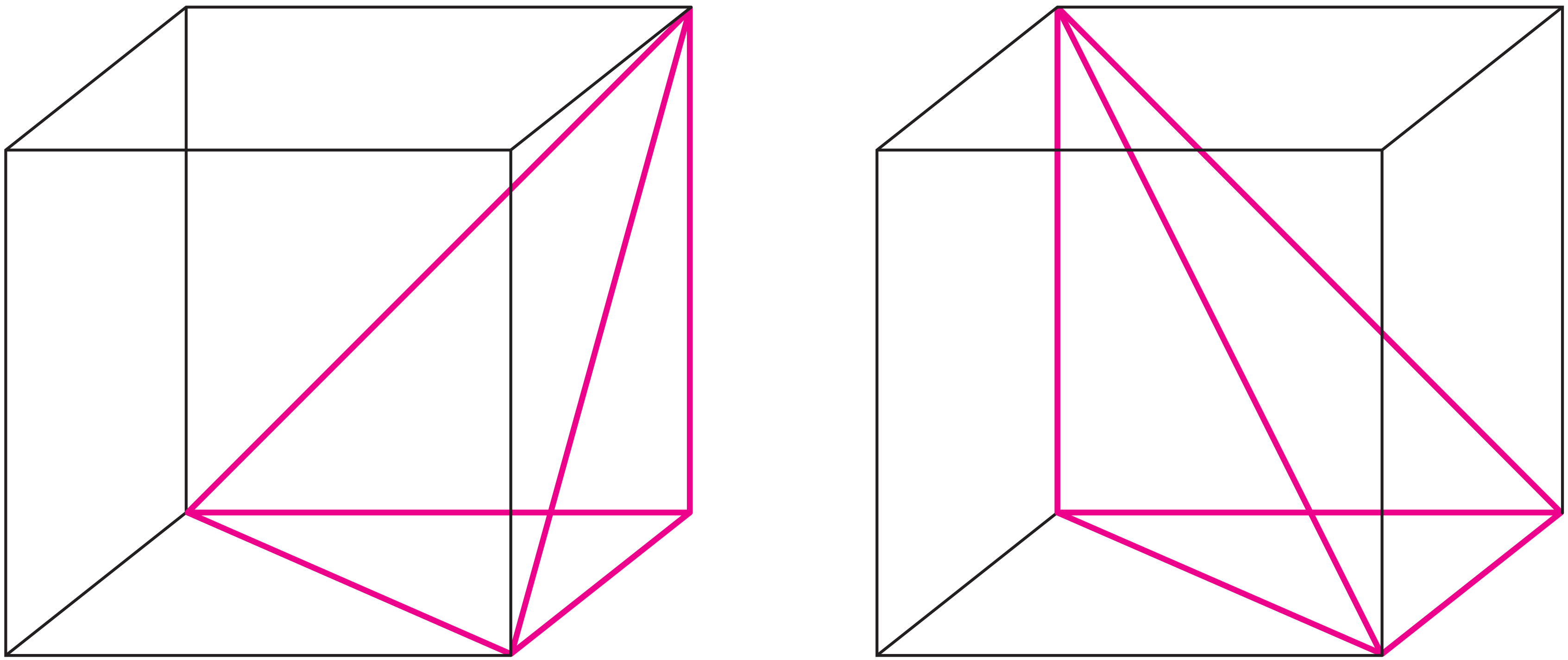
Są bardzo podobne



ale są zasadniczo różne

KWADRATURA

kontra

KUBATURA

czyli rzecz o III. problemie Hilberta

Mierzenie pola wielokąta czy objętości wielościanu,
czyli znalezienie ich (odpowiedniej) miary Jordana,
wedle jej definicji przebiega zupełnie tak samo: umieszczamy obiekt w siatce odpowiednio kwadratowej czy sześciennej i zliczamy liczbę jej oczek wewnątrz tego obiektu.
Potem rozmiary oczek wielokrotnie dwukrotnie zmniejszamy za każdym razem zliczając oczka. Jeśli w i-tej siatce znajdujemy k_i oczek, to ciąg odpowiednio $\frac{k_i}{4^{i-1}}$ czy $\frac{k_i}{8^{i-1}}$ okazuje się zbieżny i jego granica to odpowiednio pole czy objętość mierzonego obiektu.

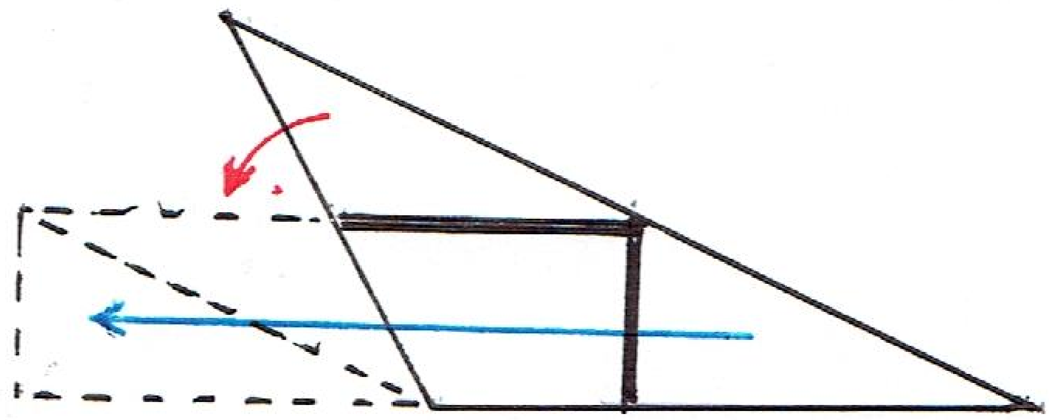
Euklides jednak nie znał miary Jordana i mierzył inaczej.
Inaczej w dwojakim sensie: inaczej niż jest to opisane wyżej i inaczej dla wielokąta a inaczej dla wielościanu.

Dlaczego działał inaczej?
Czy nie mógł w obu przypadkach postępować tak samo?

- Wielokąt można pociąć na trójkąty;

- Wielokąt można pociąć na trójkąty;

•• trójkąt można zamienić na prostokąt



- Wielokąt można pociąć na trójkąty;

●● trójkąt można zamienić na prostokąt;

●●● prostokąt można zamienić na kwadrat:

$ABCD$ na $AHFE$ – ozn. $AB = a$, $AD = b$, $AE = c$;

mamy

$ab = c^2 \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{a-c}{c-b}$,

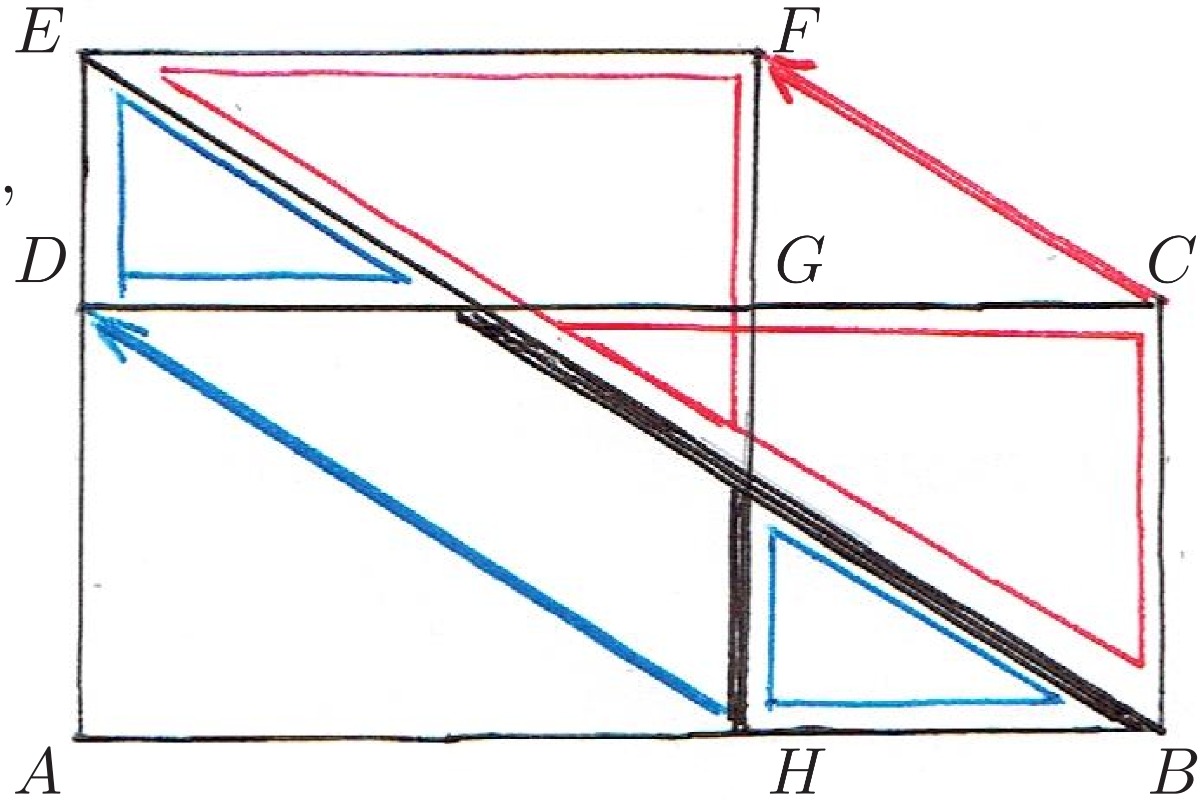
skąd

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AH}{AD} = \frac{GC}{GF},$$

czyli

$BE \parallel HD \parallel CF$

(odwrotne tw. Talesa).



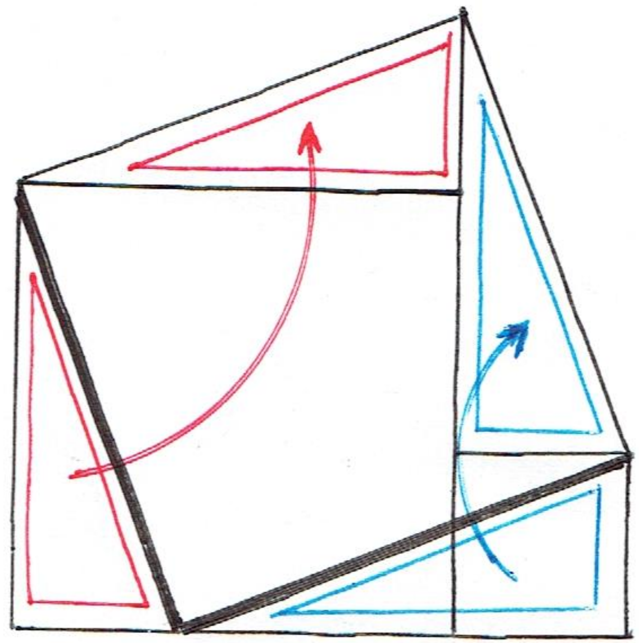
(2000 lat później odkryli to Farkas Bolyai i Paul Gerwien).

- Wielokąt można pociąć na trójkąty;

●● trójkąt można zamienić na prostokąt;

●●● prostokąt można zamienić na kwadrat;

●●●● dwa kwadraty można zamienić na jeden.



- Wielokąt można pociąć na trójkąty;

●● trójkąt można zamienić na prostokąt;

●●● prostokąt można zamienić na kwadrat;

●●●● dwa kwadraty można zamienić na jeden.

W konsekwencji

każdy wielokąt można zamienić "tangramowo" na kwadrat,

pole tego kwadratu to pole wielokąta.

Wniosek. Dowolne dwa wielokąty o tym samym polu

są równoważne przez pocięcie.

● Wielokąt można pociąć na trójkąty;
●● trójkąt można zamienić na prostokąt;
●●● prostokąt można zamienić na kwadrat;
●●●● dwa kwadraty można zamienić na jeden.

W konsekwencji

każdy wielokąt można zamienić "tangramowo" na kwadrat,
pole tego kwadratu to pole wielokąta.

Wniosek. Dowolne dwa wielokąty o tym samym polu
są równoważne przez pocięcie.

Spostrzeżenie (prawie oczywiste). Powyższa metoda pozwala zamienić przez pocięcie dowolny graniastosłup na sześcian.

Oczywiście, nie każdy wielościan da się podzielić na graniastosłupy.

Euklides, nie widząc sposobu na udowodnienie, że każdy wielościan da się przez pocięcie przekształcić na sześcian,

(słusznie – dziś wiemy, że taki sposób nie istnieje)

kluczowy dla sprawy problem objętości czworościanu,

bo każdy wielościan na czworościany da się podzielić,

rozwiązał za pomocą metody wyczerpywania.

Metoda wyczerpywania Eudoksos (−408;−355)

Jeśli z jakiejś figury płaskiej (przestrzennej) wyjmiesz więcej niż połowę, z tego co zostanie znów wyjmiesz więcej niż połowę i będziesz tak postępował dalej, to suma pól (objętości) wyjętych części dowolnie dokładnie przybliży pole (objętość) tej figury.

Uzasadnia to następujący rachunek.

Oznaczmy poszukiwane pole figury przez S, a kolejno wyjmowane fragmenty (nie muszą być w jednym kawałku) przez U_1, U_2, $U_3, \ldots$ Z założenia $U_1 \geqslant \frac{1}{2}S$ i $U_k \geqslant \frac{1}{2}(S - (U_1 + \ldots + U_{k-1}))$.

Wykażemy, że $U_1 + U_2 + \ldots + U_n \geqslant S \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n})$

Dla $n = 1$ mamy tak z założenia. Jeśli więc dla pewnego k powyższa zależność ma miejsce, mamy też
$U_1 + U_2 + \ldots + U_{k+1} \geqslant$
$\geqslant U_1 + U_2 + \ldots + U_k + \frac{1}{2}\big(S - (U_1 + U_2 + \ldots + U_k)\big) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \big(S + (U_1 + U_2 + \ldots + U_k)\big) \geqslant \frac{1}{2} \cdot \left(S + S \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right)\right) =$
$= S \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\right)$, co kończy dowód.

Zatem mamy $S \geqslant (U_1 + U_2 + \ldots) \geqslant S\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = S$.

Równość $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)=1$ miała u Greków specjalny charakter. Wyrażało się to w stwierdzeniu, iż

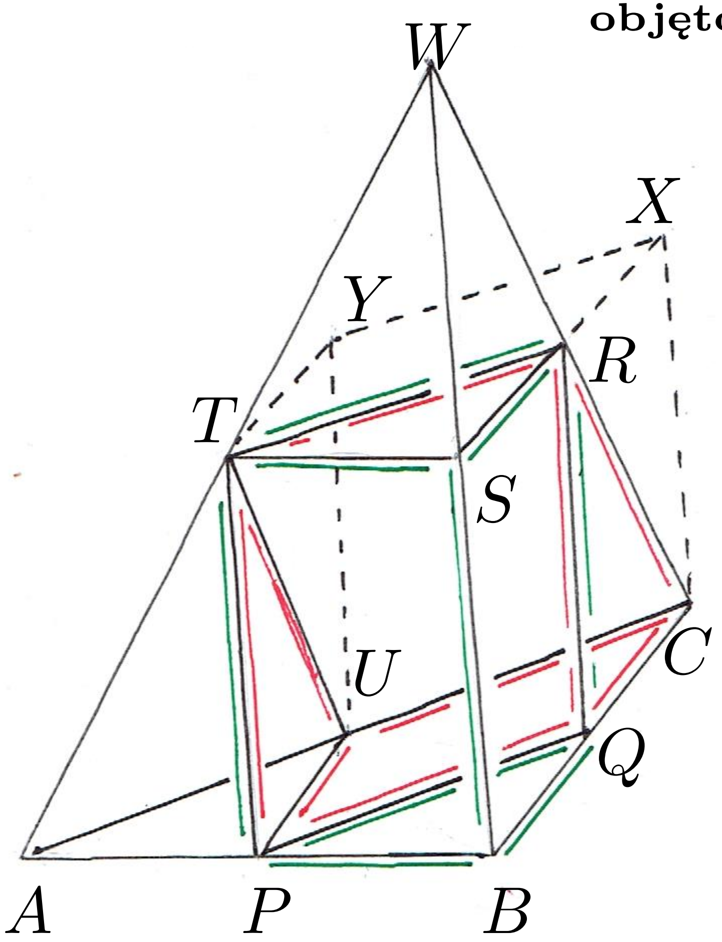
dwie wielkości różniące się dowolnie mało są równe.

Uważano to stwierdzenie za wymagające wysokiej kultury intelektualnej.

I dziwić się nie można, bo ileż to problemów stwarza naszym uczniom (a też bywa, że nie tylko im) przyjęcie do wiadomości, iż $0,99999\ldots=1$.

Stosowało się to do $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)$, bo $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)$ różni się od 1 o $\frac{1}{2^k}$, co może być dowolnie małe.

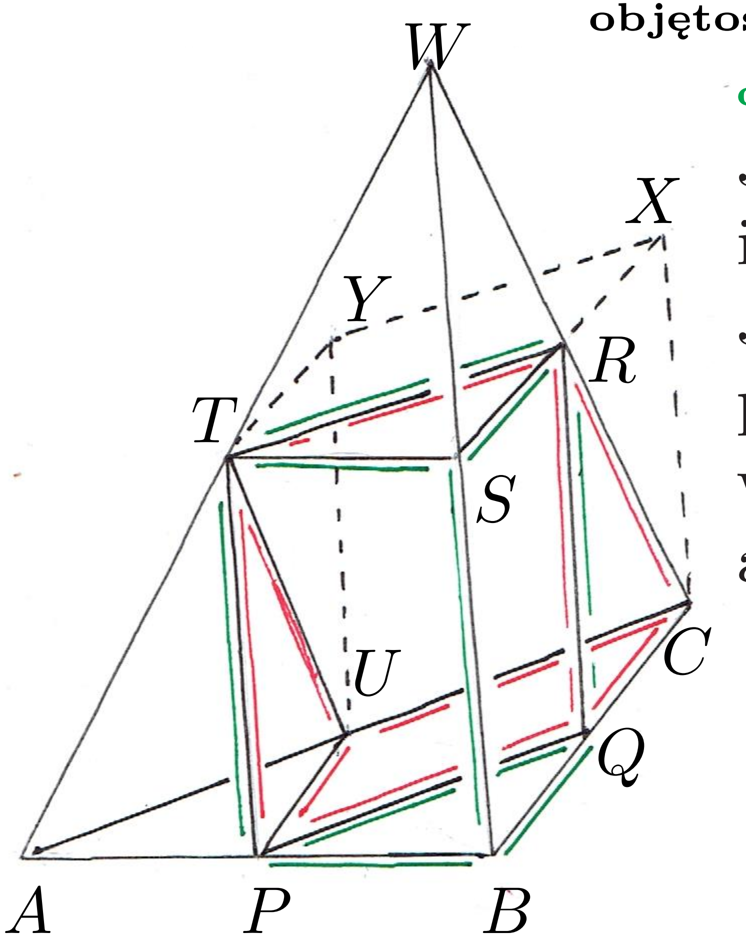
objętość czworościanu wg. Euklidesa – wyczerpywanie



ozn. objętość $\mathcal{V}$, pole podstawy $\mathcal{P}$, wysokość h

Jako U_1 bierzemy wielościany "zielony" i "czerwony".

$PQRSTU$ to środki krawędzi.



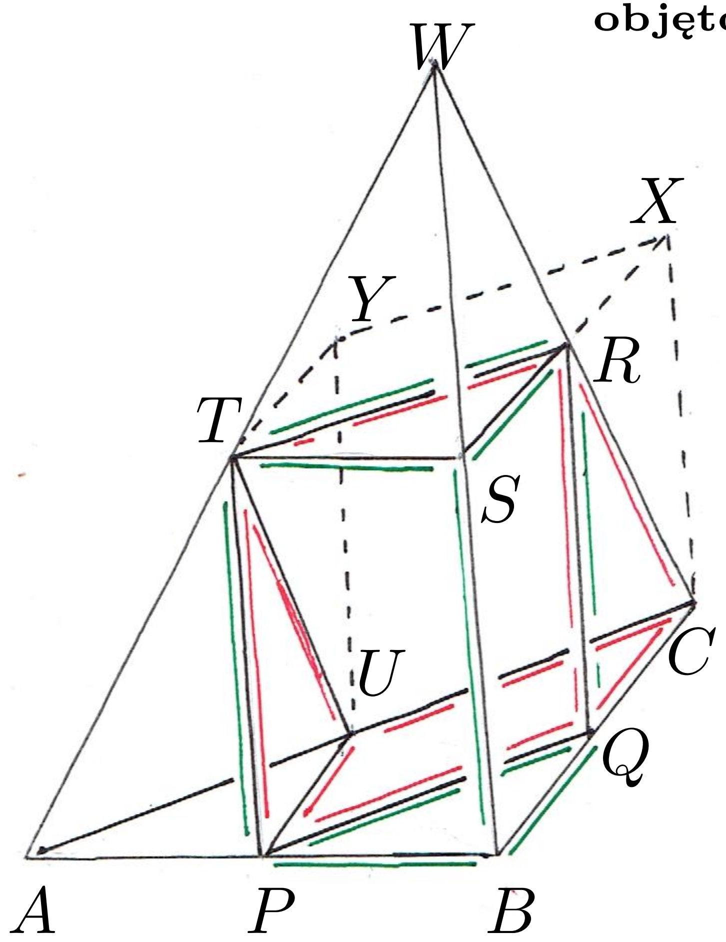
objętość czworościanu wg. Euklidesa – wyczerpywanie

ozn. objętość $\mathcal{V}$, pole podstawy $\mathcal{P}$, wysokość h

Jako U_1 bierzemy wielościany "zielony" i "czerwony".

Jest to więcej niż połowa $\mathcal{V}$, gdyż pozostały czworościan $APUT$ wsuwa się w "czerwony" wzdłuż AC, a $WRST$ – w "zielony" wzdłuż WB.

objętość czworościanu wg. Euklidesa – wyczerpywanie



ozn. objętość $\mathcal{V}$, pole podstawy $\mathcal{P}$, wysokość h

Jako U_1 bierzemy wielościany "zielony" i "czerwony".
Jest to więcej niż połowa $\mathcal{V}$, gdyż pozostały czworościan $APUT$ wsuwa się w "czerwony" wzdłuż AC, a $WRST$ – w "zielony" wzdłuż WB.

Miara $PBQRST$ to $\frac{1}{4}\mathcal{P} \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{8}\mathcal{P}h$,
$PQCRTU$ to połowa $PQCXYU$,
stąd jego miara to $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\mathcal{P} \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{8}\mathcal{P}h$.
Łącznie $U_1 = \frac{1}{4}\mathcal{P}h$.

Powtarzamy to dla dwóch pozostałych czworościanów podobnych do wyjściowego w skali $\frac{1}{2}$, co daje $U_2 = 2 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot U_1 = \frac{1}{4} \cdot U_1$
i w iteracji $U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \mathcal{P}h \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n})$,
a więc $\mathcal{V} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots) \cdot \mathcal{P}h$.

Pytanie, czy nie da się problemu zamiany czworościanu na sześcian o tym samym polu rozwiązać elementarnie, nękało geometrów od *Elementów*, nie przynosząc żadnych efektów, aż do końca XIX wieku, kiedy M.J.M. Hill w 1896 roku zaatakował problem nie szukając rozwiązania ogólnego, lecz konkretnych czworościanów, które dałyby się podzielić na kawałki, z których można było ułożyć sześcian. Znalazł trzy serie (indeksowane kątem) takich czworościanów.

W tym stanie rzeczy Dawid Hilbert umieścił pytanie o znalezienie elementarnego sposobu zdefiniowania objętości wielościanu na trzecim miejscu listy problemów na XX wiek, za hipotezą continuum i niesprzecznością arytmetyki.

wykład z 8. sierpnia 1900

Odpowiedzi negatywnej udzielił jeszcze w 1900 roku
Max Dehn (1878–1952),
a sprawę zamknął w 1965 roku Jean Paul Sydler (1921–1988).

Niezmiennik Dehna $D_W := \sum k_i \cdot f(\psi_i)$,

gdzie k_i to długości krawędzi wielościanu W,
ψ_i to katy dwuścienne przy tych krawędziach,
f to (dowolnie ustalona) funkcja addytywna
spełniająca warunek $f(\pi) = 0$.

Niezmiennik Dehna $D_W := \sum k_i \cdot f(\psi_i)$,

gdzie k_i to długości krawędzi wielościanu W,
ψ_i to katy dwuścienne przy tych krawędziach,
f to (dowolnie ustalona) funkcja addytywna
spełniająca warunek $f(\pi) = 0$.

Niezmienniczość tej liczby ze względu na podział wielościanu na wielościenne kawałki jest oczywista:

$(k_1 + k_2)f(\psi) = k_1 f(\psi) + k_2 f(\psi)$ – podział starej krawędzi,

oraz $kf(\psi_1 + \psi_2) = kf(\psi_1) + kf(\psi_2)$ – podział starego kąta,

natomiast nowe krawędzie powstałe wewnątrz (lub na ścianach) dzielonego wielościanu nic nie wnoszą do sumy, gdyż suma kątów dwuściennych przy nich to 2π (lub π)
– po to jest warunek $f(\pi) = 0$).

Wniosek. Na sześcian przez podział dają się zamienić tylko te wielościany, dla których **wszystkie** niezmienniki Dehna są równe zeru.

Do negatywnego rozstrzygnięcia III problemu Hilberta brakuje "tylko" przykładu wielościanu o jakimś niezmienniku Dehna różnym od zera.
W tym celu należy się przyjrzeć funkcjom addytywnym.

Zwróćmy jeszcze uwagę na domknięcie przez Sydlera sprawy niezmienników Dehna:
Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by dwa wielościany były równoważne przez podział, jest równość ich wszystkich niezmienników Dehna.

Dowód dostateczności jest niesłychanie złożony, nic więc dziwnego, że przyszło na niego czekać aż 65 lat.

Funkcja addytywna to każda funkcja f spełniająca warunek $f(a+b) = f(a)+f(b)$ dla wszystkich argumentów swojej dziedziny.

Warunek ten jest nazywany równaniem Cauchyego, bo on postawił problem, jak wyglądają wszystkie takie funkcje rzeczywiste.

Oczywistym rozwiązaniem równania Cauchyego jest $f(x) = \alpha \cdot x$ dla dowolnej stałej α.

Do 1900 roku nie umiano wskazać innego rozwiązania równania Cauchyego dla wszystkich liczb rzeczywistych.
Ale umiano wskazać takie rozwiązania dla mniejszych dziedzin.

Takie rozwiązanie zostało wykorzystane przez Dehna
– liczb występujących w obliczaniu niezmiennika
(długości krawędzi i rozwartości katów) jest skończenie wiele.

Nietrudno wykazać, że dla dowolnej liczby wymiernej w jest

$$f(w \cdot a) = w \cdot f(a).$$

Istotnie, mamy kolejno

$f((k+1)a) = f(ka) + f(a)$, a więc $f(na) = nf(a)$;

$f(a) = f(m \cdot \frac{1}{m}a) = mf(\frac{1}{m}a)$, a więc $f(\frac{1}{m}a) = \frac{1}{m}f(a)$;

$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, a więc $f(0) = 0$;

$0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$, a więc $f(-x) = -f(x)$.

Nietrudno wykazać, że dla dowolnej liczby wymiernej w jest

$$f(w \cdot a) = w \cdot f(a).$$

Biorąc więc $f(1) = \gamma_1$, mamy $f(w) = \gamma_1 \cdot w$.

W ten sposób określiliśmy funkcję addytywną
dla liczb wymiernych.

By rozszerzyć jej dziedzinę zauważmy, że
suma funkcji addytywnych jest funkcją addytywną:

$$\begin{aligned} f_1(a+b) + f_2(a+b) =& f_1(a) + f_1(b) + f_2(a) + f_2(b) = \\ =& (f_1(a) + f_2(a)) + (f_1(b) + f_2(b)). \end{aligned}$$

Mamy już funkcję addytywną dla liczb wymiernych: $f(w) = \gamma_1 \cdot w$.

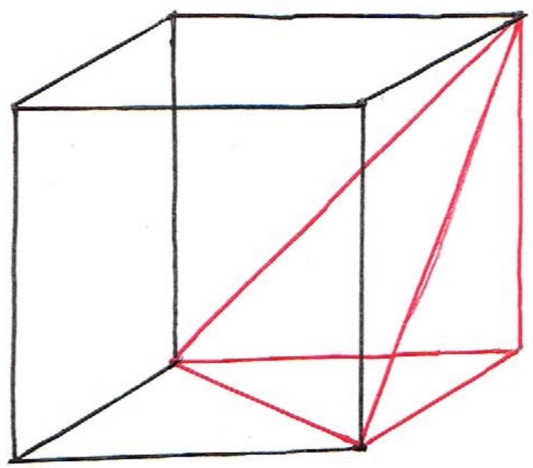
Jednak dla dowolnej liczby niewymiernej, np. $\sqrt{2}$ możemy ustalić dowolnie $f(\sqrt{2}) = \gamma_2$. Wówczas dla liczb postaci $w + v\sqrt{2}$ będziemy mieli $f(w + v\sqrt{2}) = \gamma_1 \cdot w + \gamma_2 \cdot v$.

Liczba π nie jest tej postaci – możemy więc przyjąć np. $f(\pi) = \gamma_3$ i wówczas będzie $f(w + v\sqrt{2} + u\pi) = \gamma_1 \cdot w + \gamma_2 \cdot v + \gamma_3 \cdot u$
dla w, v, u wymiernych.

I tak dalej.

W ten sposób możemy zbudować funkcje addytywne na dowolnej przestrzeni wektorowej o bazie z $\mathbb{R}$ o współczynnikach wymiernych (nawet nieskończenie wymiarowej, co nie będzie nam potrzebne – ale funkcji addytywnej dla wszystkich liczb rzeczywistych tym sposobem nie osiągniemy).

Wystarczy wskazać czworościan, który nie jest równoważny przez pocięcie z sześcianem, czyli taki, który ma pewien niezmiennik Dehna niezerowy.



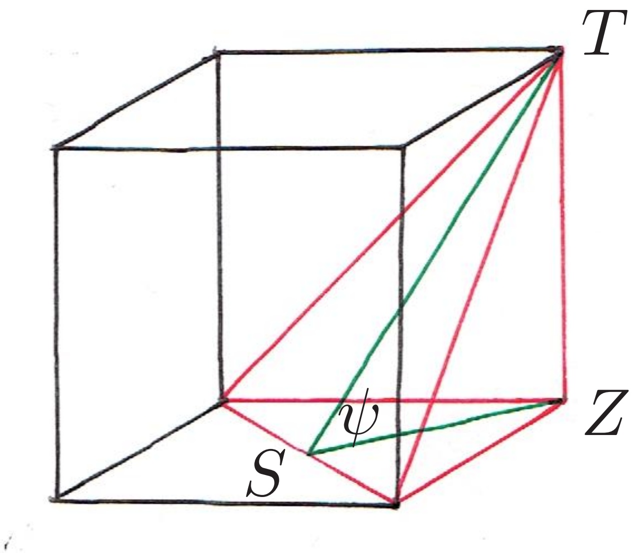
Oto on – obcięty róg sześcianu
(niech będzie jednostkowy).
Ma trzy krawędzie równe 1
i kąty dwuścienne przy nich proste,
pozostałe trzy krawędzie równe $\sqrt{2}$
i równe przy nich katy dwuścienne ψ.

Jego niezmiennik Dehna to $3 \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot f(\psi) = 3\sqrt{2} \cdot f(\psi)$,
bo z założenia $f(\pi) = 0$,
a więc i dla dowolnej liczby wymiernej w $f(w \cdot \pi) = 0$.

Jeśli czworościan dałby się przerobić na sześcian, musiałoby być $f(\psi) = 0$, czyli ψ musiałoby być wymierną wielokrotnością π.

Wobec tego, że $SZ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $ZT = 1$ mamy $ST = \frac{\sqrt{6}}{2}$ i $\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Teraz bardzo użyteczny będzie dość egzotyczny

fakt trygonometryczny:



Zachodzi $\cos n\psi = \frac{a_n}{\sqrt{3}^n}$,
gdzie a_n *jest całkowite i 3 nie dzieli* a_n,
a to nigdy nie jest równe 1.

Oto jego dowód: $\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
$\cos 2\psi = 2\cos^2\psi - 1 = \frac{2}{3} - 1 = \frac{-1}{3}$,
a więc $a_1 = 1$ i $a_2 = -1$.

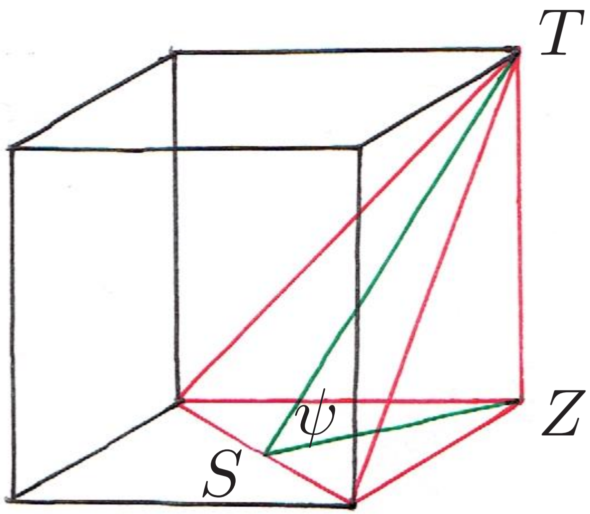
Ponieważ $\cos(k+1)\psi + \cos(k-1)\psi = 2\cos k\psi \cdot \cos\psi$, więc
$\cos(k+1)\psi = 2\cos k\psi \cdot \cos\psi - \cos(k-1)\psi =$

$$= 2\frac{a_k}{\sqrt{3}^k} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{a_{k-1}}{\sqrt{3}^{k-1}} = \frac{2a_k - 3a_{k-1}}{\sqrt{3}^{k+1}} = \frac{a_{k+1}}{\sqrt{3}^{k+1}}.$$

Zatem $3 \nmid a_{k+1}$ i w konsekwencji $3 \nmid a_n$ dla dowolnego n.

Wobec tego, że $SZ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $ZT = 1$ mamy $ST = \frac{\sqrt{6}}{2}$ i $\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Teraz bardzo użyteczny będzie dość egzotyczny

fakt trygonometryczny:



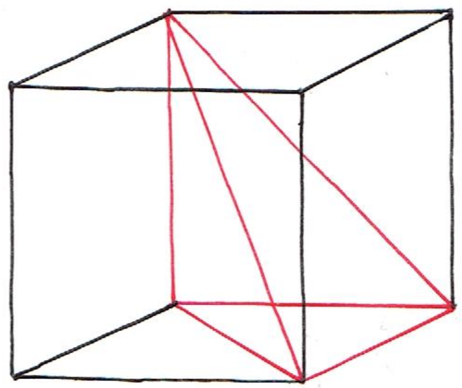
Zachodzi $\cos n\psi = \frac{a_n}{\sqrt{3}^n}$*,*
gdzie a_n *jest całkowite i 3 nie dzieli* a_n*,*
a to nigdy nie jest równe 1.

Gdyby zatem zachodziło $\psi = \frac{m}{n}\pi$,
mielibyśmy $2n\psi = 2m\pi$ i $\cos(2n\psi) = 1$.

Skoro ψ nie jest wymierną wielokrotnością π, możemy dobrać dowolną wartość $f(\psi)$, np. 1. Uzyskany niezmiennik Dehna będzie wtedy miał wartość $3\sqrt{2}$, podczas, gdy wszystkie niezmienniki Dehna sześcianu są równe zeru.

Stąd nasz czworościan nie da się przez podział przekształcić na sześcian. I to rozstrzyga III problem Hilberta.

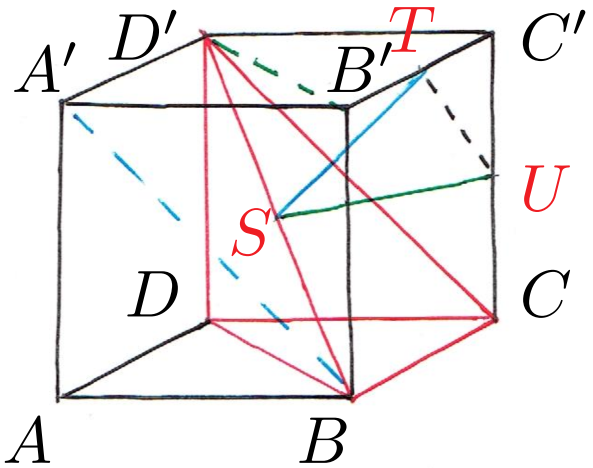
czworościany równoważne przez pocięcie z sześcianem



Ten czworościan, dość podobny do nierozkładalnego, da się rozłożyć na części, z których da się ułożyć sześcian.
Takich czworościanów jest wiele.
Nie znamy odpowiedzi na pytanie, jaką stanowią część całej zbiorowości czworościanów.

Wspomniane już trzy serie takich wielościanów podane przez Hilla zostały przez następne pół wieku uzupełnione zaledwie przez 27 (pojedynczych!) czworościanów i problem znalezienia jakiejś ogólnej metody ich poszukiwania uznano za beznadziejny.

Aktualną, otwartą listę czworościanów równoważnych przez pocięcie z sześcianem można dostać w formie papierowej u Kierownictwa Szkoły (kilka egzemplarzy) lub wgrać sobie na pendrive z tego laptopa – `listaczworo.pdf`.

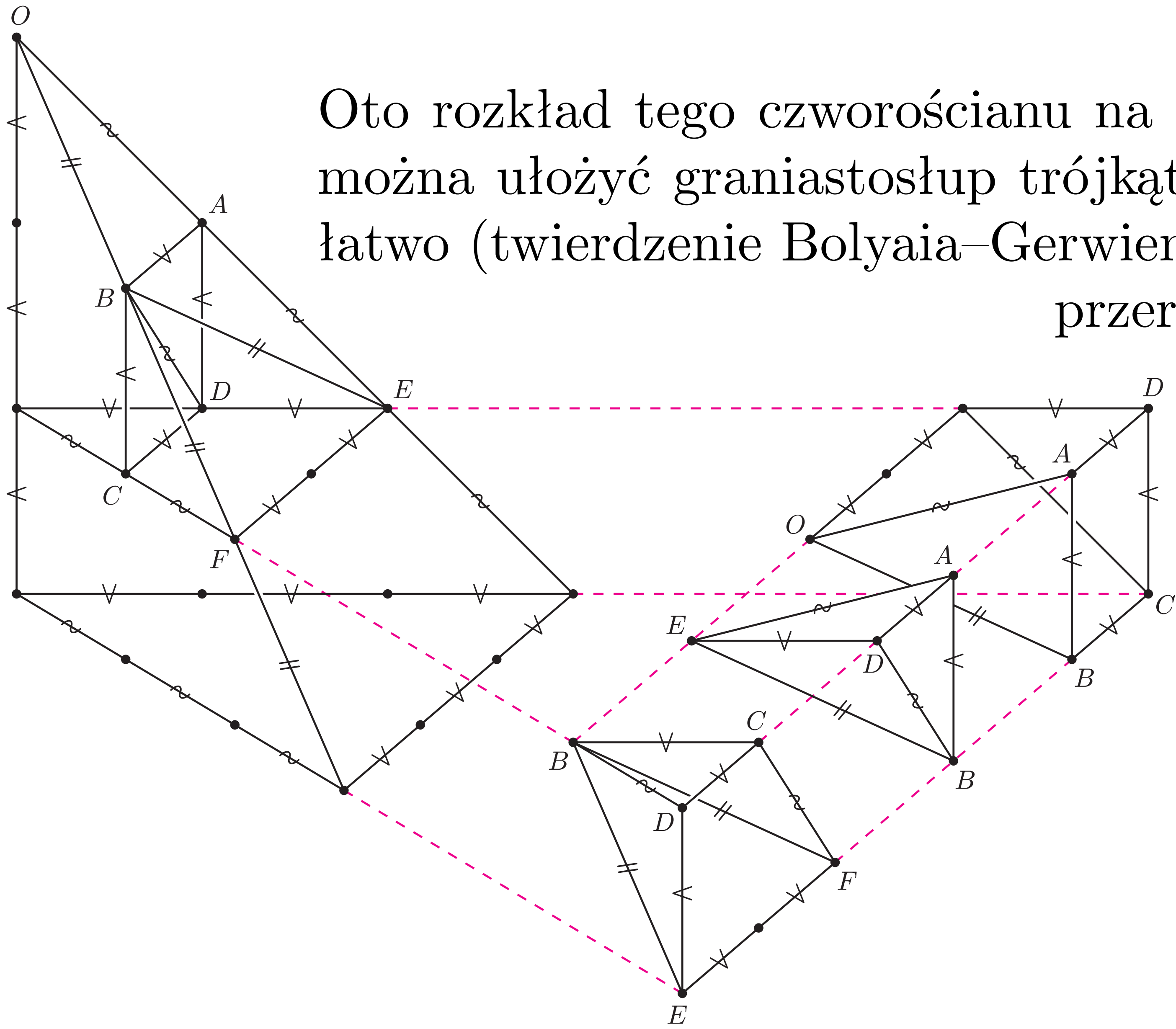


Sprawdźmy, że niezmieniki Dehna tego czworościanu są równe zeru.
Wynika to z faktu, że wszystkie kąty dwuścienne są wymiernymi wielokrotnościami π.

Nie budzi wątpliwości, że przy krawędziach DB, DC, CD' kąty dwuścienne są proste, oraz że kąty dwuścienne przy krawędziach BC i DD' mają rozwartość $\frac{\pi}{4}$.

Pozostaje krawędź BD'. Prowadząc z jej środka wektory prostopadłe do płaszczyzny BCD' (czyli $A'BCD'$)
i do płaszczyzny DBD' (czyli $DBB'D'$), otrzymujemy trójkąt równoboczny STU (wszystkie boki długości $\sqrt{2}$).
Stąd $\angle TSU = \frac{\pi}{3}$ i taki jest kąt dwuścienny przy krawędzi BD'.

Oto rozkład tego czworościanu na części, z których można ułożyć graniastosłup trójkątny prosty, który łatwo (twierdzenie Bolyaia–Gerwiena) da się przerobić na sześcian.



Czworościany równoważne przez podział z sześcianem na ogół nie mają wszystkich kątów dwuściennych będących wymiernymi wielokrotnościami π. Stąd nie wszystkie składniki zerowych niezmienników Dehna są zerami.

Wśród czworościanów Hilla wynika to z faktu, że serie są indeksowane jednym z takich kątów w sposób ciągły (obok seria H_1).

krawędzie	długości	kąty dwuścienne
AB	$\sin\alpha$	α
AC	$\sqrt{3}\cos\alpha$	$\pi/3$
AD	1	$\pi/2$
BC	1	$\pi/2$
BD	$\sin\alpha$	$\pi-2\alpha$
CD	$\sin\alpha$	α

Spośród 27 pojedynczych czworościanów równoważnych przez podział z sześcianem 13 ma wśród swoich kątów dwuściennych nie będące wymiernymi wielokrotnościami π.

Sprawa istnienia innych rozwiązań równania Cauchyego, czyli innych funkcji addytywnych określonych na całym $\mathbb{R}$ niż $f(x) = \alpha \cdot x$ też została umieszczona w problemach Hilberta (w ramach XIII problemu).

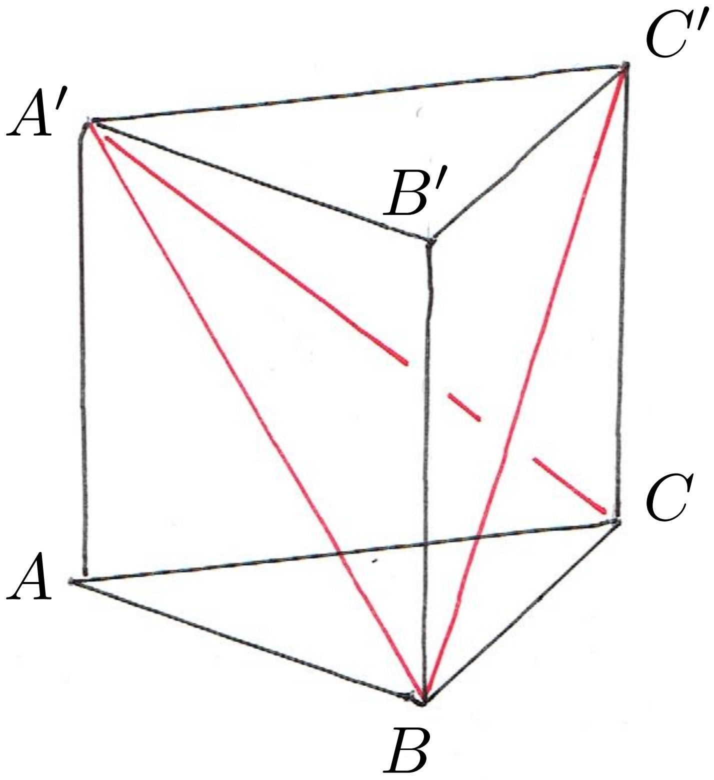
Sprawę rozwiązał w 1905 roku Georg Hamel, rozciągając – dzięki pewnikowi wyboru – przytoczoną metodę rozszerzania dziedziny funkcji addytywnej za pomocą przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb wymiernych na wszystkie liczby rzeczywiste. Udowodnił mianowicie, że istnieje – oczywiście nieprzeliczalna – baza $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$. Dziś nazywamy ją bazą Hamela.

Funkcję addytywną określamy wybierając dowolnie jej wartość na każdym elemencie bazy.

Otrzymane w ten sposób funkcje addytywne są (wszystkie!) skrajnie paskudne: są nieciągłe, nie są ograniczone ani z dołu ani z góry, nie są monotoniczne w żadnym przedziale, nie są nawet mierzalne (to ostatnie udowodnił Wacław Sierpiński w 1949 roku).

a teraz przeciwne rozwiązanie III problemu

(w pewnym podręczniku szkolnym)



Oto graniastosłup podzielony na trzy czworościany.

Czworościany ABA'–C i $A'B'B$–C' mają równe podstawy i równe wysokości, więc mają równe objętości.

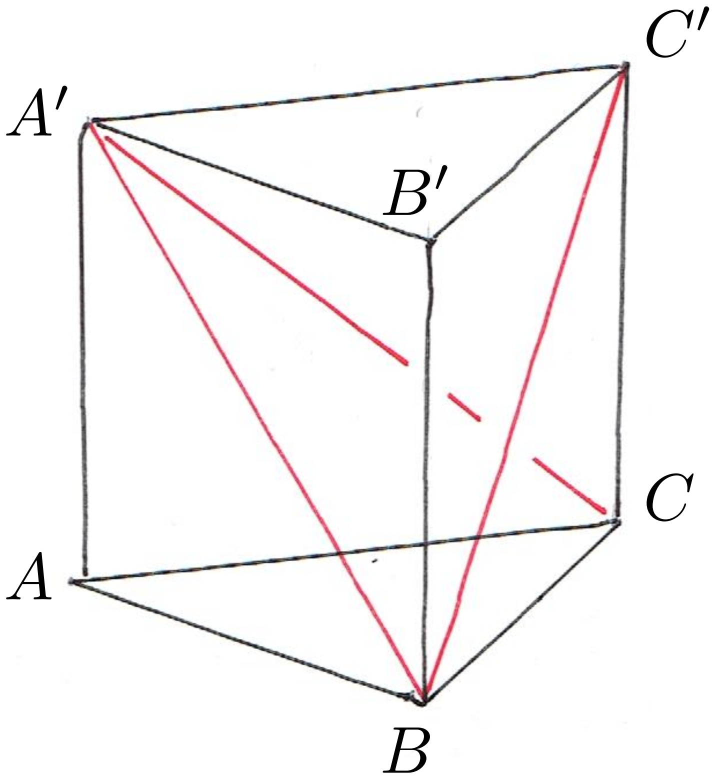
Podobnie czworościany BCC'–A' i $C'B'B$–A'.

Ale $A'B'B$–C' i $C'B'B$–A to ten sam czworościan.

Stąd wszystkie trzy czworościany mają jednakowe objętości, a więc równe $\frac{1}{3}$ objętości graniastosłupa.

Mamy więc elementarne obliczenie tej objętości!

a teraz przeciwne rozwiązanie III problemu



Ten rysunek nie został wykoncypowany przez autorów podręcznika. Jest wzięty z *Elementów* Euklidesa.

Euklides bowiem nie korzystał z sumy $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}$, lecz wyczerpywał czworościan dwukrotnie **ks. XII, tw. 4** – raz z użyciem jednej ściany jako podstawy, raz drugiej, otrzymując ten sam wynik: $\mathcal{V} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots) \cdot \mathcal{P}_1 h_1 = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots) \cdot \mathcal{P}_2 h_2$, bez wyczerpywania tej równości uzyskać się nie da.

Dopiero wtedy posłużył się tym rysunkiem. **ks. XII, tw. 7**

Stąd w równości objętości czworościanów (czworościanu) $A'B'B$–C' i $C'B'B$–A ukrywa się nieelementarność.

Nasuwa się pytanie, czy przytoczone podręcznikowe rozumowanie może obyć się bez wskazania tej luki.

Nie mam pojęcia, jak o tym zdecydować.

Problem kryje się w tym, że między użytkową a ścisłą matematyką jest jednak drobna różnica.

Nasuwa się pytanie, czy przytoczone podręcznikowe rozumowanie może obyć się bez wskazania tej luki.

Nie mam pojęcia, jak o tym zdecydować.

Problem kryje się w tym, że między użytkową a ścisłą matematyką jest jednak drobna różnica.

Vive la petite différence!