowodu cd.

3. Dopóki liczba diamentów w środkowej części jest różna od sumy liczb diamentów w częściach lewej i prawej, przesuwaj oba cięcia o jeden kamień w prawo

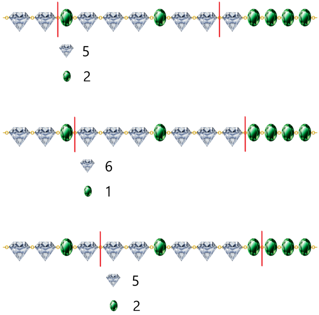
Szkic dowodu cd.

3. Dopóki liczba diamentów w środkowej części jest różna od sumy liczb diamentów w częściach lewej i prawej, przesuwaj oba cięcia o jeden kamień w prawo



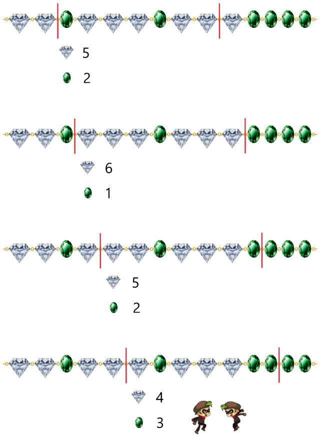
Szkic dowodu cd.

3. Dopóki liczba diamentów w środkowej części jest różna od sumy liczb diamentów w częściach lewej i prawej, przesuwaj oba cięcia o jeden kamień w prawo



Szkic dowodu cd.

3. Dopóki liczba diamentów w środkowej części jest różna od sumy liczb diamentów w częściach lewej i prawej, przesuwaj oba cięcia o jeden kamień w prawo



Szkic dowodu cd.

Obserwacja

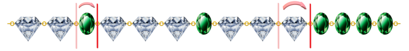
Przy przesuwaniu cięć liczba diamentów w środkowej części może

Szkic dowodu cd.

Obserwacja

Przy przesuwaniu cięć liczba diamentów w środkowej części może

- *zwiększyć się o* 1

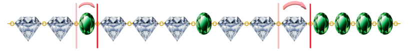


Szkic dowodu cd.

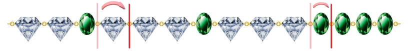
Obserwacja

Przy przesuwaniu cięć liczba diamentów w środkowej części może

- *zwiększyć się o* 1



- *zmniejszyć się o* 1

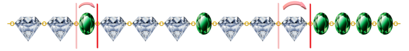


Szkic dowodu cd.

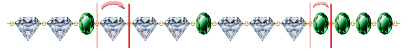
Obserwacja

Przy przesuwaniu cięć liczba diamentów w środkowej części może

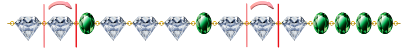
- *zwiększyć się o* 1



- *zmniejszyć się o* 1

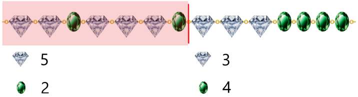


- *pozostać taka sama*



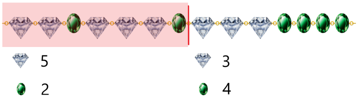
Szkic dowodu cd.

Stan początkowy: za dużo diamentów



Szkic dowodu cd.

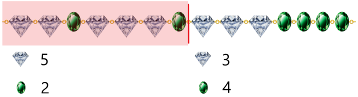
Stan początkowy: za dużo diamentów



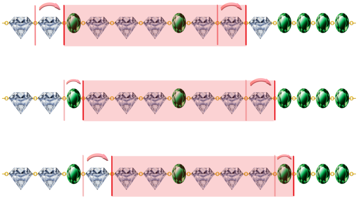
Stany pośrednie: $+/-1$ diament

Szkic dowodu cd.

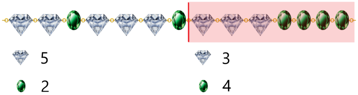
Stan początkowy: za dużo diamentów



Stany pośrednie: $+/-1$ diament



Stan końcowy: za mało diamentów



Szkic dowodu cd.

Wniosek

Istnieje stan pośredni, w którym liczba diamentów w środkowej części równa jest połowie liczby wszystkich diamentów z naszyjnika.

□

Czterech uczciwych złodziei

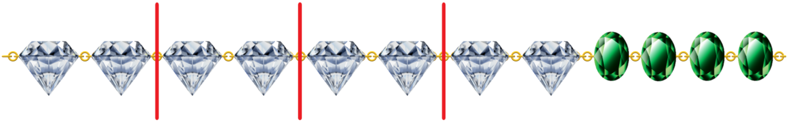
Definicja problemu:

- Liczba złodziei: 4
- Naszyjnik: ciąg składający się z $4n_1$ diamentów i $4n_2$ szmaragdów

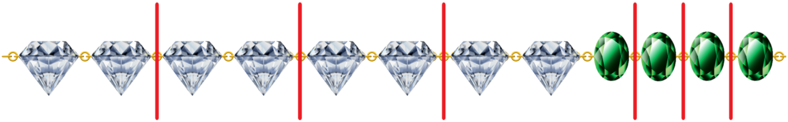
Szukane:
Minimalna liczba cięć potrzebna do sprawiedliwego podziału naszyjnika (czyli takiego, aby każdy ze złodziei mógł dostać tę samą liczbę diamentów i tę samą liczbę szmaragdów).

Czterech uczciwych złodziei

Czterech uczciwych złodziei



Czterech uczciwych złodziei



Wniosek:
Czasami 6 cięć jest koniecznych.

Wniosek:
Czasami 6 cięć jest koniecznych.

Pytanie:
Czy 6 cięć zawsze wystarczy?

Wniosek:
Czasami 6 cięć jest koniecznych.

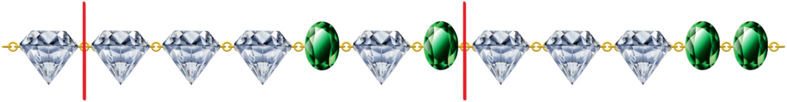
Pytanie:
Czy 6 cięć zawsze wystarczy? TAK!

Dzielimy złodziei na dwie grupy.

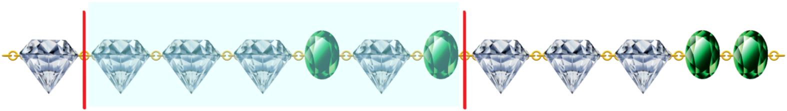
Dzielimy złodziei na dwie grupy.

Najpierw dzielimy naszyjnik tak, jak dla dwóch złodziei.

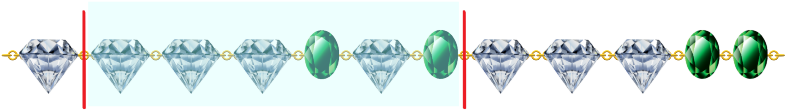
Czterech uczciwych złodziei

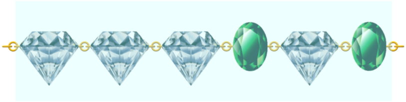


Czterech uczciwych złodziei

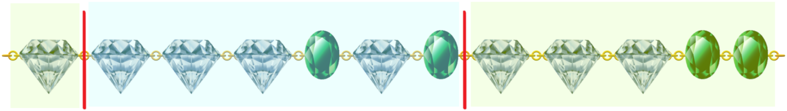


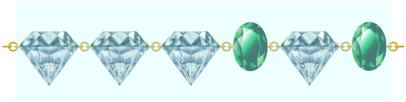
Czterech uczciwych złodziei



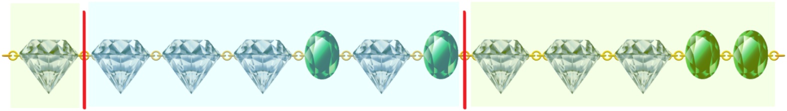


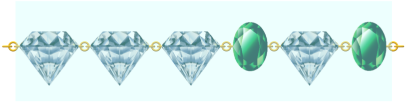
Czterech uczciwych złodziei

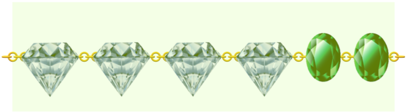




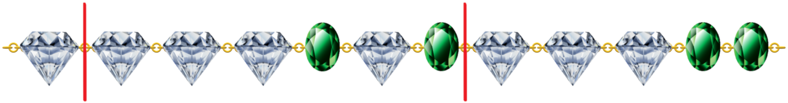
Czterech uczciwych złodziei



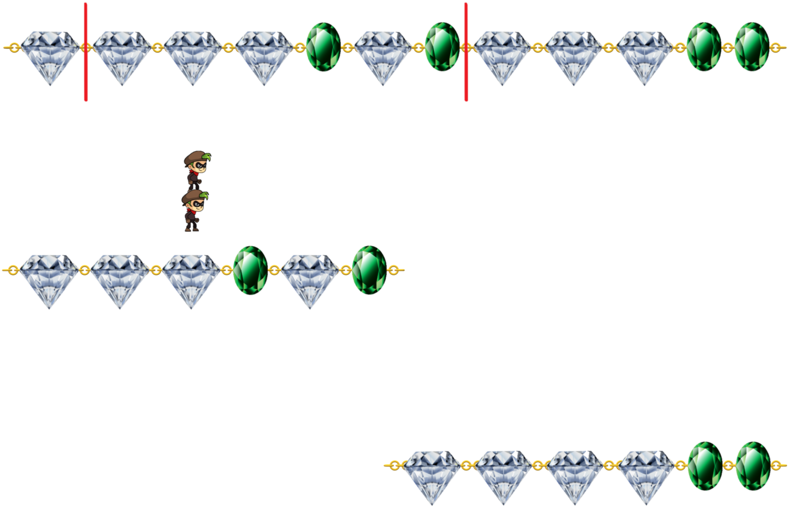




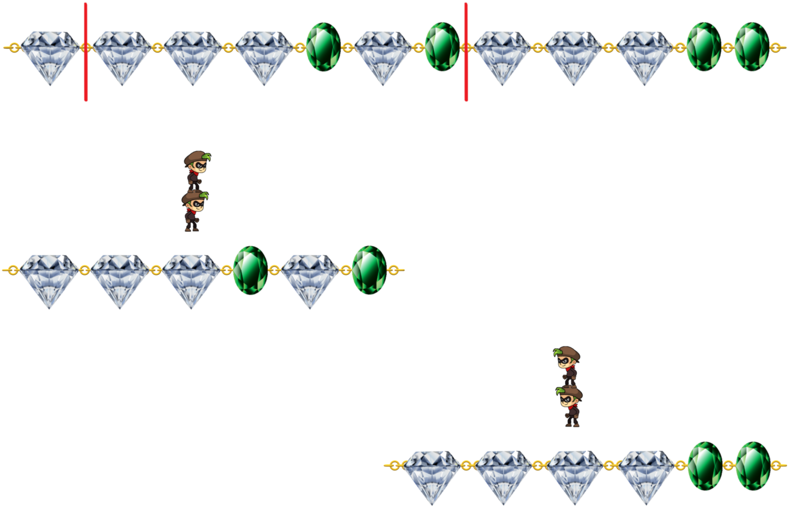
Czterech uczciwych złodziei



Czterech uczciwych złodziei



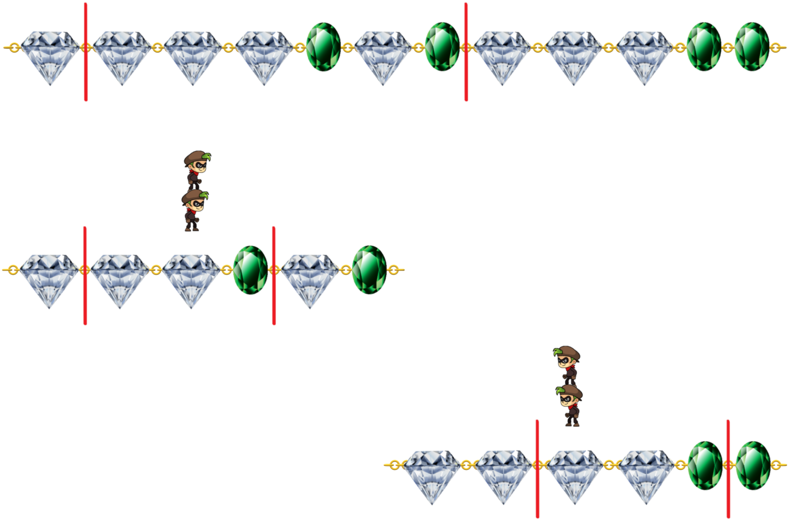
Czterech uczciwych złodziei



Czterech uczciwych złodziei

Następnie każdą z otrzymanych części dzielimy na dwóch złodziei.

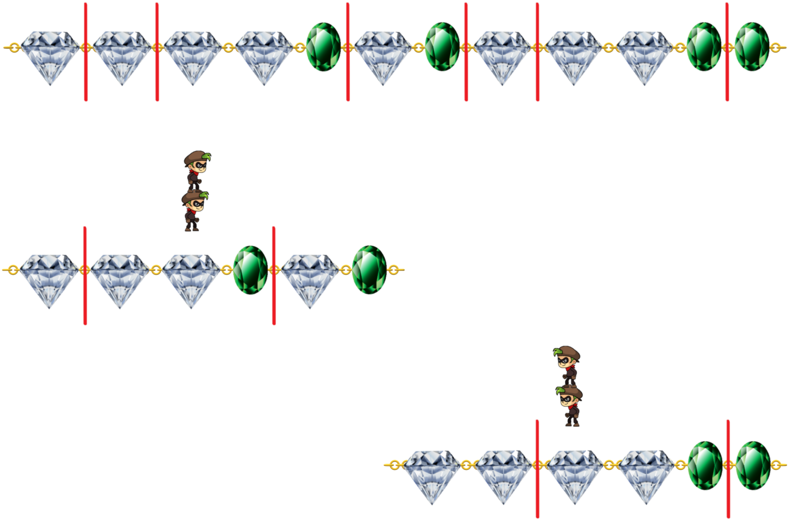
Czterech uczciwych złodziei



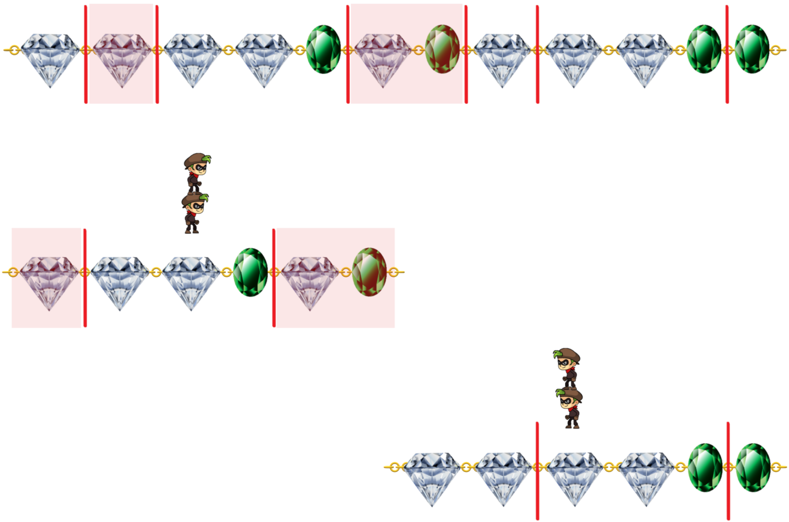
Czterech uczciwych złodziei

Na koniec wracamy z cięciami do oryginalnego naszyjnika.

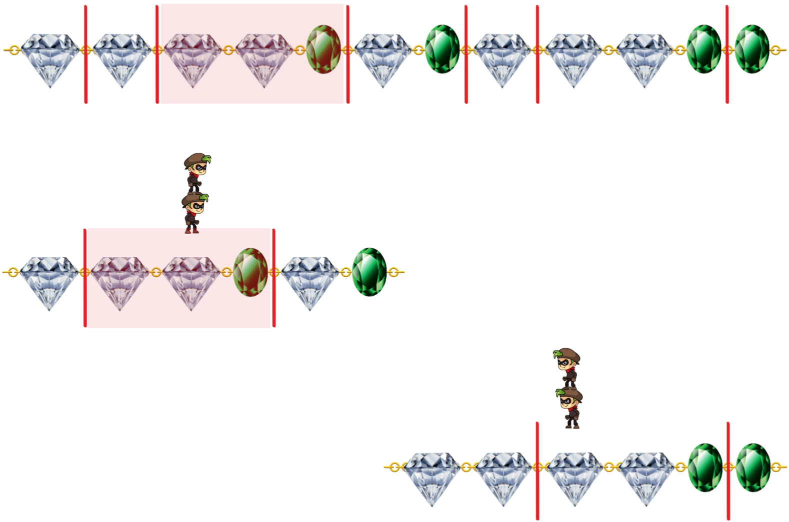
Czterech uczciwych złodziei



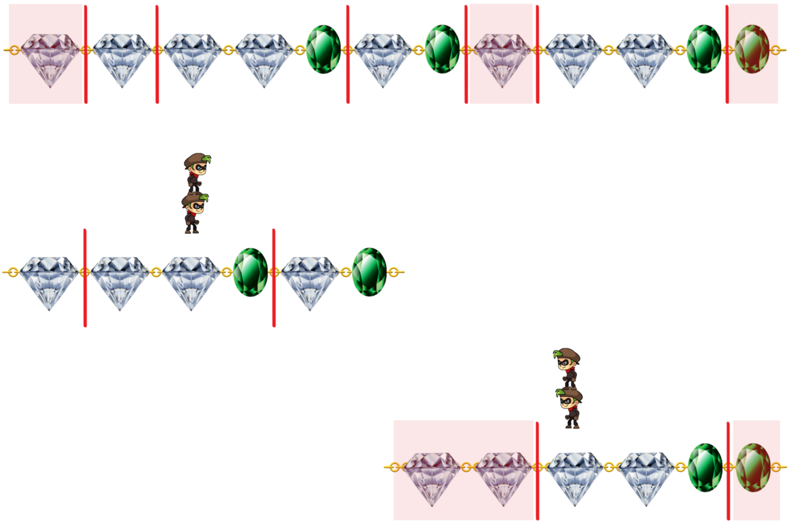
Czterech uczciwych złodziei



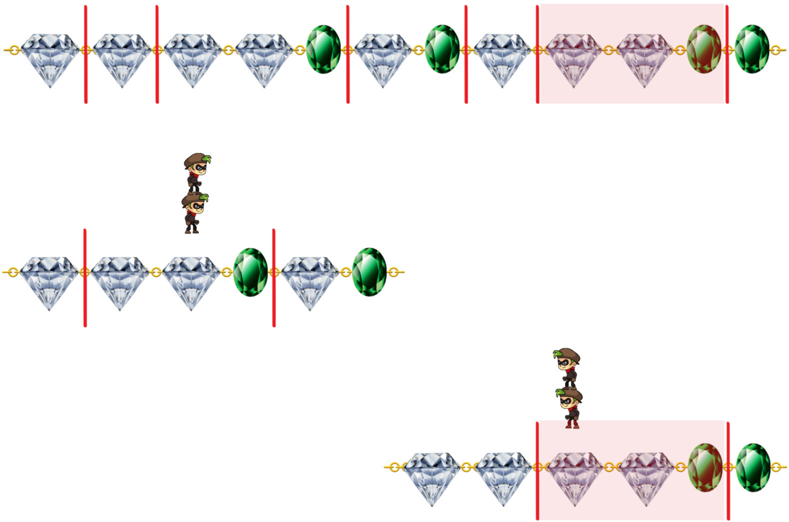
Czterech uczciwych złodziei



Czterech uczciwych złodziei



Czterech uczciwych złodziei



2^k uczciwych złodziei

Wniosek

Czterech uczciwych złodziei może się podzielić naszyjnikiem złożonym z dwóch rodzajów kamieni wykonując $2+2*2=2^1+2^2=6$ *cięć.*

2^k uczciwych złodziei

Wniosek

Czterech uczciwych złodziei może się podzielić naszyjnikiem złożonym z dwóch rodzajów kamieni wykonując $2 + 2 * 2 = 2^1 + 2^2 = 6$ *cięć.*

Wniosek

8 *uczciwych złodziei może się podzielić naszyjnikiem złożonym z dwóch rodzajów kamieni wykonując* $2 + 2 * (2^1 + 2^2) = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$ *cięć.*

2^k uczciwych złodziei

Wniosek

Czterech uczciwych złodziei może się podzielić naszyjnikiem złożonym z dwóch rodzajów kamieni wykonując $2 + 2 * 2 = 2^1 + 2^2 = 6$ *cięć.*

Wniosek

8 *uczciwych złodziei może się podzielić naszyjnikiem złożonym z dwóch rodzajów kamieni wykonując* $2 + 2 * (2^1 + 2^2) = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$ *cięć.*

Wniosek

2^k *uczciwych złodziei może się podzielić naszyjnikiem złożonym z dwóch rodzajów kamieni wykonując* $2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 2$ *cięć.*

Dodajemy rubiny

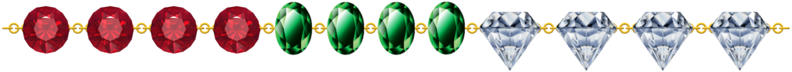
Dodajemy rubiny

Definicja problemu:

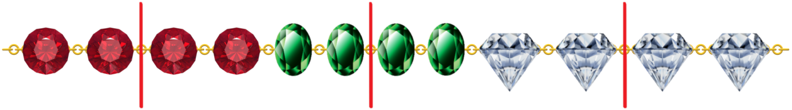
- Liczba złodziei: 2
- Naszyjnik: ciąg składający się z $2n_1$ diamentów, $2n_2$ szmaragdów i $2n_3$ rubinów

Szukane:
Minimalna liczba cięć potrzebna do sprawiedliwego podziału naszyjnika (czyli takiego, aby każdy ze złodziei mógł dostać tę samą liczbę diamentów, tę samą liczbę szmaragdów i tę samą liczbę rubinów).

Diamenty, szmaragdy i rubiny



Diamenty, szmaragdy i rubiny



Diamenty, szmaragdy i rubiny

Wniosek:
Czasami 3 cięcia są konieczne.

Wniosek:
Czasami 3 cięcia są konieczne.

Pytanie:
Czy 3 cięcia zawsze wystarczą?

Diamenty, szmaragdy i rubiny

Wniosek:
Czasami 3 cięcia są konieczne.

Pytanie:
Czy 3 cięcia zawsze wystarczą? TAK!

Problem kanapki

Problem (Hugo Steinhaus)

Czy dowolną kromkę z masłem i szynką można przekroić jednym prostym cięciem noża tak, żeby każdy kawałek składał się z takiej samej ilości masła, chleba oraz szynki?

Twierdzenie o kanapce

Odpowiedź: TAK!

Odpowiedź: TAK!

Twierdzenie (S. Banach 1938)

Dla dowolnych trzech mierzalnych zbiorów z przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ *istnieje płaszczyzna, która dzieli każdy z tych trzech zbiorów na dwie części o równej mierze.*

Twierdzenie o kanapce

Odpowiedź: TAK!

Twierdzenie (S. Banach 1938)

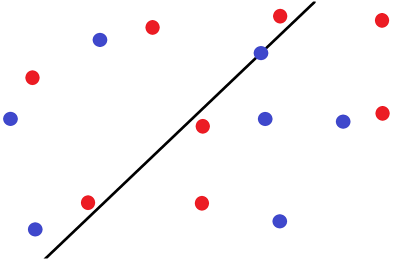
Dla dowolnych trzech mierzalnych zbiorów z przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ *istnieje płaszczyzna, która dzieli każdy z tych trzech zbiorów na dwie części o równej mierze.*

Dowód korzysta z twierdzenia Borsuka-Ulama o antypodach. „W każdej chwili czasu istnieją na kuli ziemskiej dwa punkty leżące dokładnie naprzeciwko siebie, w których temperatura i ciśnienie są identyczne”

Twierdzenie o kanapce

Twierdzenie (A. Stone, J. Tukey 1942 (wersja dyskretna))

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_d \in R^d$ będą rozłącznymi, skończonymi zbiorami punktów, takimi że nie więcej niż d punktów z $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_d$ należy do jednej hiperpłaszczyzny. Wówczas istnieje hiperpłaszczyzna h, która dzieli każde A_i w taki sposób, że dokładnie $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ punktów z A_i należy do każdej z otwartych półprzestrzeni wyznaczonych przez h i co najwyżej jeden punkt z A_i leży na hiperpłaszczyźnie h.



Twierdzenie (C. H. Goldberg, D. West 1985)

*Każdy naszyjnik składający się z **d** rodzajów kamieni można sprawiedliwie podzielić pomiędzy **dwóch** uczciwych złodziei wykonując **co najwyżej d cięć**.*

Dowód

Umieśćmy naszyjnik w przestrzeni R^d wzdłuż krzywej momentu γ, $\gamma(t) = (t, t^2, \dots, t^d)$.

Dowód

Umieśćmy naszyjnik w przestrzeni R^d wzdłuż krzywej momentu γ, $\gamma(t) = (t, t^2, \ldots, t^d)$.

Dowód

Umieśćmy naszyjnik w przestrzeni R^d wzdłuż krzywej momentu γ, $\gamma(t) = (t, t^2, \ldots, t^d)$.

Niech:
A_i - zbiór punktów odpowiadających kamieniom $i-$tego rodzaju, dla $i \in 1, 2, \ldots, d$.

Dowód

Umieśćmy naszyjnik w przestrzeni R^d wzdłuż krzywej momentu γ, $\gamma(t) = (t, t^2, \ldots, t^d)$.

Niech:
A_i - zbiór punktów odpowiadających kamieniom $i-$tego rodzaju, dla $i \in 1, 2, \ldots, d$.

Zauważmy, że nie więcej niż d punktów z $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_d$ należy do jednej hiperpłaszczyzny.

Dowód c.d

$d = 2$
krzywa momentu (parabola):

$$(t, t^2)$$

Prosta:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + C = 0$$

Po podstawieniu:

$$a_1 t + a_2 t^2 + C = 0$$

Wielomian stopnia 2 ma co najwyżej 2 miejsca zerowe.

Dowód c.d

$d = 2$
krzywa momentu (parabola):

$$(t, t^2)$$

Prosta:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + C = 0$$

Po podstawieniu:

$$a_1 t + a_2 t^2 + C = 0$$

Wielomian stopnia 2 ma co najwyżej 2 miejsca zerowe.

Ogólnie
krzywa momentu:

$$(t, t^2, \ldots, t^d)$$

Hiperpłaszczyzna:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_d x_d + C = 0$$

Wielomian stopnia d ma co najwyżej d miejsc zerowych.

Dowód cd.

Z dyskretnej wersji twierdzenia o kanapce istnieje hiperpłaszczyzna dzieląca każde A_i tak, że dokładnie $\frac{1}{2}|A_i|$ punktów z A_i należy do każdej z otwartych półprzestrzeni wyznaczonych przez h.

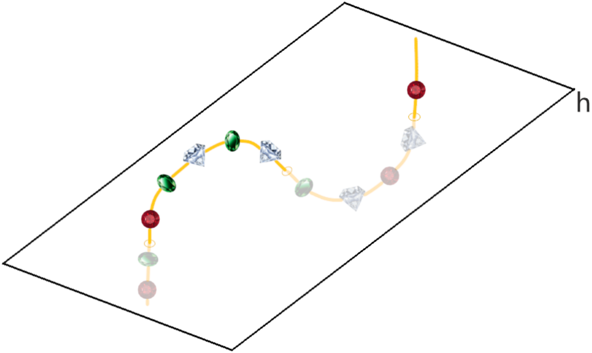
Dowód cd.

Z dyskretnej wersji twierdzenia o kanapce istnieje hiperpłaszczyzna dzieląca każde A_i tak, że dokładnie $\frac{1}{2}|A_i|$ punktów z A_i należy do każdej z otwartych półprzestrzeni wyznaczonych przez h.

Hiperpłaszczyzna h przecina krzywą momentu w co najwyżej d punktach.

Dowód cd.

Z dyskretnej wersji twierdzenia o kanapce istnieje hiperpłaszczyzna dzieląca każde A_i tak, że dokładnie $\frac{1}{2}|A_i|$ punktów z A_i należy do każdej z otwartych półprzestrzeni wyznaczonych przez h.
Hiperpłaszczyzna h przecina krzywą momentu w co najwyżej d punktach.

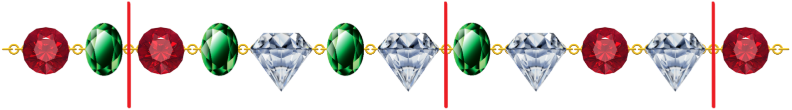


Dowód cd.

Punkty przecięcia hiperpłaszczyzny i krzywej wyznaczają miejsca cięć w naszyjniku.

Dowód cd.

Punkty przecięcia hiperpłaszczyzny i krzywej wyznaczają miejsca cięć w naszyjniku.

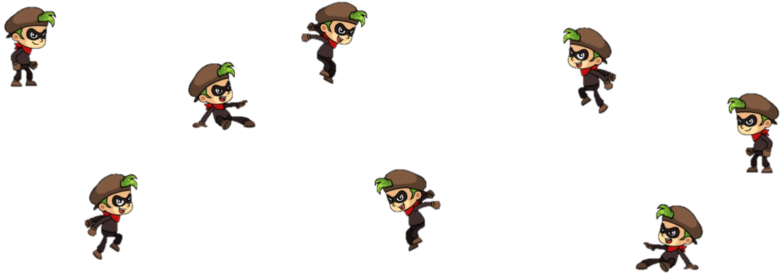


$\square$

Większa grupa złodziei

Twierdzenie (N. Alon 1987)

*Każdy naszyjnik składający się z **d** rodzajów kamieni można sprawiedliwie podzielić pomiędzy **q** uczciwych złodziei wykonując **co najwyżej d(q-1) cięć**.*

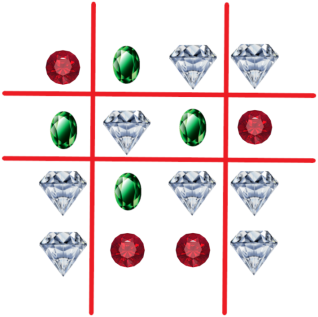


Problem otwarty

Problem (J. Grytczuk, W. Lubawski, 2015))

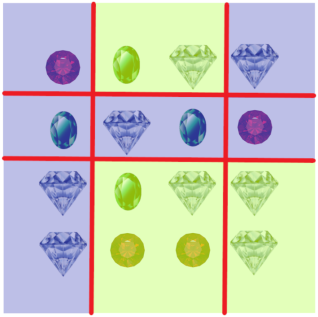
*Ile cięć potrzeba aby sprawiedliwie podzielić dwuwymiarowy naszyjnik składający się z **k** rodzajów kamieni pomiędzy **dwóch** uczciwych złodziei?*

Problem otwarty - przykład



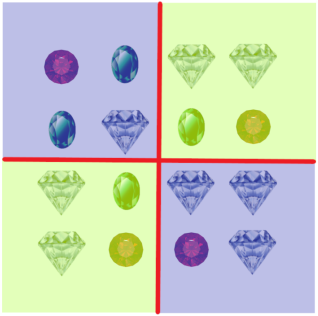
4 cięcia

Problem otwarty - przykład



4 cięcia

Problem otwarty - przykład



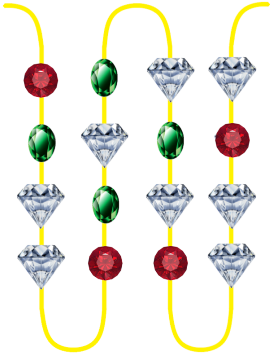
2 cięcia

Problem otwarty - co wiadomo?

$3k$ cięć wystarczy

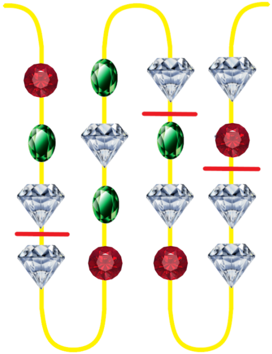
Problem otwarty - co wiadomo?

$3k$ cięć wystarczy



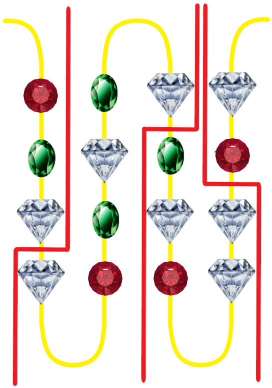
Problem otwarty - co wiadomo?

$3k$ cięć wystarczy



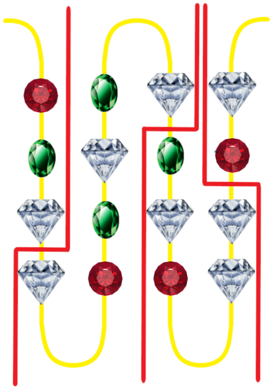
Problem otwarty - co wiadomo?

$3k$ cięć wystarczy



Problem otwarty - co wiadomo?

$3k$ cięć wystarczy



Dla $k \geq 3$ czasami potrzeba $3k - 2$ cięć.

Dla $k = 2$ czasami potrzeba 3 cięć.

Problem otwarty - diamenty i szmaragdy

Ile cięć potrzeba aby sprawiedliwie podzielić dwuwymiarowy naszyjnik składający się z **diamentów i szmaragdów** pomiędzy **dwóch** uczciwych złodziei?

Problem otwarty - diamenty i szmaragdy

Ile cięć potrzeba aby sprawiedliwie podzielić dwuwymiarowy naszyjnik składający się z **diamentów i szmaragdów** pomiędzy **dwóch** uczciwych złodziei?

3, 4, 5 czy 6?

Dziękuję za uwagę!