Skończony czy nieskończony?
A może to zupełnie nieistotne?

Adam Gregosiewicz

66. Szkoła Matematyki Poglądowej

25–28 sierpnia 2023 r., Siedlce

Jej wysokość nieskończoność!

Jej wysokość nieskończoność!

Łatwe **Trudne**

Jej wysokość nieskończoność!

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

Łatwe **Trudne**

Jej wysokość nieskończoność!

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

Paradoksy Zenona

Łatwe **Trudne**

Jej wysokość nieskończoność!

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

Paradoksy Zenona

f'

Łatwe **Trudne**

Jej wysokość nieskończoność!

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

Paradoksy Zenona

f'

Aksjomat wyboru (Banach-Tarski, . . .)

Łatwe **Trudne**

Jej wysokość nieskończoność!

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$	Paradoksy Zenona	f'	Aksjomat wyboru (Banach-Tarski, ...)

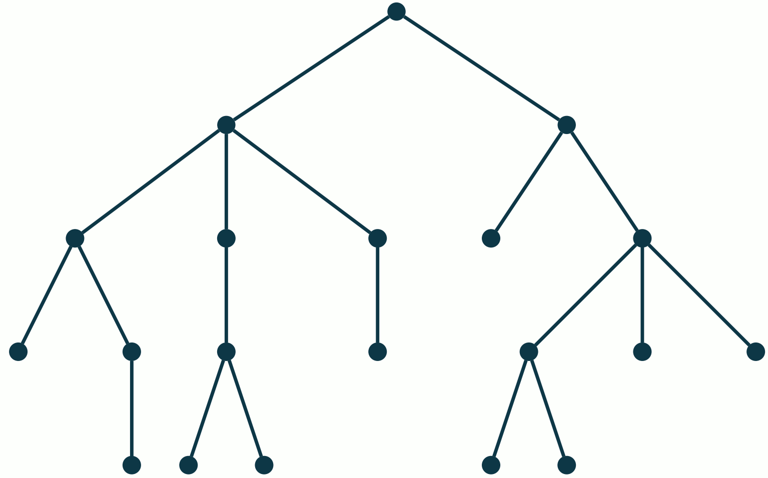
Łatwe → **Trudne**

„In mathematics you don't understand things. You just get used to them."

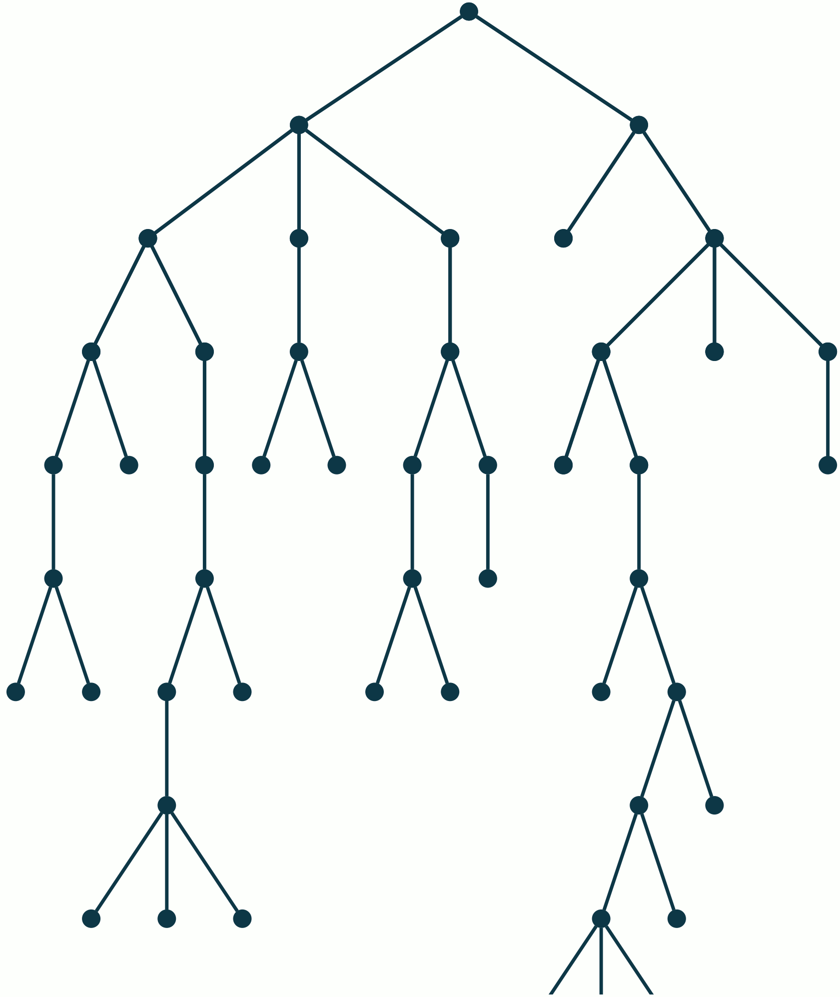
John von Neumann

Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew

Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew

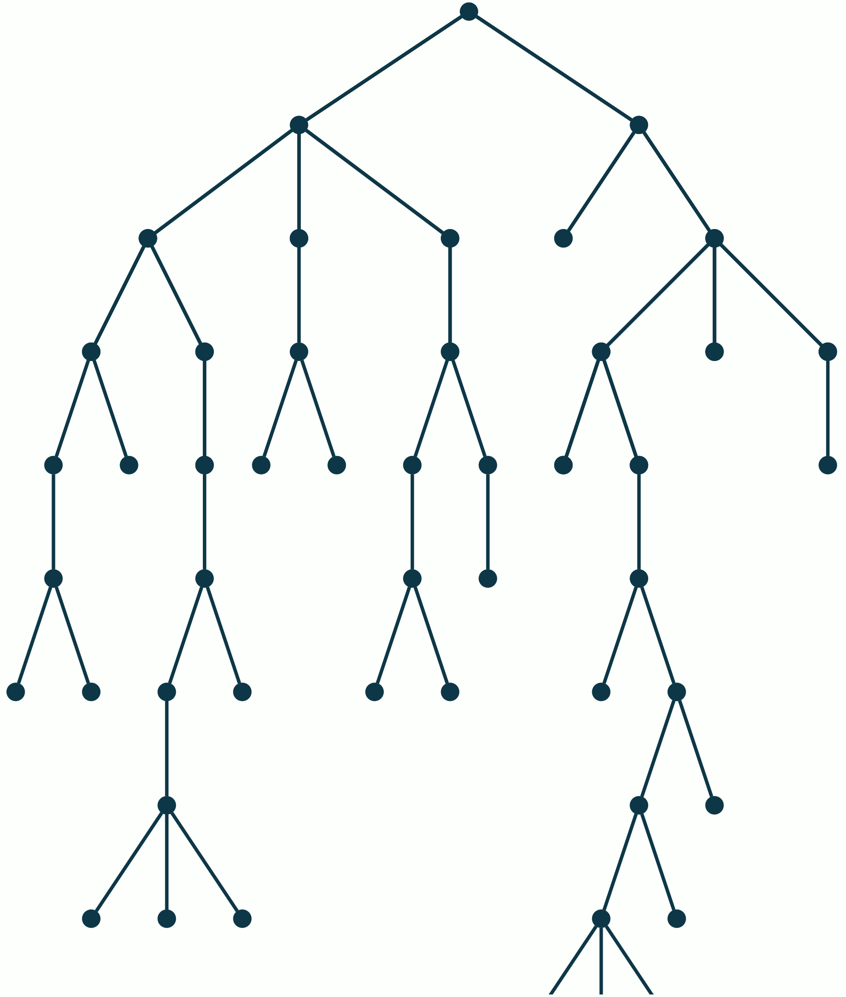


Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew



Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew

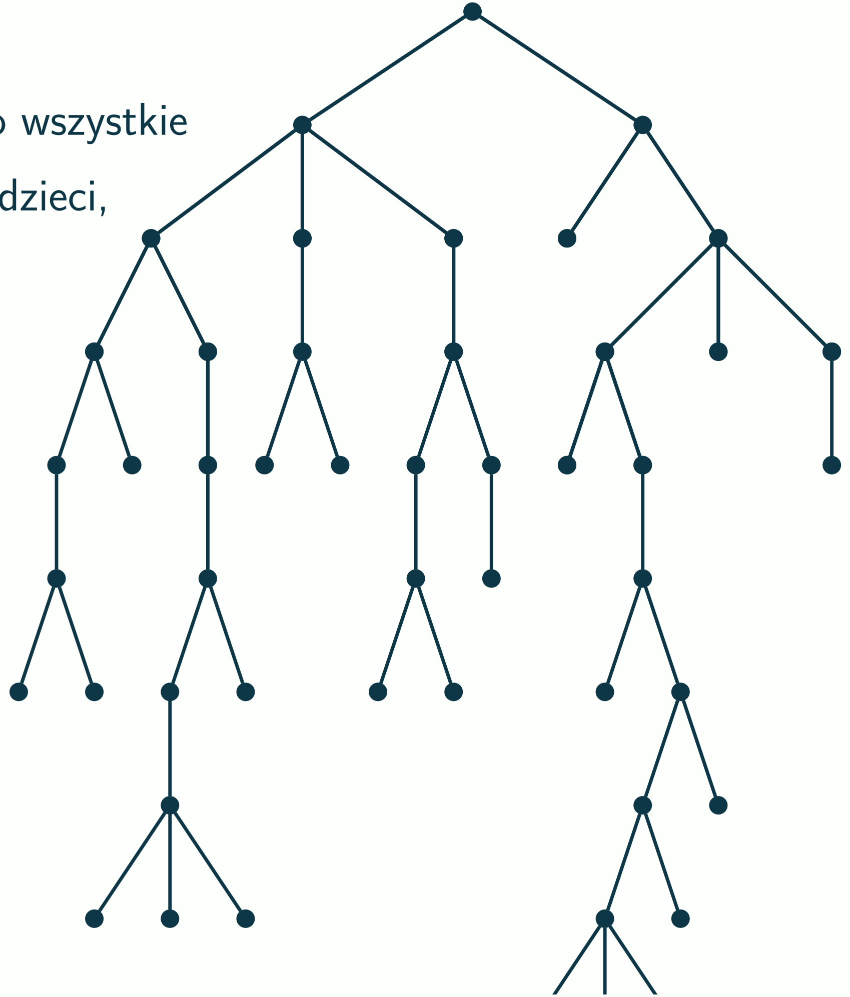
Lemat Kőniga



Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew

Lemat Kőniga

W nieskończonym drzewie, którego wszystkie wierzchołki mają skończenie wiele dzieci,

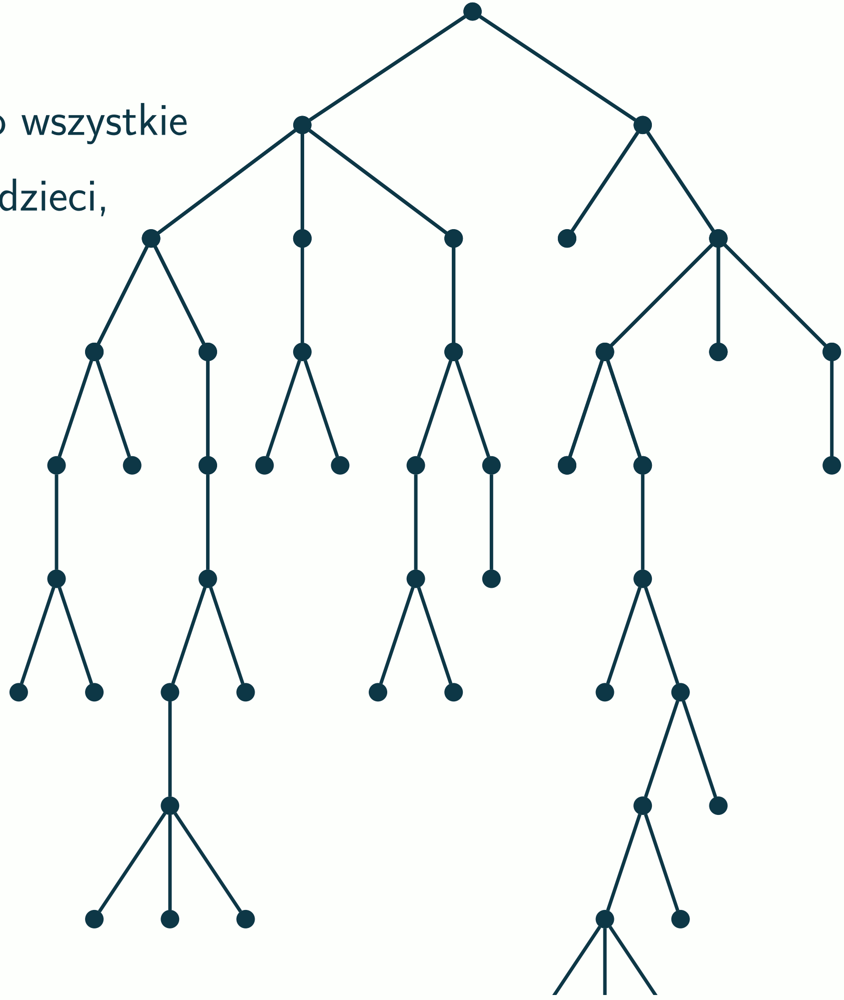


Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew

Lemat Kőniga

W nieskończonym drzewie, którego wszystkie wierzchołki mają skończenie wiele dzieci,

istnieje **nieskończona** gałąź.

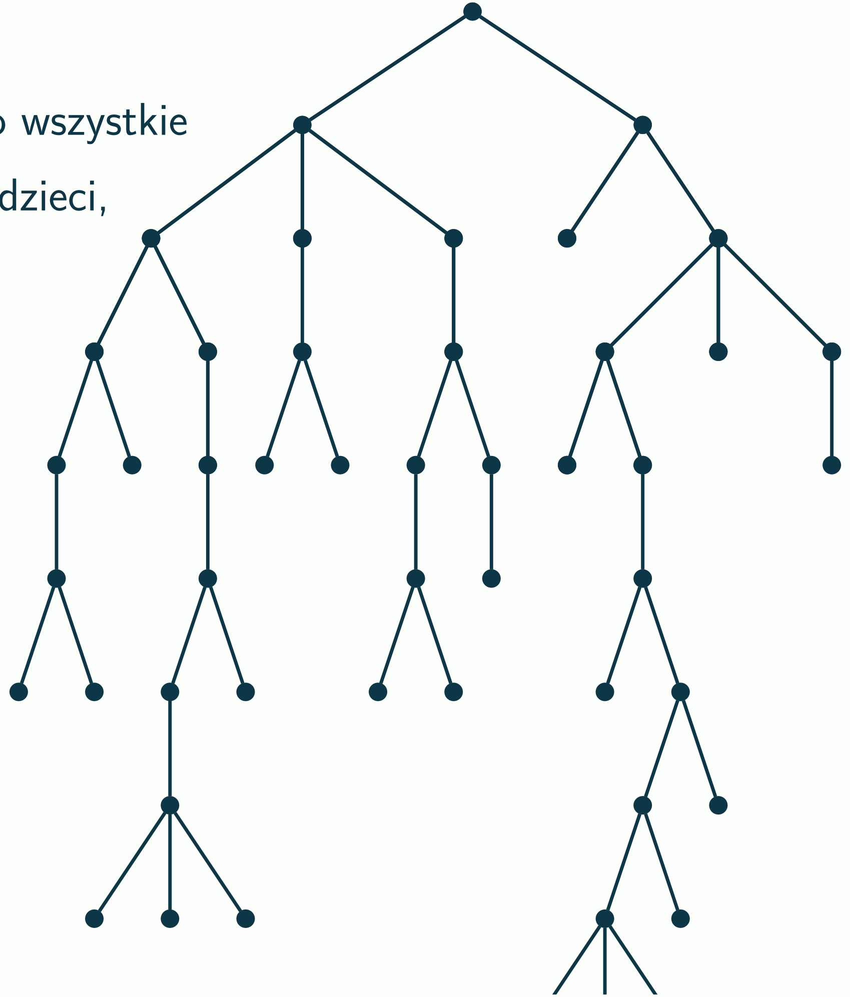


Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew

Lemat Kőniga

W nieskończonym drzewie, którego wszystkie wierzchołki mają skończenie wiele dzieci,

istnieje **nieskończona** gałąź.



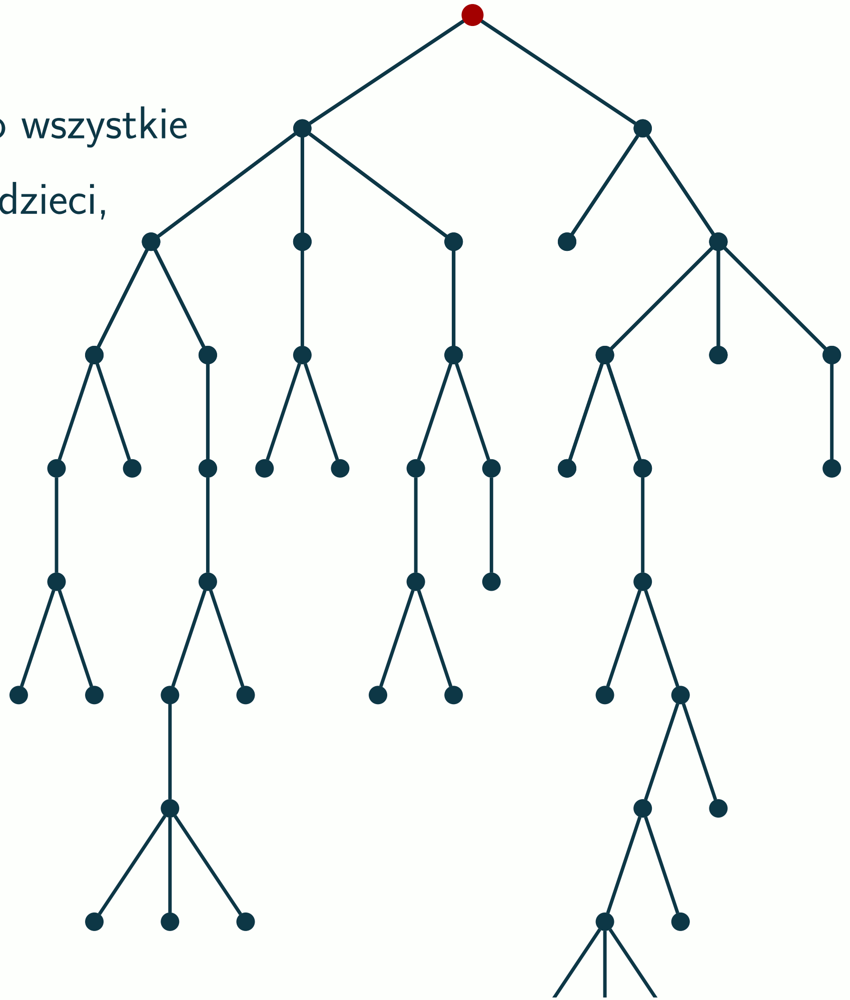
Dowód

Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew

Lemat Kőniga

W nieskończonym drzewie, którego wszystkie wierzchołki mają skończenie wiele dzieci,

istnieje **nieskończona** gałąź.



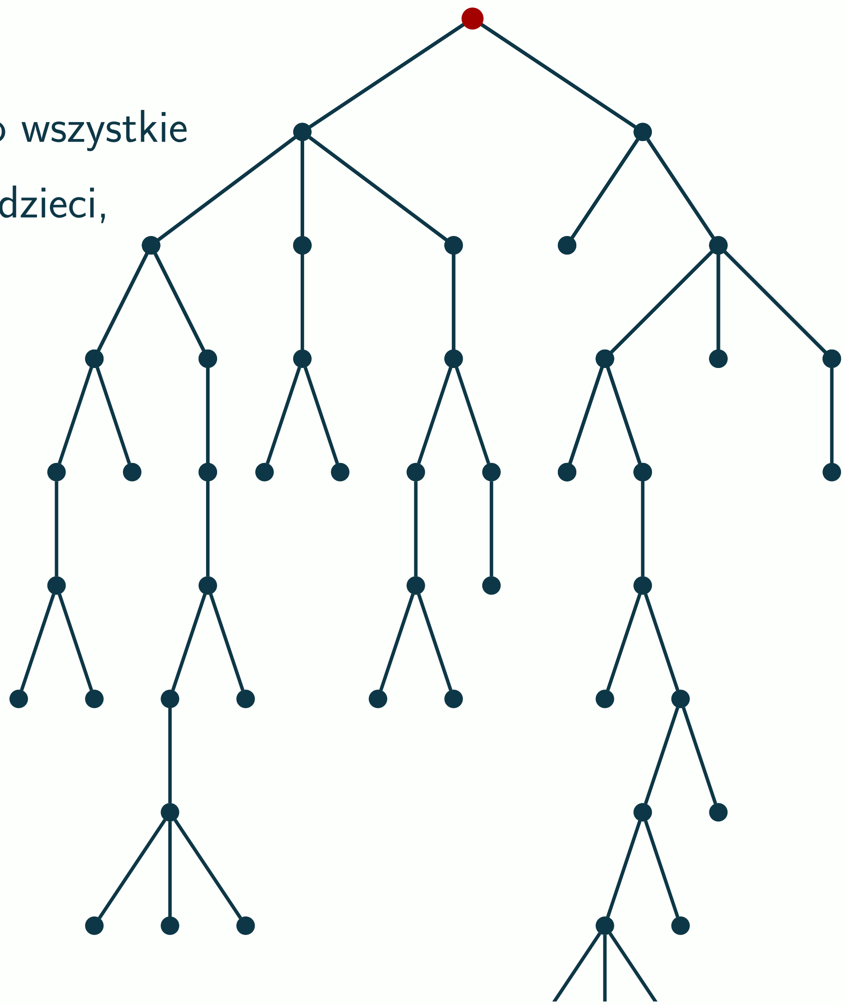
Dowód

Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew

Lemat Kőniga

W nieskończonym drzewie, którego wszystkie wierzchołki mają skończenie wiele dzieci,

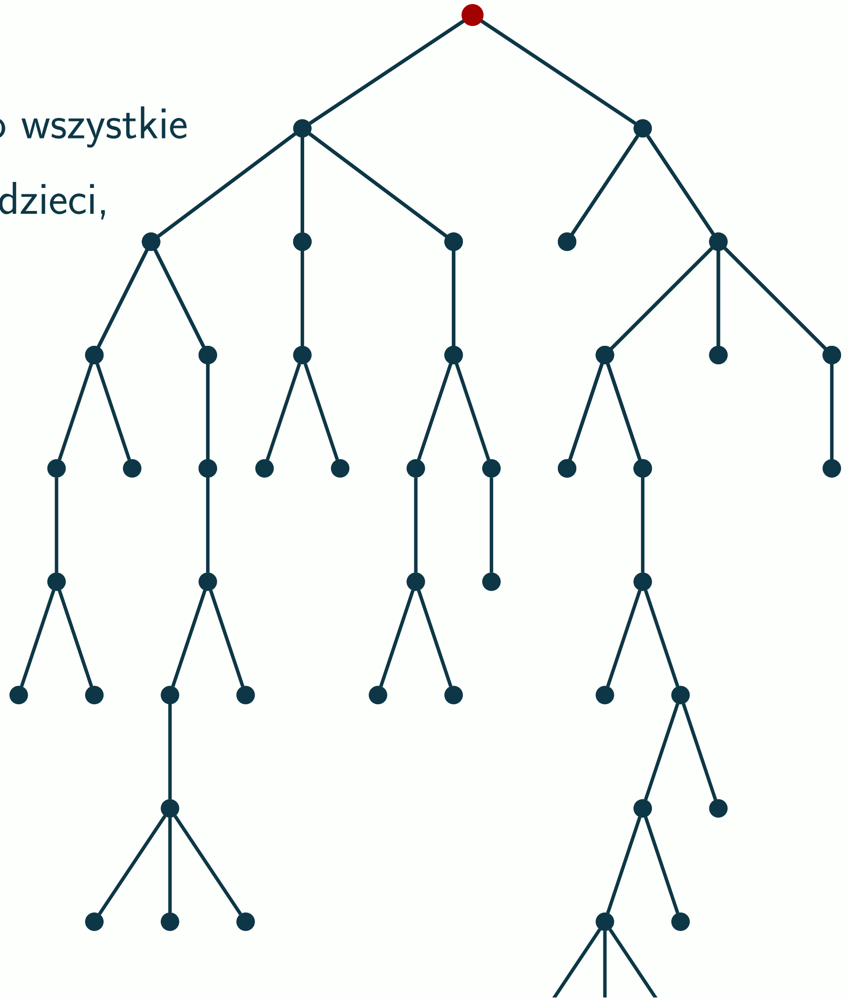
istnieje **nieskończona** gałąź.



Dowód

⇝ Od korzenia można dotrzeć do nieskończenie wielu wierzchołków.

Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew



Lemat Kőniga

W nieskończonym drzewie, którego wszystkie wierzchołki mają skończenie wiele dzieci,

istnieje **nieskończona** gałąź.

Dowód

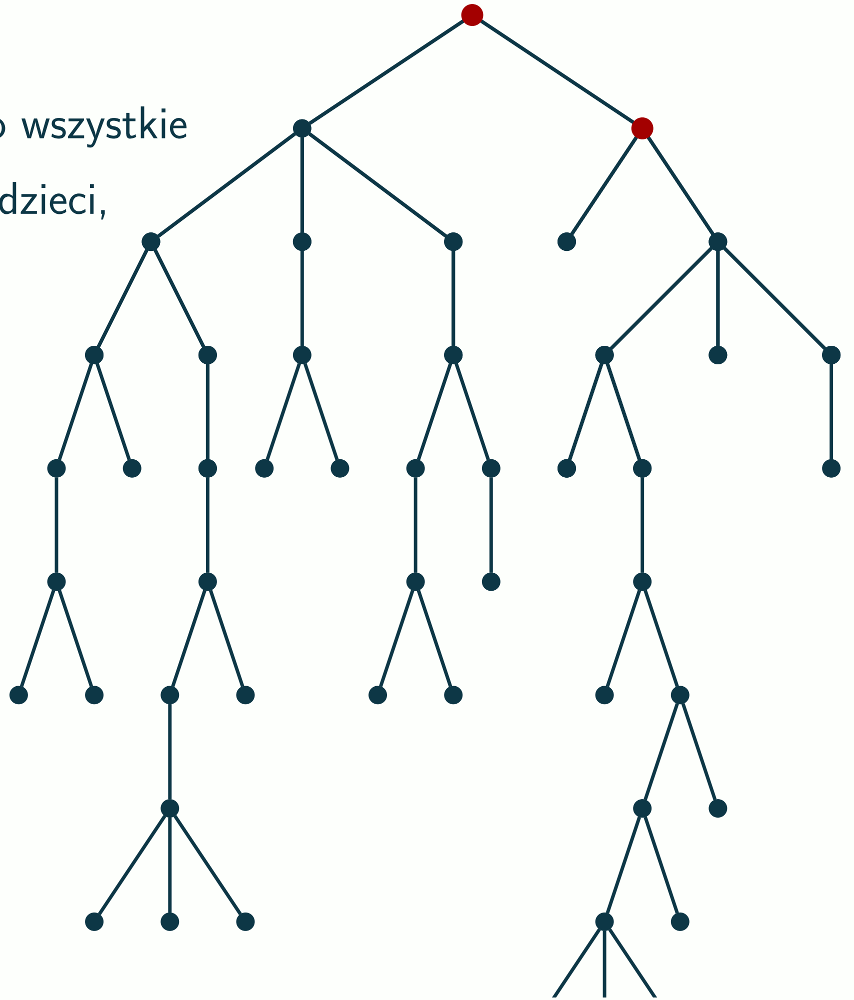
- ⇝ Od korzenia można dotrzeć do nieskończenie wielu wierzchołków.
- ⇝ Tę samą własność ma więc jedno z jego dzieci.

Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew

Lemat Kőniga

W nieskończonym drzewie, którego wszystkie wierzchołki mają skończenie wiele dzieci,

istnieje **nieskończona** gałąź.



Dowód

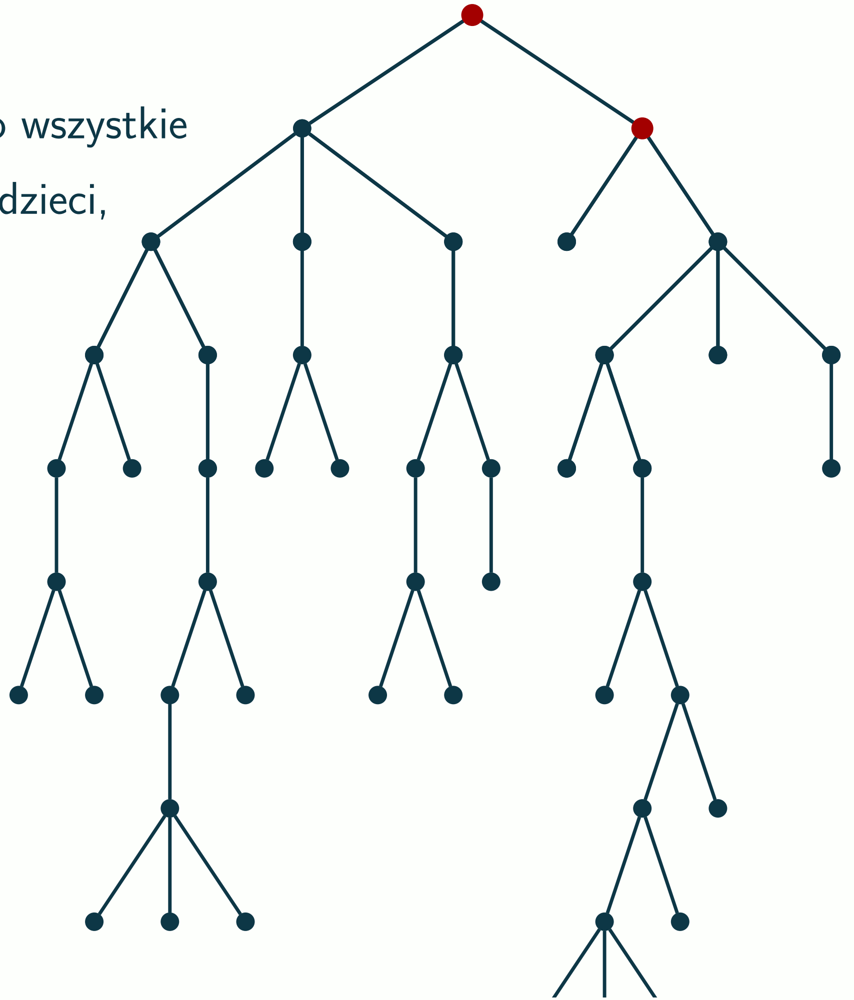
- ⇝ Od korzenia można dotrzeć do nieskończenie wielu wierzchołków.
- ⇝ Tę samą własność ma więc jedno z jego dzieci.

Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew

Lemat Kőniga

W nieskończonym drzewie, którego wszystkie wierzchołki mają skończenie wiele dzieci,

istnieje **nieskończona** gałąź.



Dowód

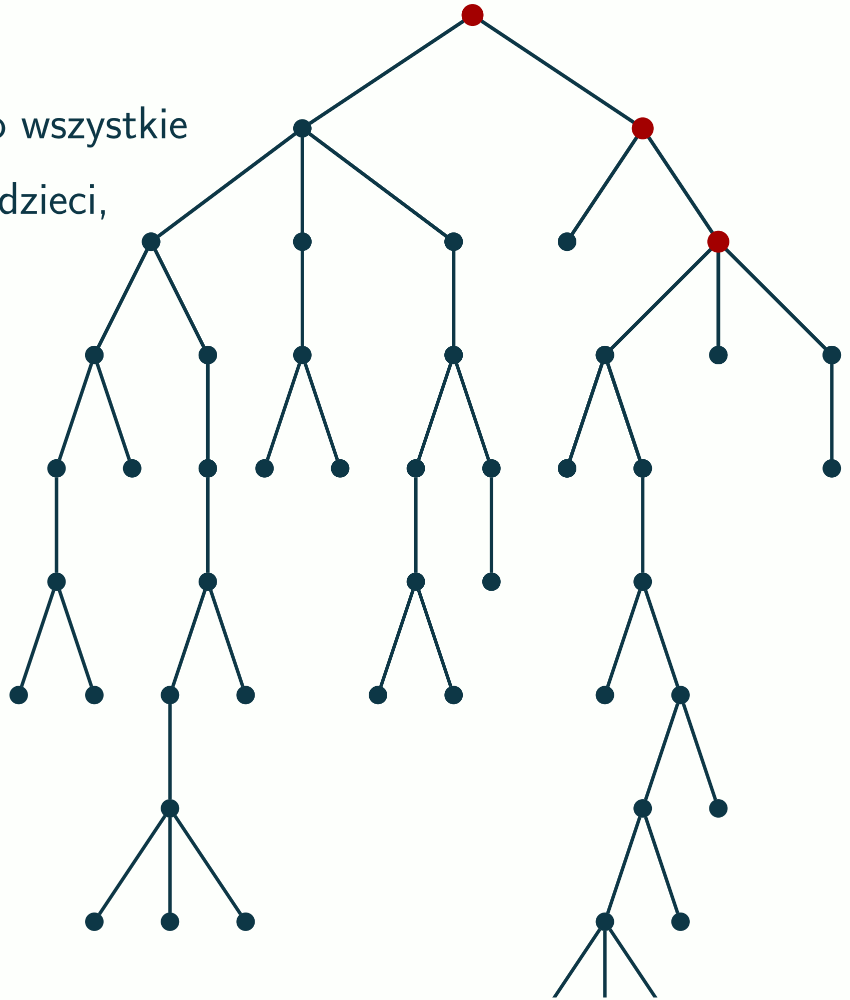
- Od korzenia można dotrzeć do nieskończenie wielu wierzchołków.
- Tę samą własność ma więc jedno z jego dzieci.
- itd.

Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew

Lemat Kőniga

W nieskończonym drzewie, którego wszystkie wierzchołki mają skończenie wiele dzieci,

istnieje **nieskończona** gałąź.



Dowód

⇝ Od korzenia można dotrzeć do nieskończenie wielu wierzchołków.

⇝ Tę samą własność ma więc jedno z jego dzieci.

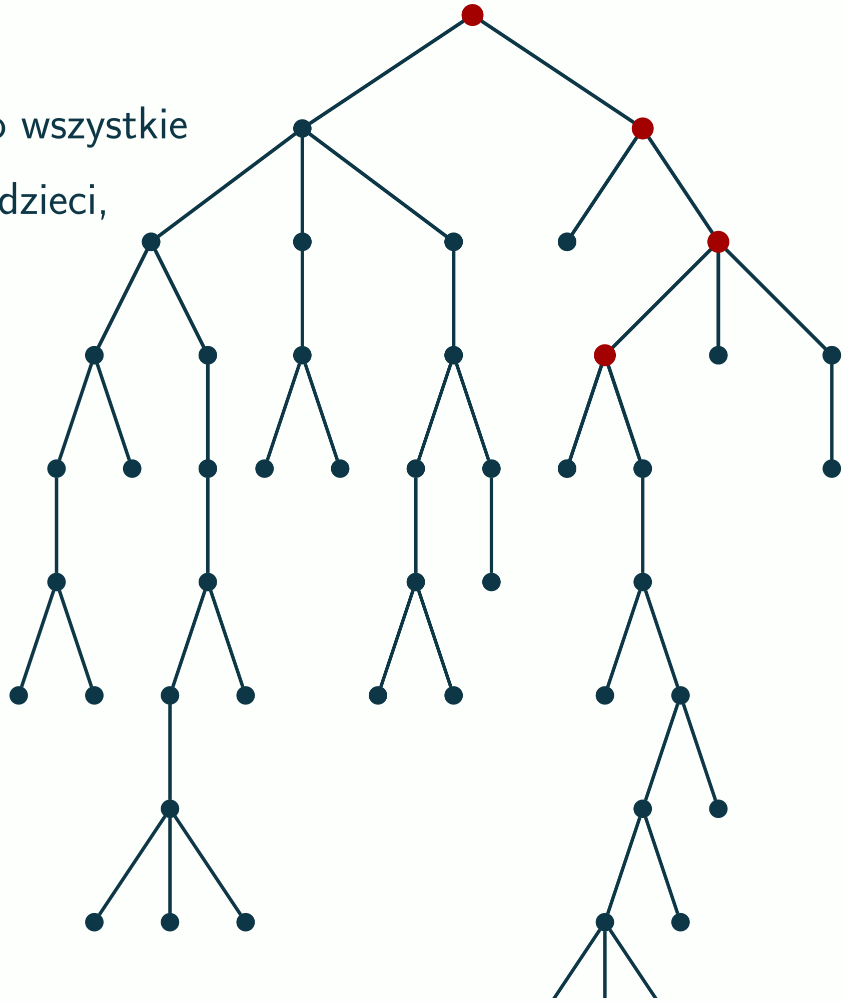
⇝ itd.

Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew

Lemat Kőniga

W nieskończonym drzewie, którego wszystkie wierzchołki mają skończenie wiele dzieci,

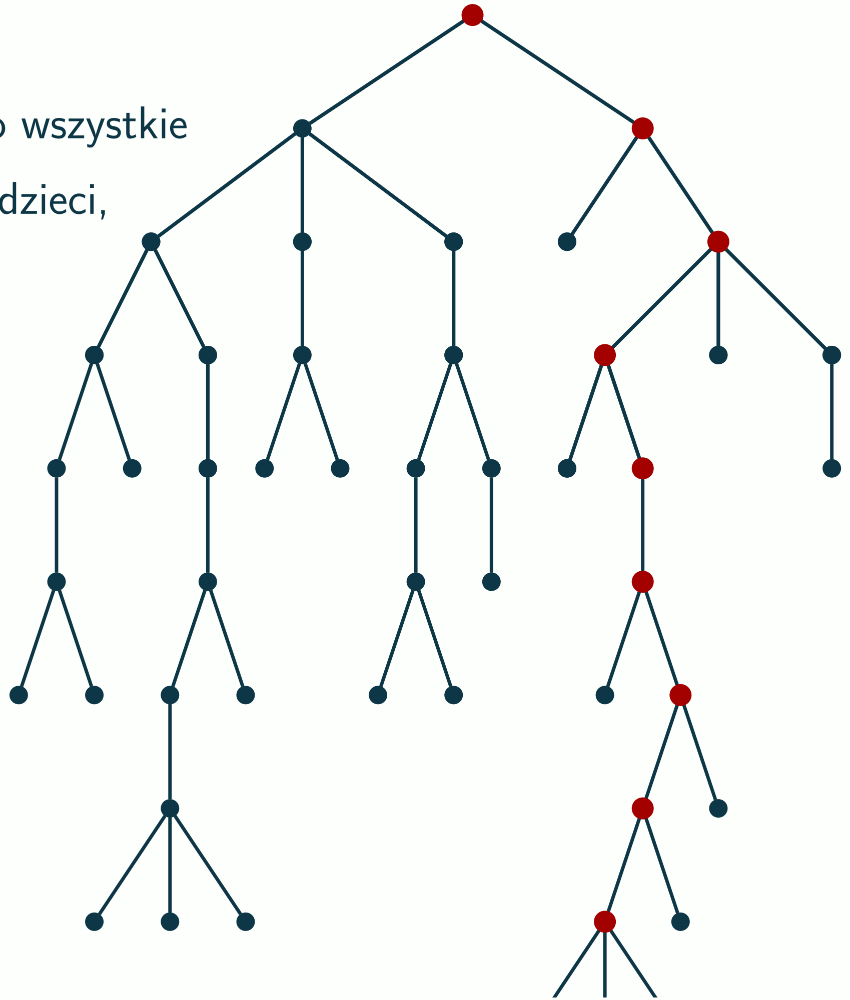
istnieje **nieskończona** gałąź.



Dowód

- Od korzenia można dotrzeć do nieskończenie wielu wierzchołków.
- Tę samą własność ma więc jedno z jego dzieci.
- itd.

Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew



Lemat Kőniga

W nieskończonym drzewie, którego wszystkie wierzchołki mają skończenie wiele dzieci,

istnieje **nieskończona** gałąź.

Dowód

⇝ Od korzenia można dotrzeć do nieskończenie wielu wierzchołków.

⇝ Tę samą własność ma więc jedno z jego dzieci.

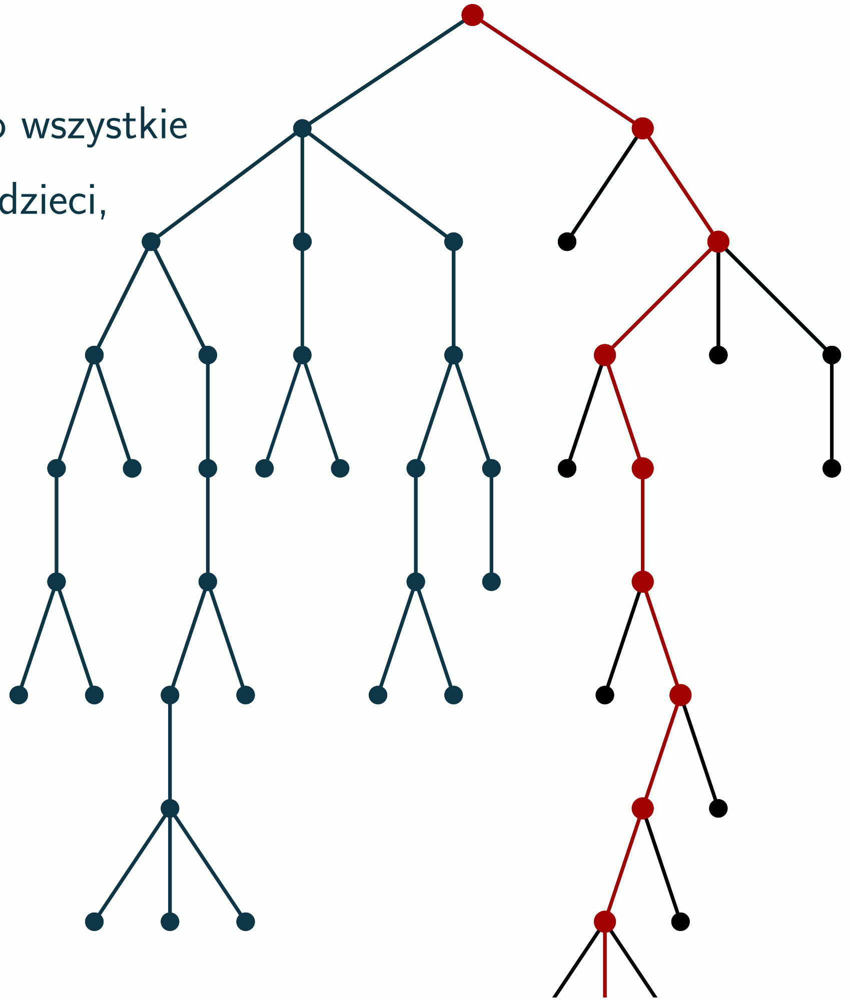
⇝ itd.

Od aksjomatu wyboru do nieskończonych drzew

Lemat Kőniga

W nieskończonym drzewie, którego wszystkie wierzchołki mają skończenie wiele dzieci,

istnieje **nieskończona** gałąź.



Dowód

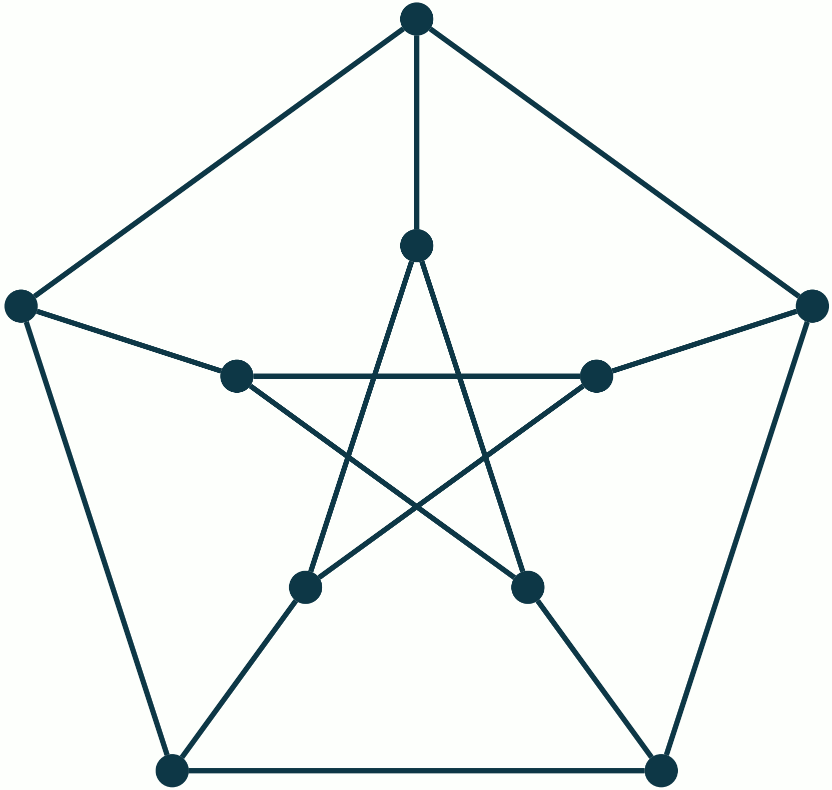
⇝ Od korzenia można dotrzeć do nieskończenie wielu wierzchołków.

⇝ Tę samą własność ma więc jedno z jego dzieci.

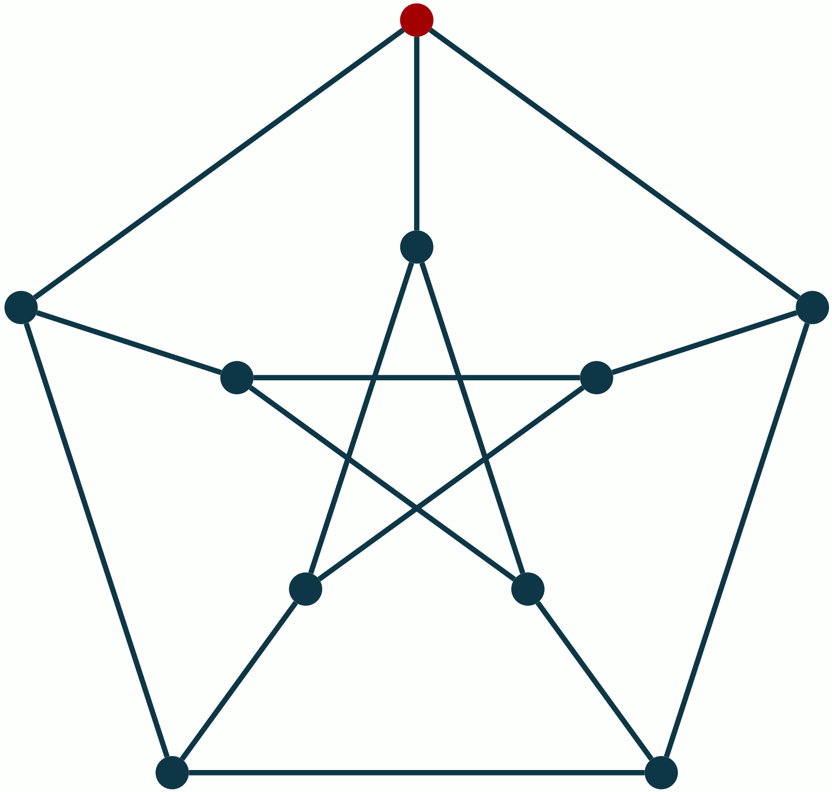
⇝ itd.

Kolorowanie grafów

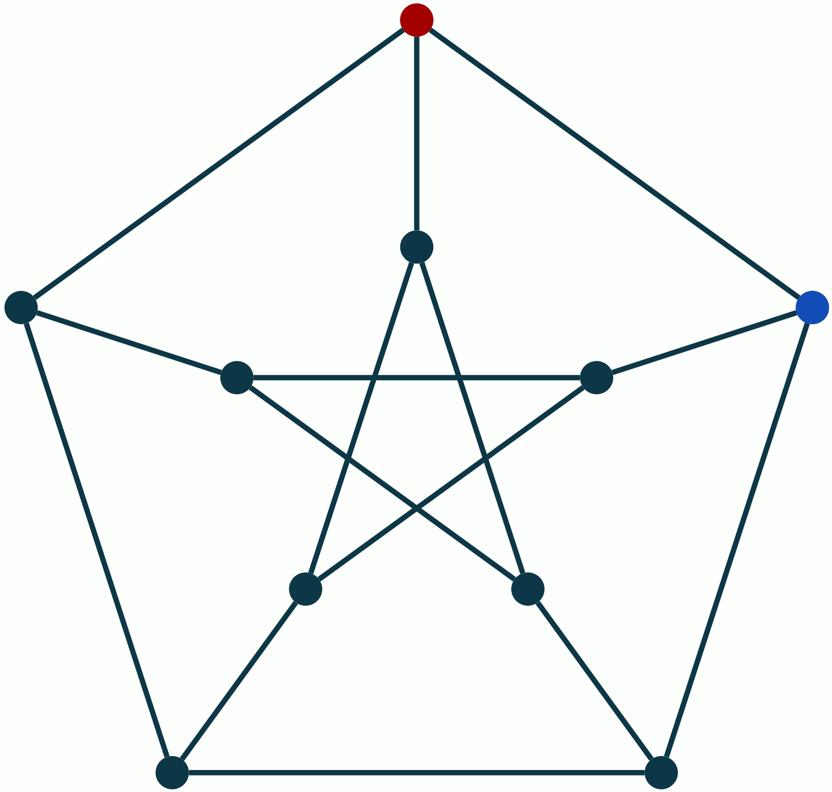
Kolorowanie grafów



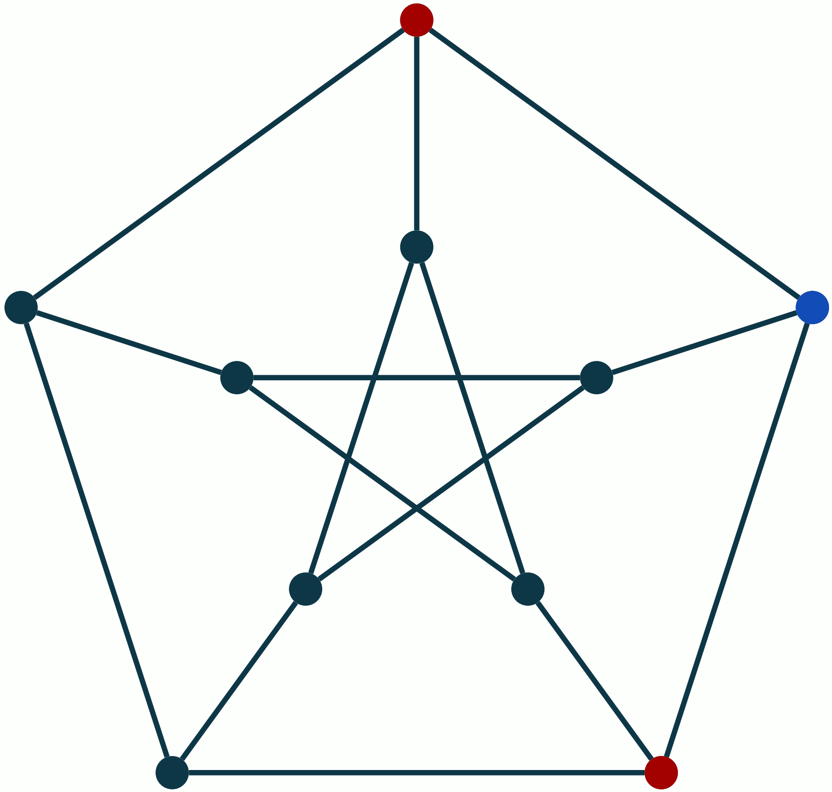
Kolorowanie grafów



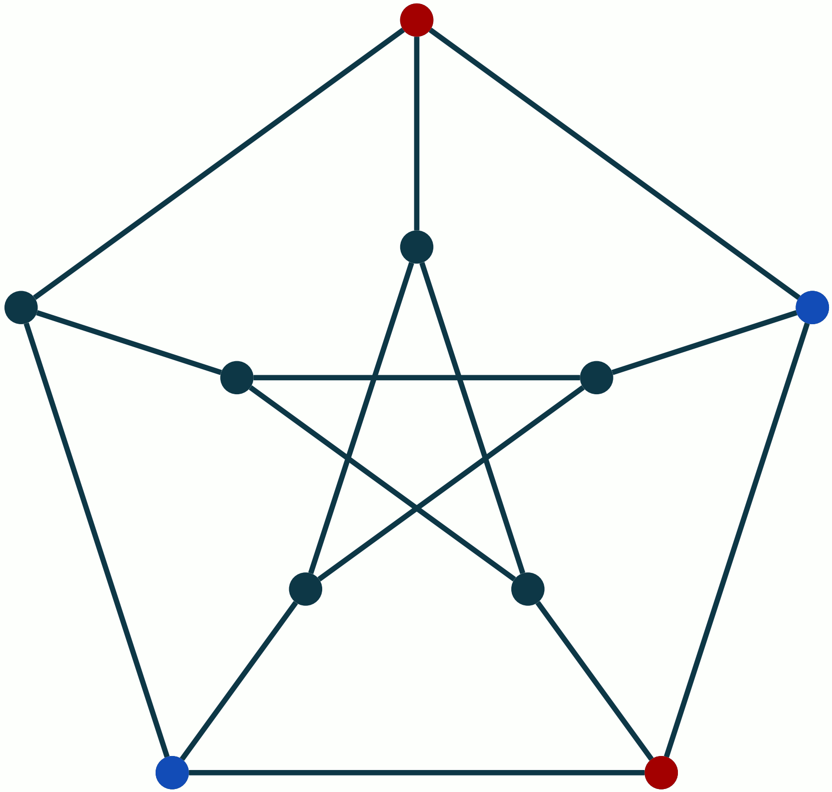
Kolorowanie grafów



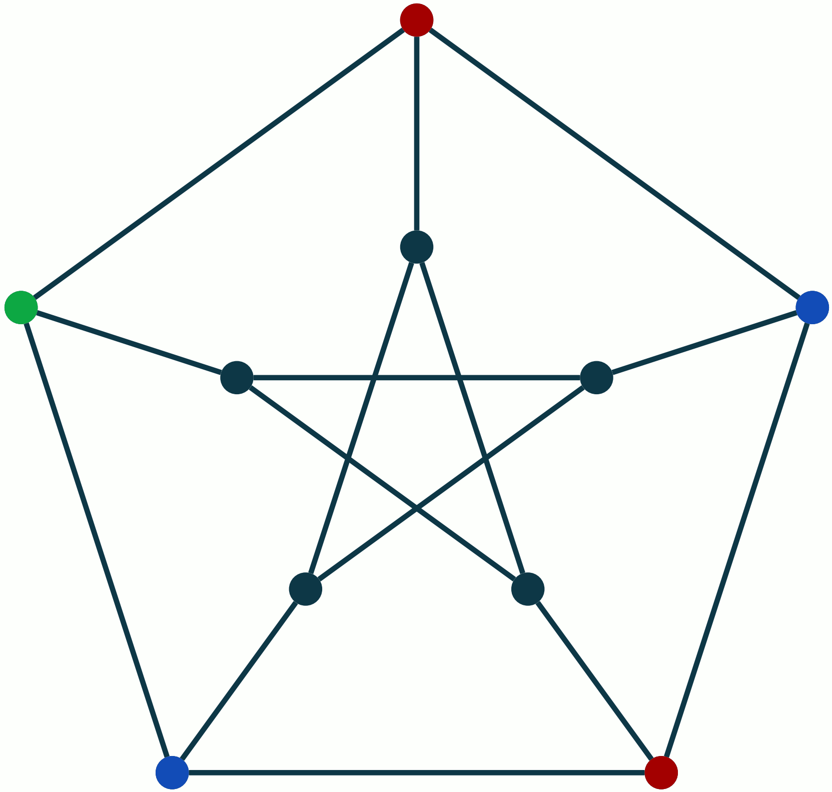
Kolorowanie grafów



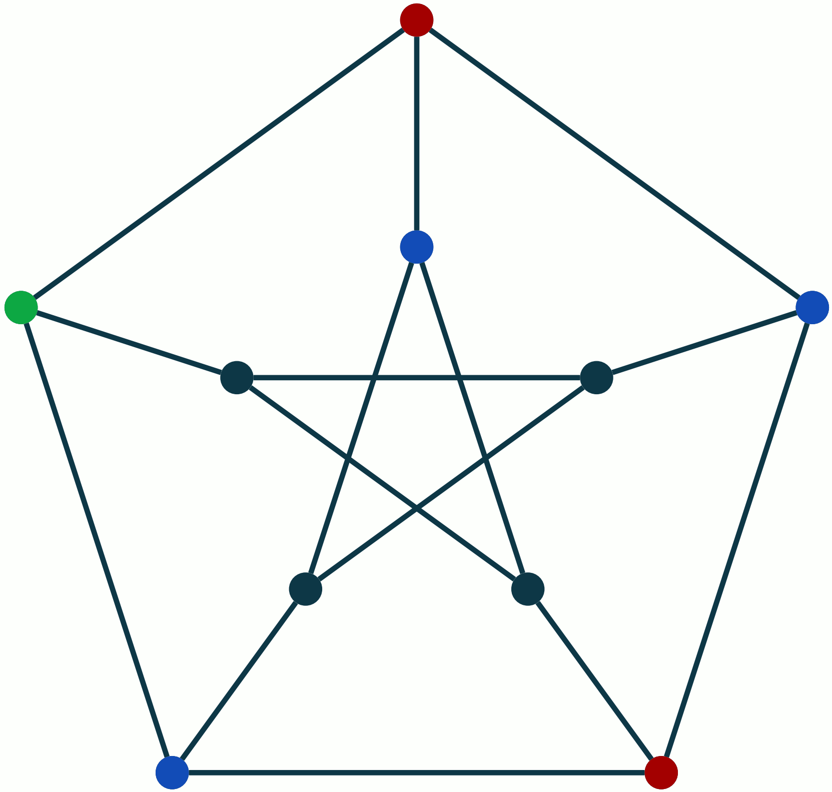
Kolorowanie grafów



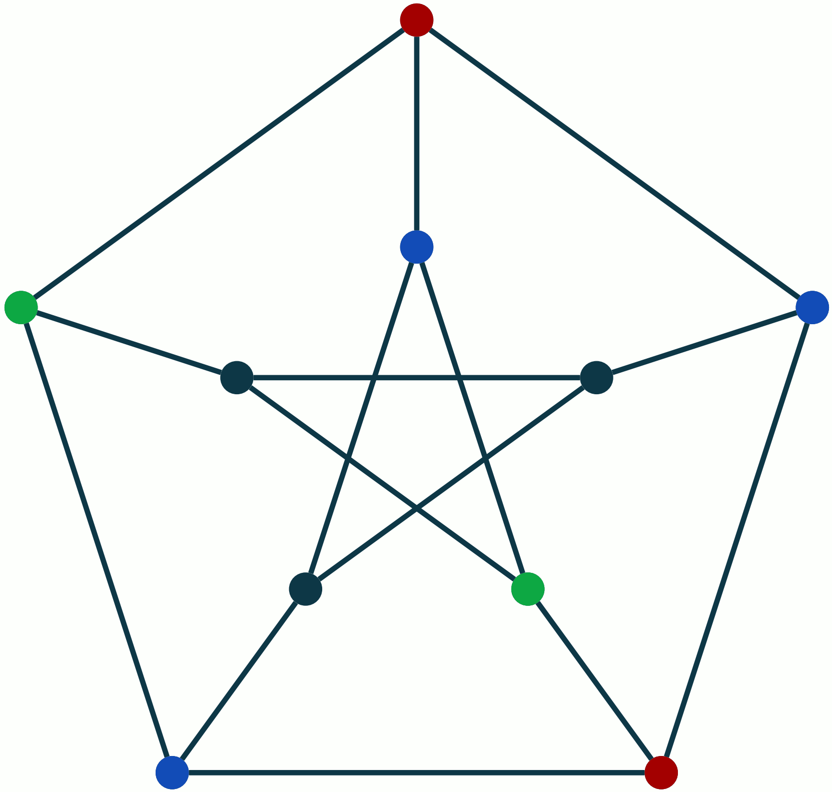
Kolorowanie grafów



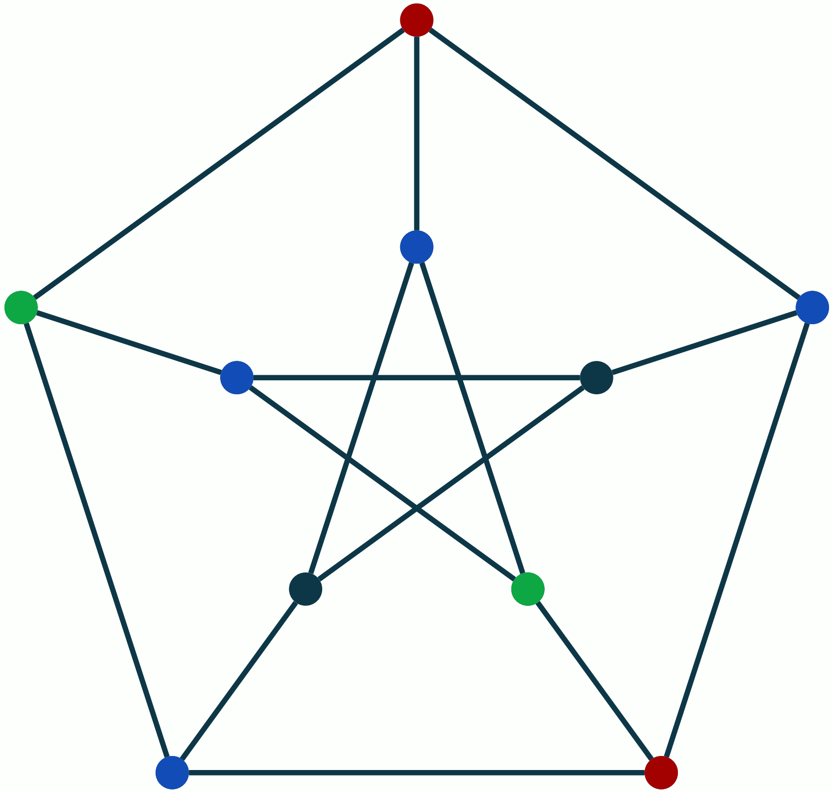
Kolorowanie grafów



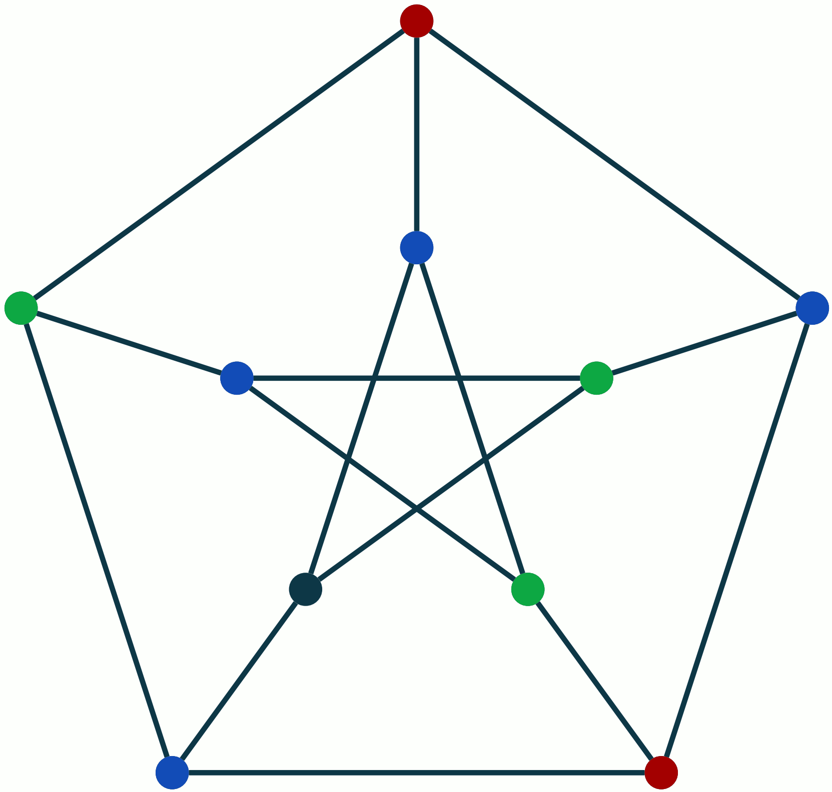
Kolorowanie grafów



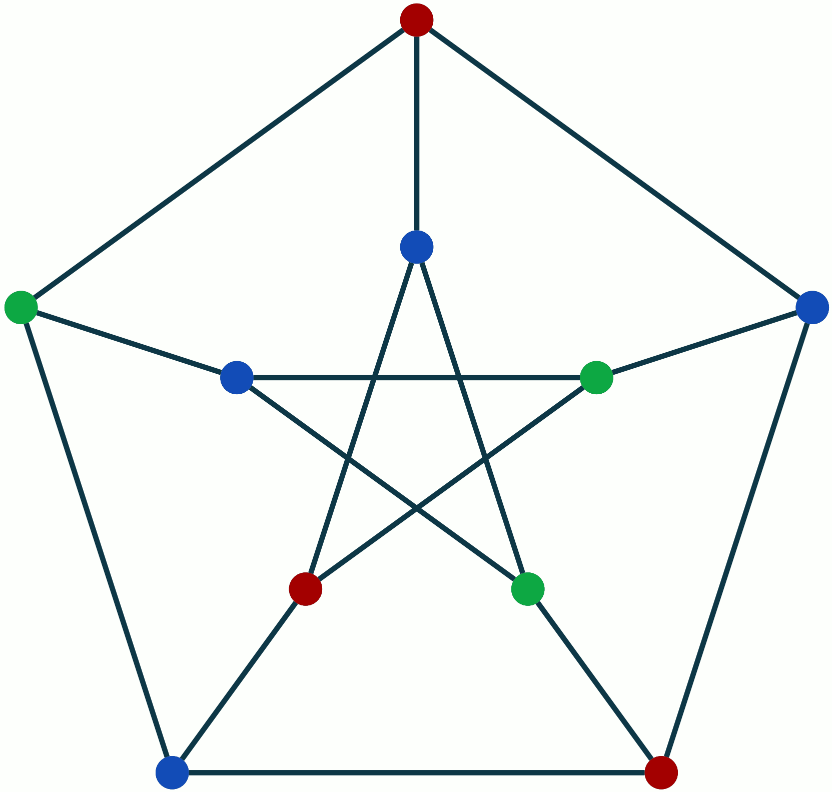
Kolorowanie grafów



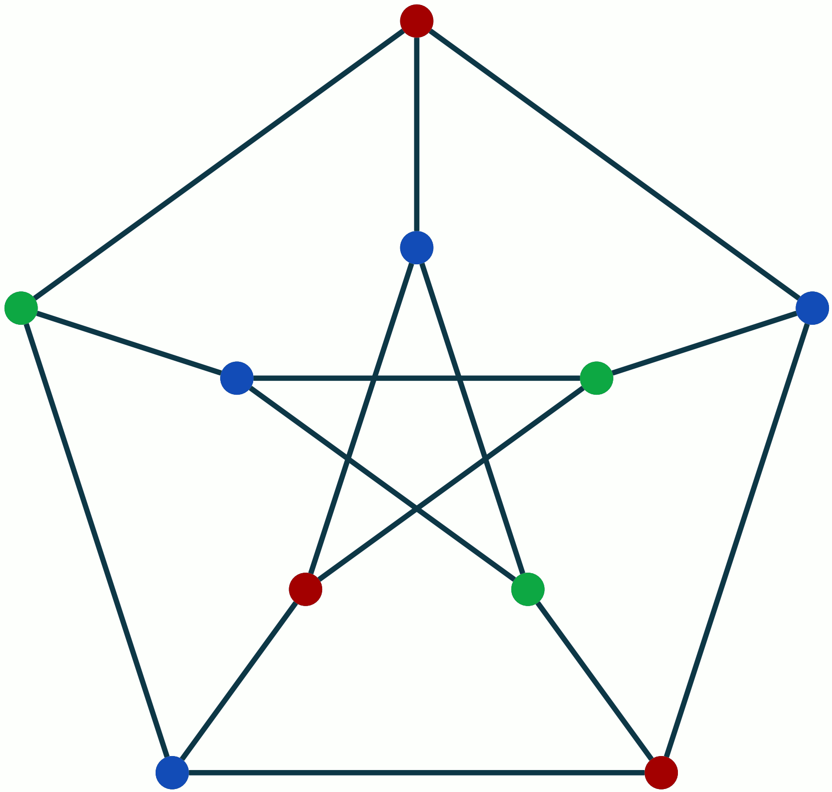
Kolorowanie grafów



Kolorowanie grafów



Kolorowanie grafów



3-kolorowalny, ale nie **2**-kolorowalny

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

$$\Downarrow$$

G jest k-kolorowalny.

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

$$\Downarrow$$

G jest k-kolorowalny.

Dowód

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

$$\Downarrow$$

G jest k-kolorowalny.

Dowód

$\{v_1, v_2, \ldots\}$ – wierzchołki G

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

$$\Downarrow$$

G jest k-kolorowalny.

Dowód

$\{v_1, v_2, \dots\}$ – wierzchołki G $\qquad$ G_n – podgraf indukowany na $\{v_1, \dots, v_n\}$

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

$$\Downarrow$$

G jest k-kolorowalny.

Dowód

$\{v_1, v_2, \ldots\}$ – wierzchołki G $\qquad$ G_n – podgraf indukowany na $\{v_1, \ldots, v_n\}$

-

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

$$\Downarrow$$

G jest k-kolorowalny.

Dowód

$\{v_1, v_2, \dots\}$ – wierzchołki G $\qquad$ G_n – podgraf indukowany na $\{v_1, \dots, v_n\}$

$\bullet$

$\longleftarrow$ $\qquad$ k-kolorowania G_1

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

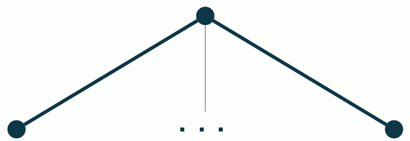
$$\Downarrow$$

G jest k-kolorowalny.

Dowód

$\{v_1, v_2, \ldots\}$ – wierzchołki G

G_n – podgraf indukowany na $\{v_1, \ldots, v_n\}$



$\longleftarrow$ k-kolorowania G_1

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

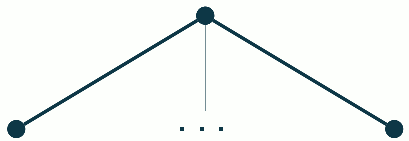
$$\Downarrow$$

G jest k-kolorowalny.

Dowód

$\{v_1, v_2, \ldots\}$ – wierzchołki G

G_n – podgraf indukowany na $\{v_1, \ldots, v_n\}$



$\longleftarrow$ k-kolorowania G_1

$\longleftarrow$ k-kolorowania G_2

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

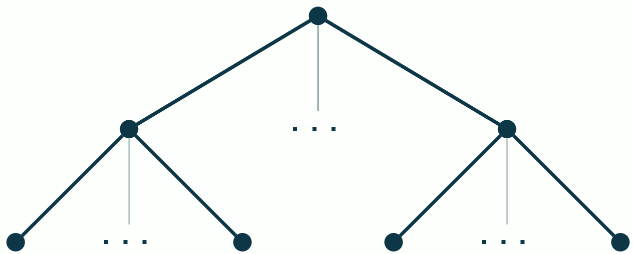
G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

$$\Downarrow$$

G jest k-kolorowalny.

Dowód

$\{v_1, v_2, \ldots\}$ – wierzchołki G $\qquad$ G_n – podgraf indukowany na $\{v_1, \ldots, v_n\}$



$\longleftarrow$ $\quad$ k-kolorowania G_1

$\longleftarrow$ $\quad$ k-kolorowania G_2

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

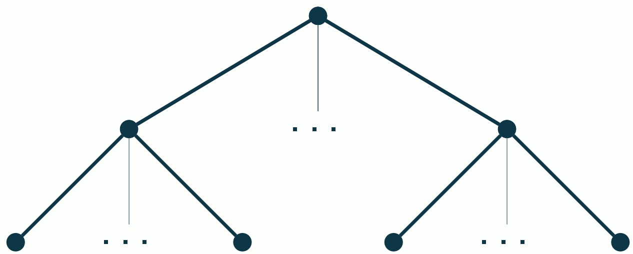
G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

$$\Downarrow$$

G jest k-kolorowalny.

Dowód

$\{v_1, v_2, \dots\}$ – wierzchołki G $\qquad$ G_n – podgraf indukowany na $\{v_1, \dots, v_n\}$



$\longleftarrow$ k-kolorowania G_1

$\longleftarrow$ k-kolorowania G_2

$\longleftarrow$ k-kolorowania G_3

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

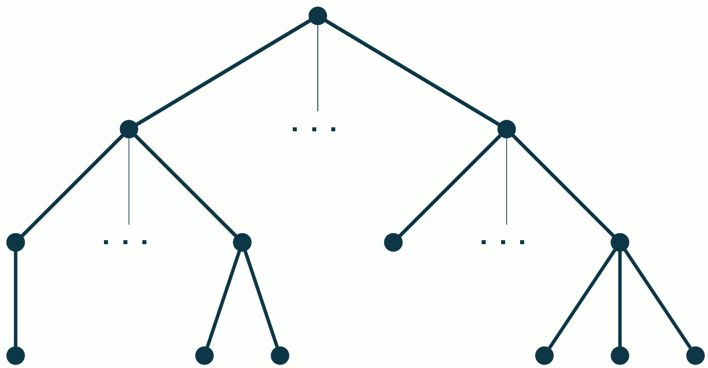
G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

$$\Downarrow$$

G jest k-kolorowalny.

Dowód

$\{v_1, v_2, \ldots\}$ – wierzchołki G $\qquad$ G_n – podgraf indukowany na $\{v_1, \ldots, v_n\}$



$\longleftarrow$ k-kolorowania G_1

$\longleftarrow$ k-kolorowania G_2

$\longleftarrow$ k-kolorowania G_3

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

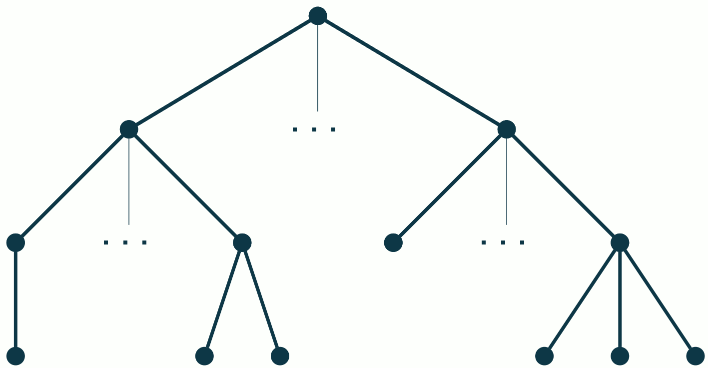
G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

$$\Downarrow$$

G jest k-kolorowalny.

Dowód

$\{v_1, v_2, \ldots\}$ – wierzchołki G $\qquad$ G_n – podgraf indukowany na $\{v_1, \ldots, v_n\}$



$\longleftarrow$ k-kolorowania G_1

$\longleftarrow$ k-kolorowania G_2

$\longleftarrow$ k-kolorowania G_3

$\longleftarrow$ k-kolorowania G_4

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

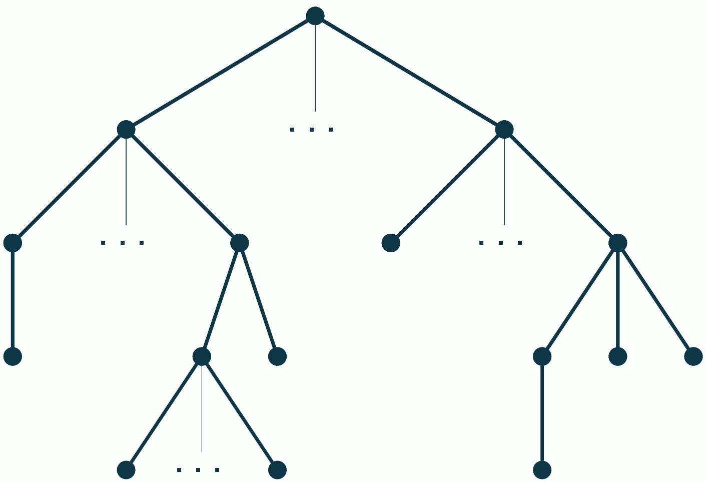
G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

$$\Downarrow$$

G jest k-kolorowalny.

Dowód

$\{v_1, v_2, \ldots\}$ – wierzchołki G $\qquad$ G_n – podgraf indukowany na $\{v_1, \ldots, v_n\}$



$\longleftarrow$ k-kolorowania G_1

$\longleftarrow$ k-kolorowania G_2

$\longleftarrow$ k-kolorowania G_3

$\longleftarrow$ k-kolorowania G_4

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

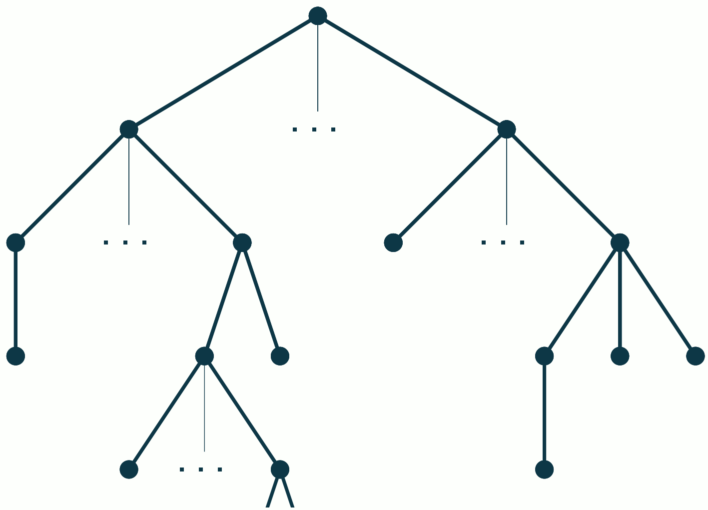
G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

$$\Downarrow$$

G jest k-kolorowalny.

Dowód

$\{v_1, v_2, \dots\}$ – wierzchołki G $\qquad$ G_n – podgraf indukowany na $\{v_1, \dots, v_n\}$



$\longleftarrow$ k-kolorowania G_1

$\longleftarrow$ k-kolorowania G_2

$\longleftarrow$ k-kolorowania G_3

$\longleftarrow$ k-kolorowania G_4

Od kolorowania skończonego do nieskończonego

Twierdzenie

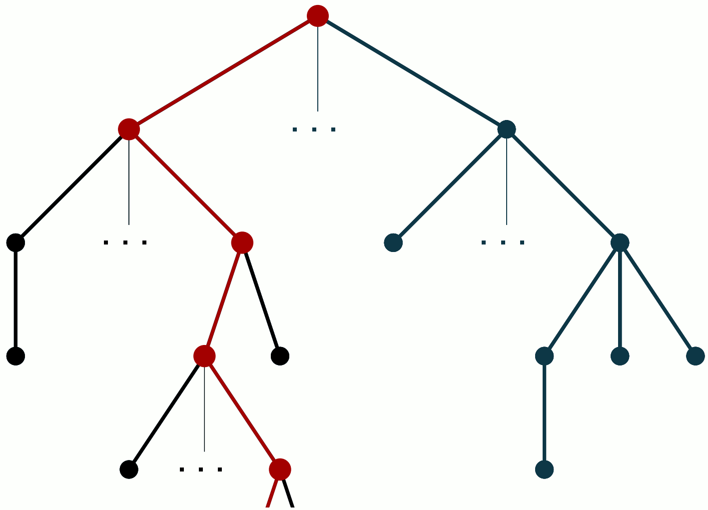
G – graf nieskończony, którego każdy skończony podgraf jest k-kolorowalny.

$$\Downarrow$$

G jest k-kolorowalny.

Dowód

$\{v_1, v_2, \ldots\}$ – wierzchołki G $\qquad$ G_n – podgraf indukowany na $\{v_1, \ldots, v_n\}$



$\longleftarrow$ k-kolorowania G_1

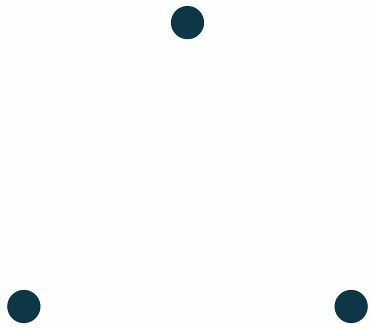
$\longleftarrow$ k-kolorowania G_2

$\longleftarrow$ k-kolorowania G_3

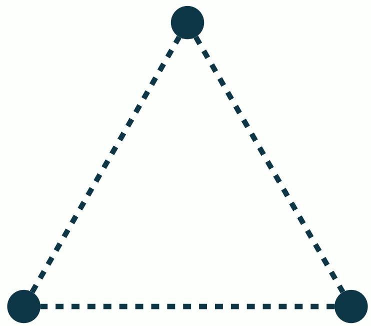
$\longleftarrow$ k-kolorowania G_4

Ile jest grafów?

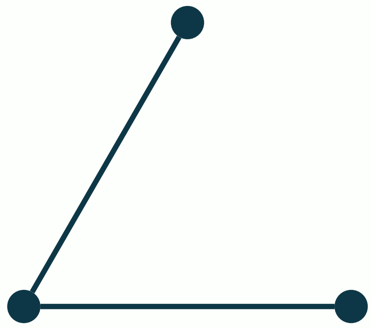
Ile jest grafów?



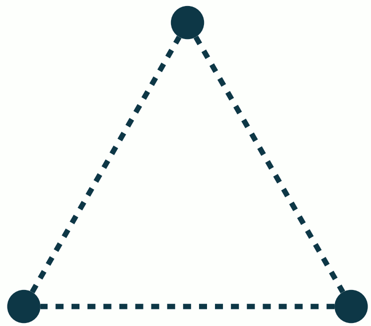
Ile jest grafów?



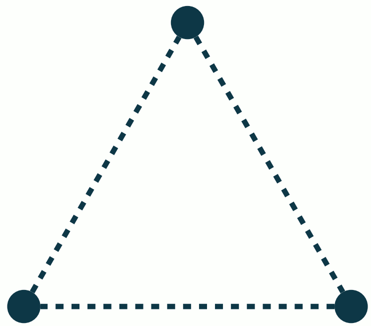
Ile jest grafów?



Ile jest grafów?

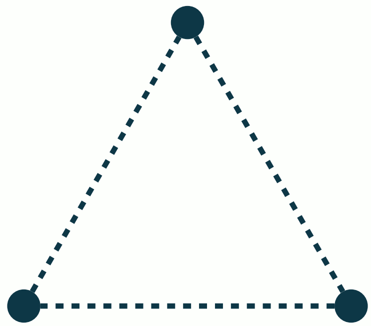


Ile jest grafów?

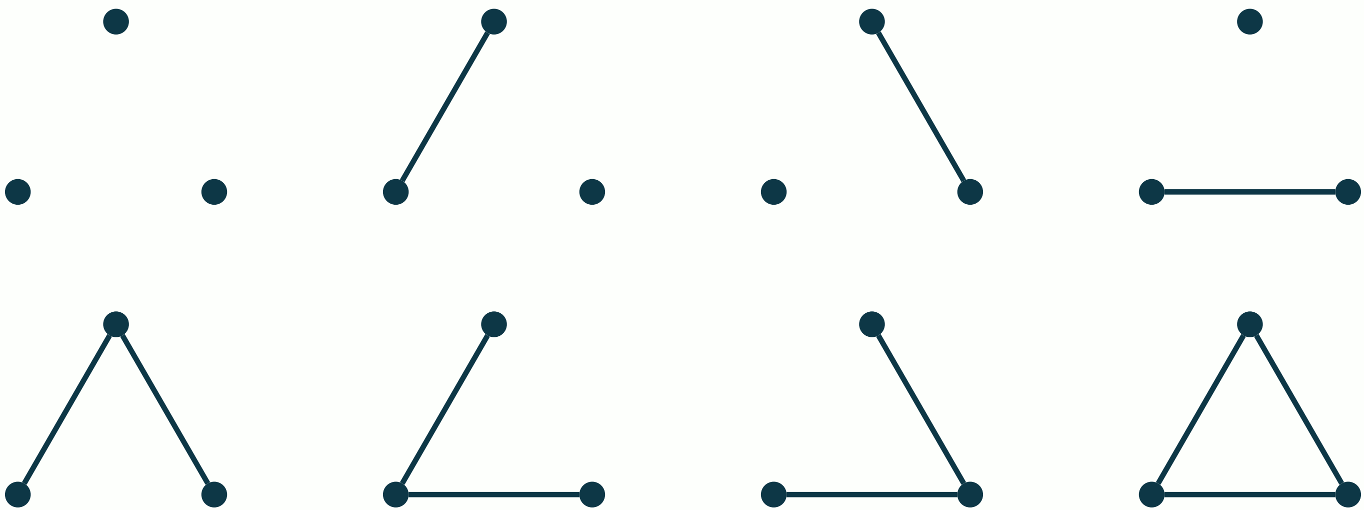


2^3 grafów

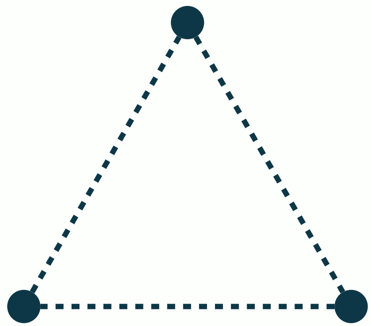
Ile jest grafów?



2^3 grafów

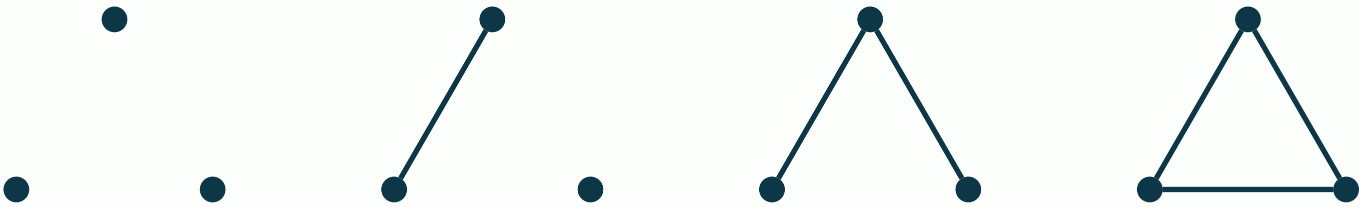


Ile jest grafów?



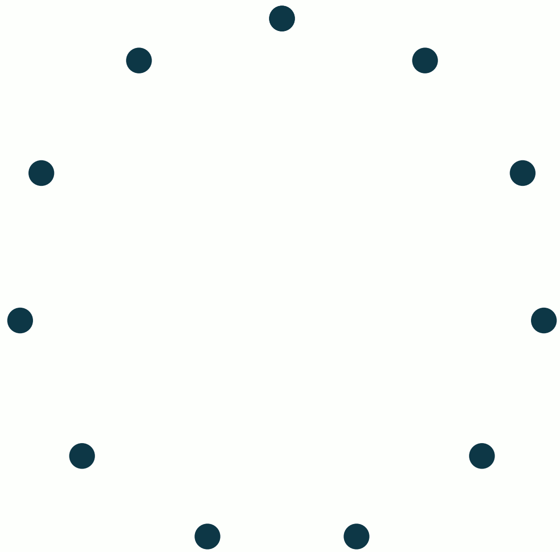
2^3 grafów

Tylko 4 różne grafy!

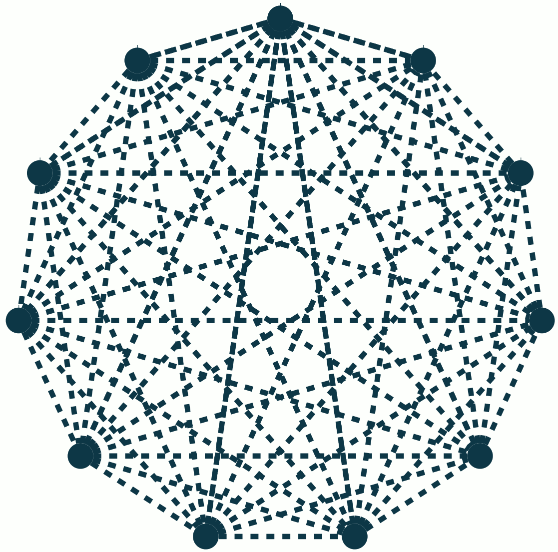


Ile jest grafów?

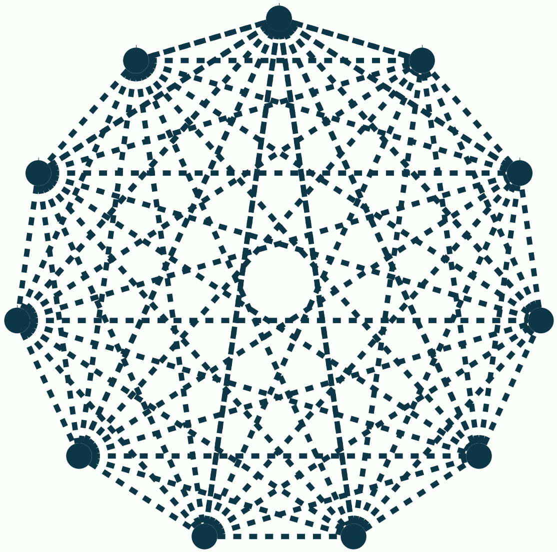
Ile jest grafów?



Ile jest grafów?

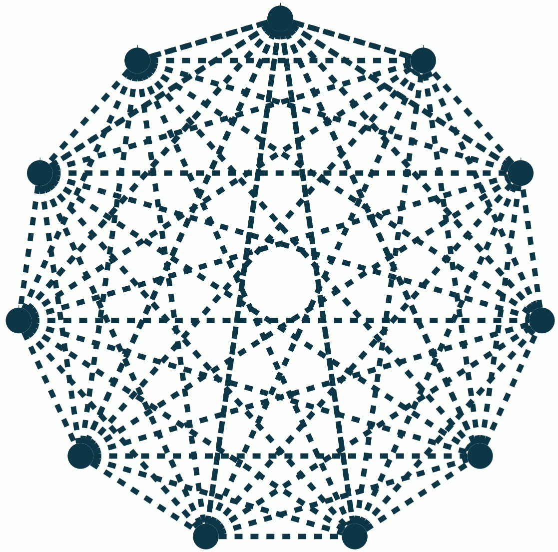


Ile jest grafów?



$\binom{n}{2}$ krawędzi $\Longrightarrow$ $2^{\binom{n}{2}}$ grafów

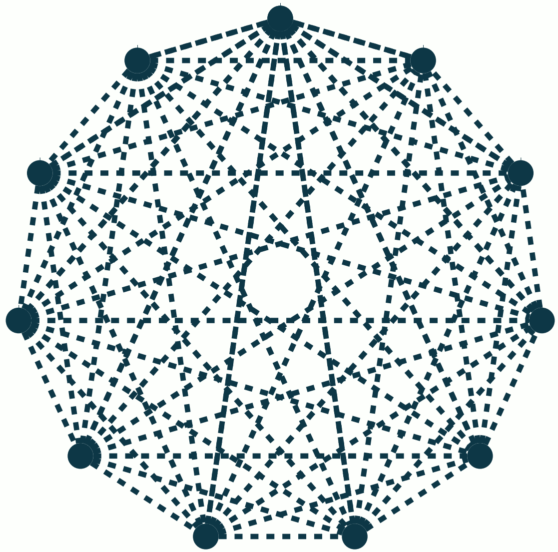
Ile jest grafów?



$\binom{n}{2}$ krawędzi $\Longrightarrow$ $2^{\binom{n}{2}}$ grafów

Ile różnych grafów?

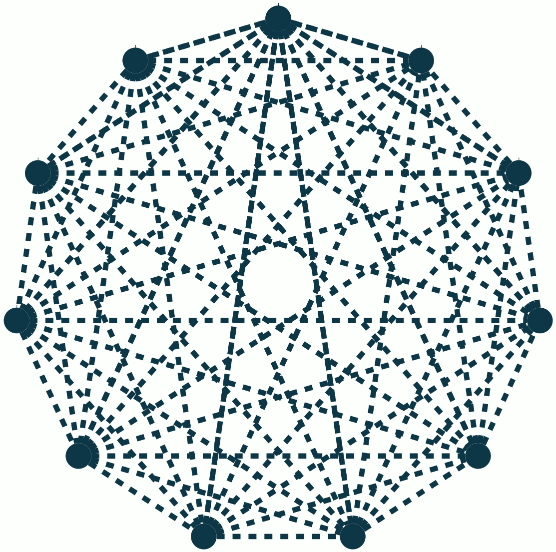
Ile jest grafów?



$\binom{n}{2}$ krawędzi $\Longrightarrow$ $2^{\binom{n}{2}}$ grafów

Ile różnych grafów? $2^{\binom{n}{2}}$?

Ile jest grafów?



$\binom{n}{2}$ krawędzi $\Longrightarrow$ $2^{\binom{n}{2}}$ grafów

Ile różnych grafów? $2^{\binom{n}{2}}$? $2^{\binom{n}{2}}/n!$?

Ile jest grafów?

Ile jest grafów?

Liczba wierzchołków											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Ile jest grafów?

Liczba wierzchołków											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba nieizomorficznych grafów											

Ile jest grafów?

Liczba wierzchołków											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba nieizomorficznych grafów											
1											

Ile jest grafów?

Liczba wierzchołków											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba nieizomorficznych grafów											
1	2										

Ile jest grafów?

Liczba wierzchołków											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba nieizomorficznych grafów											
1	2	4									

Ile jest grafów?

Liczba wierzchołków											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba nieizomorficznych grafów											
1	2	4	11								

Ile jest grafów?

Liczba wierzchołków											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba nieizomorficznych grafów											
1	2	4	11	34	156	1044	12346	274668	12005168	1018997864	165091172592

Ile jest grafów?

Liczba wierzchołków											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba nieizomorficznych grafów											
1	2	4	11	34	156	1044	12346	274668	12005168	1018997864	165091172592
$2^{\binom{n}{2}}/n!$											
1	1	2	3	9	46	417	6658	189373	9695870	902597328	154043277298

Ile jest grafów?

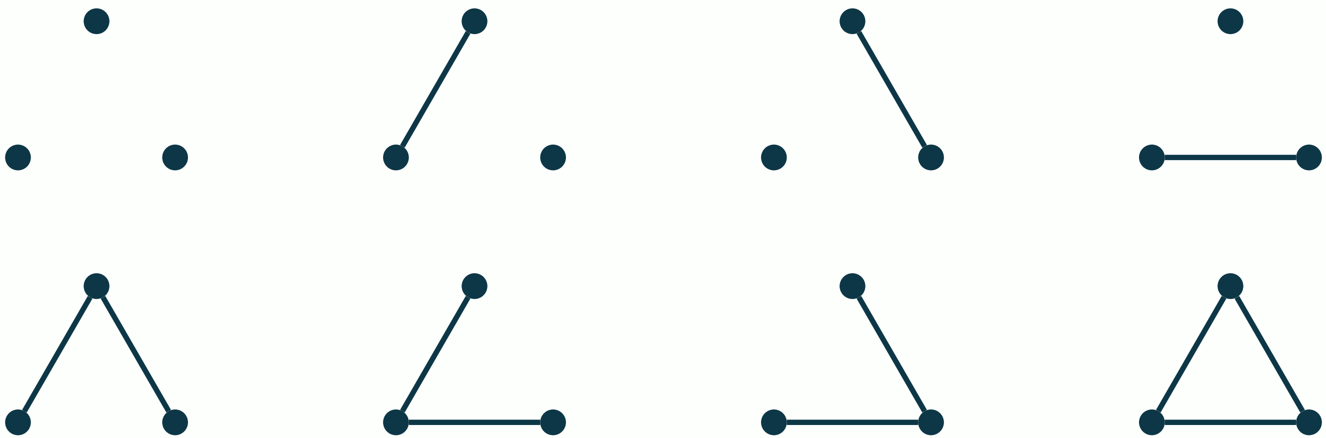
Liczba wierzchołków											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba nieizomorficznych grafów											
1	2	4	11	34	156	1044	12346	274668	12005168	1018997864	165091172592
$2^{\binom{n}{2}}/n!$											
1	1	2	3	9	46	417	6658	189373	9695870	902597328	154043277298

To jest dziwne! Dlaczego tak się dzieje?

Ile jest grafów?

Liczba wierzchołków	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba nieizomorficznych grafów	1	2	4	11	34	156	1044	12346	274668	12005168	1018997864	165091172592
$2^{\binom{n}{2}}/n!$	1	1	2	3	9	46	417	6658	189373	9695870	902597328	154043277298

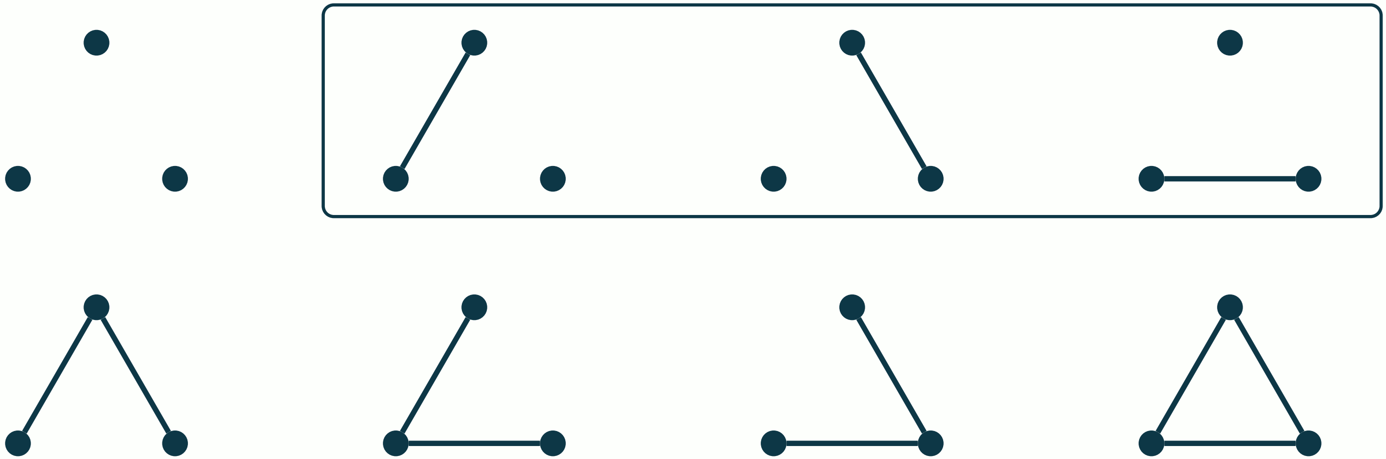
To jest dziwne! Dlaczego tak się dzieje?



Ile jest grafów?

Liczba wierzchołków	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba nieizomorficznych grafów	1	2	4	11	34	156	1044	12346	274668	12005168	1018997864	165091172592
$2^{\binom{n}{2}}/n!$	1	1	2	3	9	46	417	6658	189373	9695870	902597328	154043277298

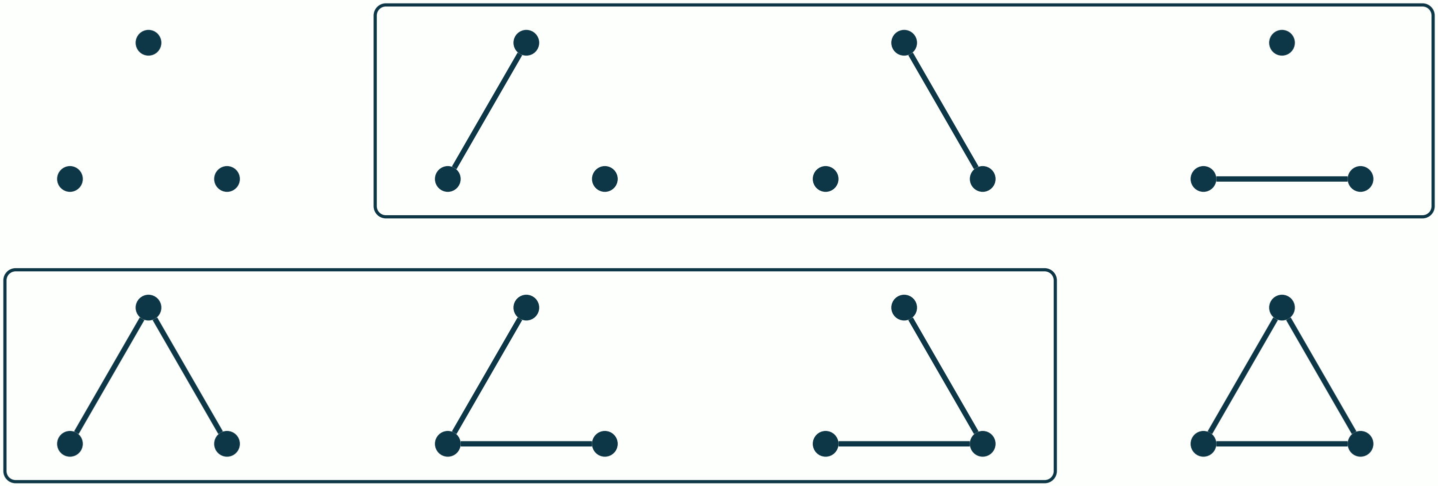
To jest dziwne! Dlaczego tak się dzieje?



Ile jest grafów?

Liczba wierzchołków	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba nieizomorficznych grafów	1	2	4	11	34	156	1044	12346	274668	12005168	1018997864	165091172592
$2^{\binom{n}{2}}/n!$	1	1	2	3	9	46	417	6658	189373	9695870	902597328	15404327298

To jest dziwne! Dlaczego tak się dzieje?

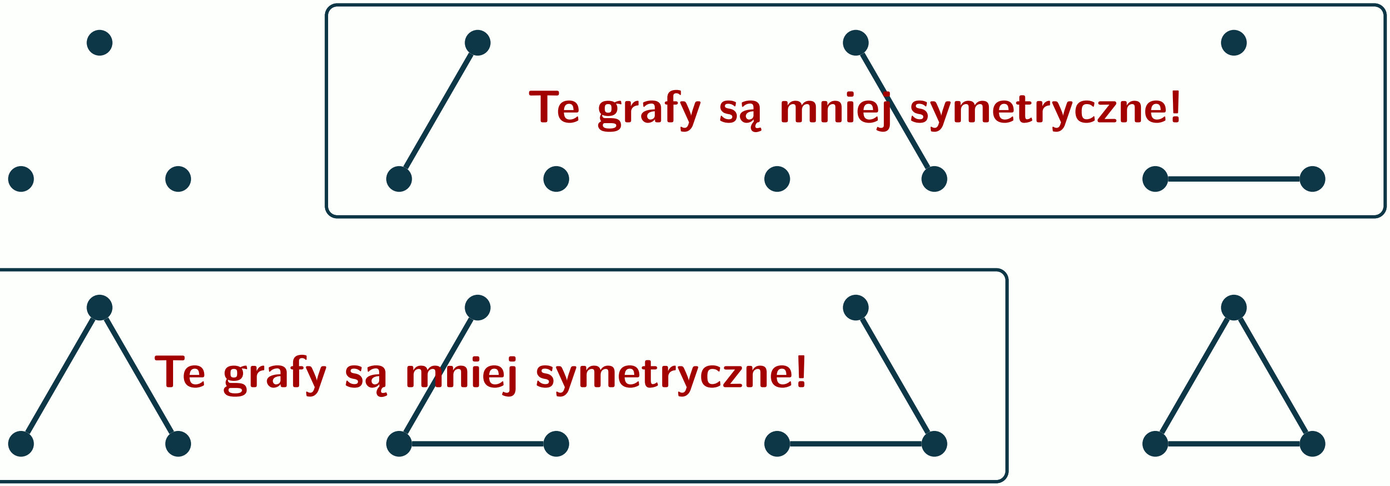


Ile jest grafów?

Liczba wierzchołków

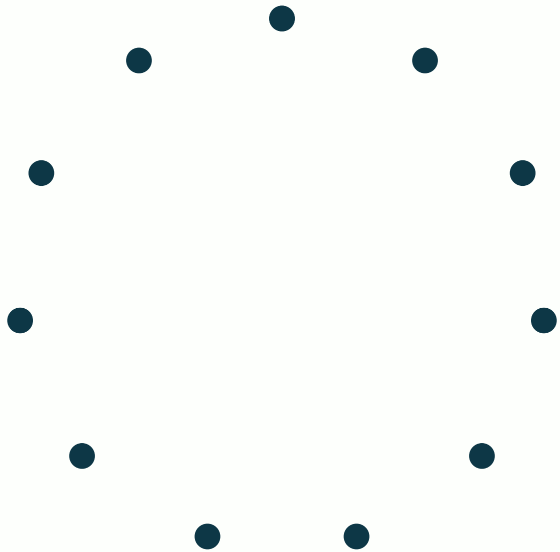
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba nieizomorficznych grafów											
1	2	4	11	34	156	1044	12346	274668	12005168	1018997864	165091172592
$2^{\binom{n}{2}}/n!$											
1	1	2	3	9	46	417	6658	189373	9695870	902597328	154043277298

To jest dziwne! Dlaczego tak się dzieje?

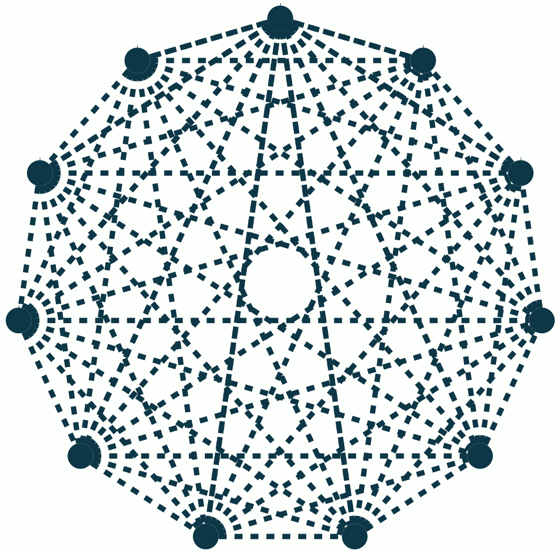


Grafy losowe

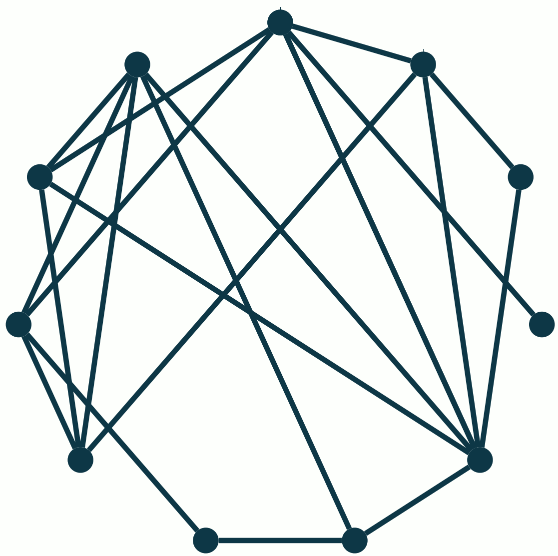
Grafy losowe



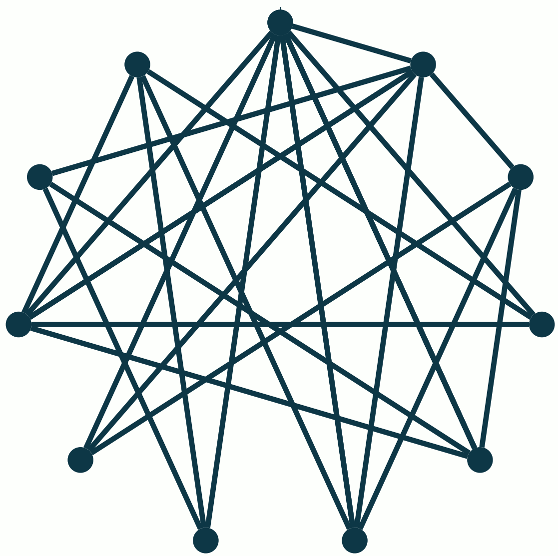
Grafy losowe



Grafy losowe



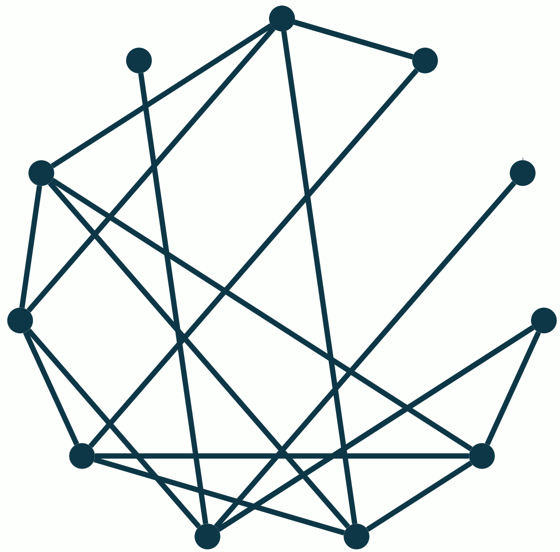
Grafy losowe



Twierdzenie (Erdős–Rényi, 1963 r.)

Losowy graf jest z dużym prawdopodobieństwem asymetryczny.

Grafy losowe



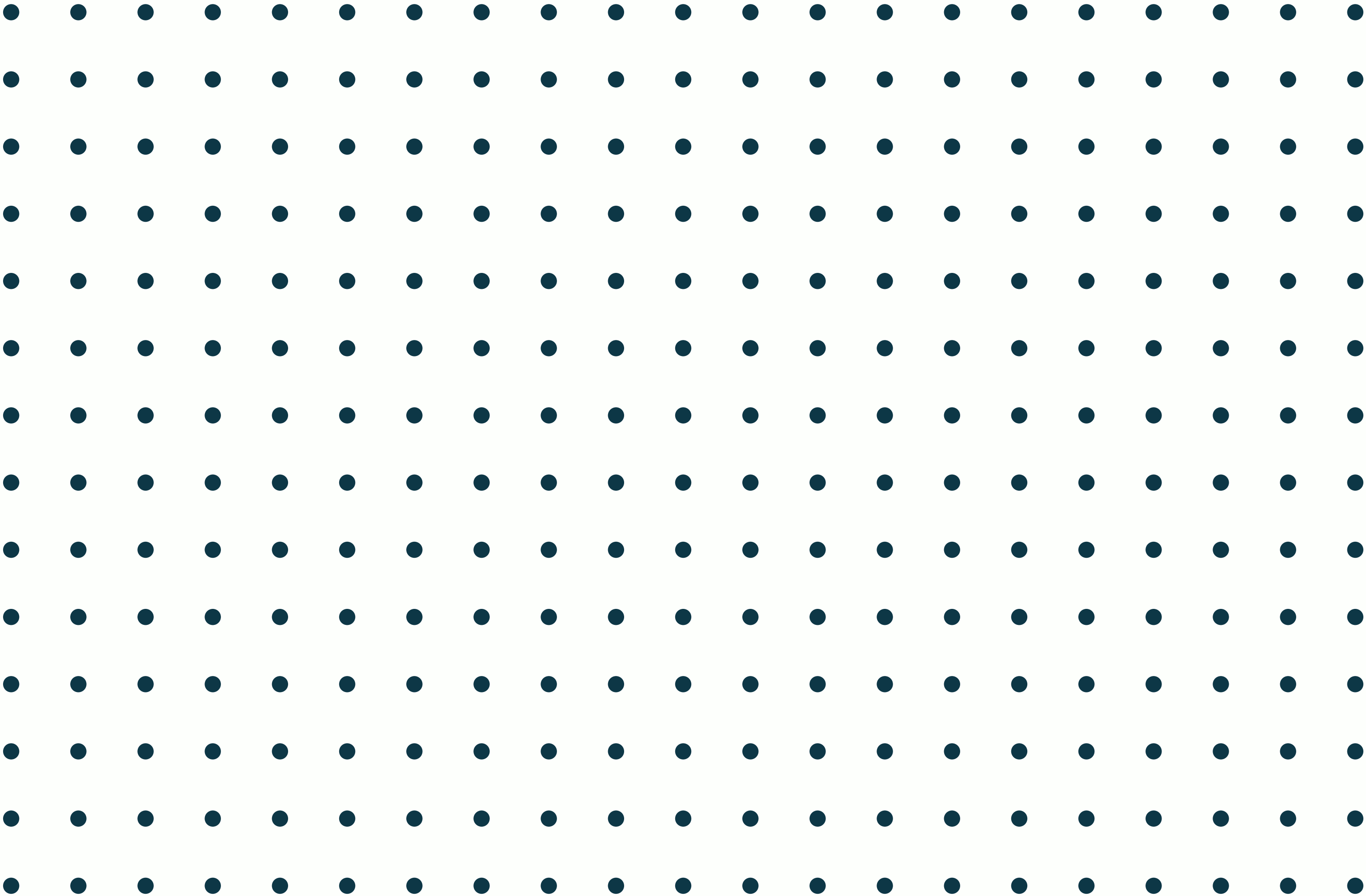
Twierdzenie (Erdős–Rényi, 1963 r.)

Losowy graf jest z dużym prawdopodobieństwem asymetryczny.

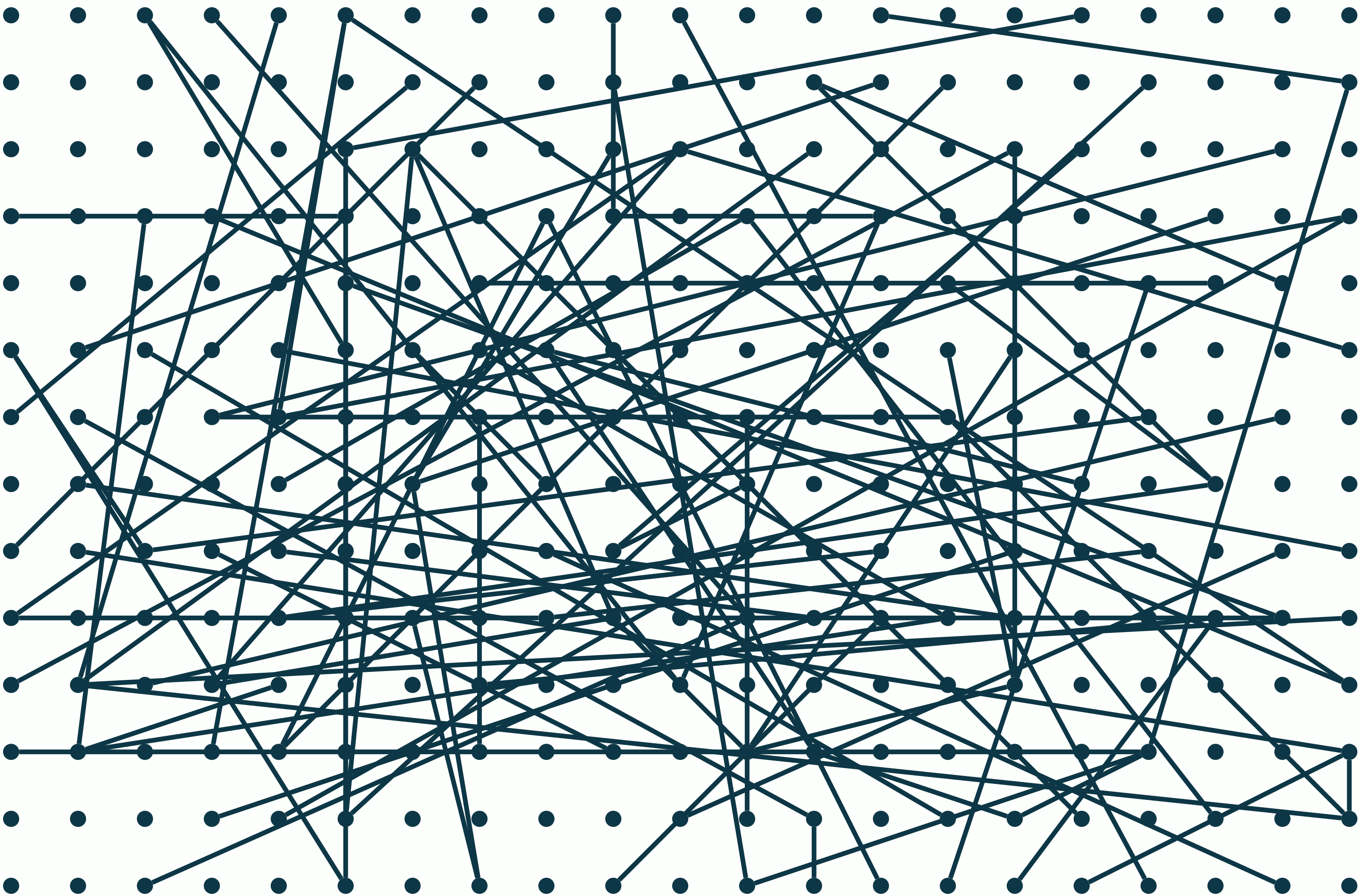
Liczba nieizomorficznych grafów jest asymptotycznie równa $2^{\binom{n}{2}}/n!$.

Nieskończone grafy losowe

Nieskończone grafy losowe



Nieskończone grafy losowe



Nieskończone grafy losowe

Nieskończone grafy losowe

Lemat

Nieskończony graf losowy spełnia (z prawdopodobieństwem 1) warunek:

Nieskończone grafy losowe

Lemat

Nieskończony graf losowy spełnia (z prawdopodobieństwem 1) warunek:

$*$ Dla dowolnych skończonych i rozłącznych zbiorów wierzchołków U, V

Nieskończone grafy losowe

Lemat

Nieskończony graf losowy spełnia (z prawdopodobieństwem 1) warunek:

$*$ | Dla dowolnych skończonych i rozłącznych zbiorów wierzchołków U, V istnieje wierzchołek w, sąsiadujący ze wszystkimi wierzchołkami w U oraz z żadnym wierzchołkiem w V.

Nieskończone grafy losowe

Lemat

Nieskończony graf losowy spełnia (z prawdopodobieństwem 1) warunek:

$*$ | Dla dowolnych skończonych i rozłącznych zbiorów wierzchołków U, V istnieje wierzchołek w, sąsiadujący ze wszystkimi wierzchołkami w U oraz z żadnym wierzchołkiem w V.

Dowód

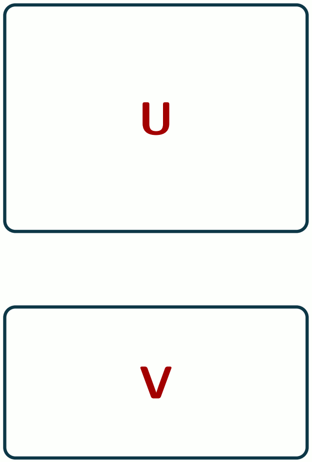
Nieskończone grafy losowe

Lemat

Nieskończony graf losowy spełnia (z prawdopodobieństwem 1) warunek:

$*$ Dla dowolnych skończonych i rozłącznych zbiorów wierzchołków U, V istnieje wierzchołek w, sąsiadujący ze wszystkimi wierzchołkami w U oraz z żadnym wierzchołkiem w V.

Dowód



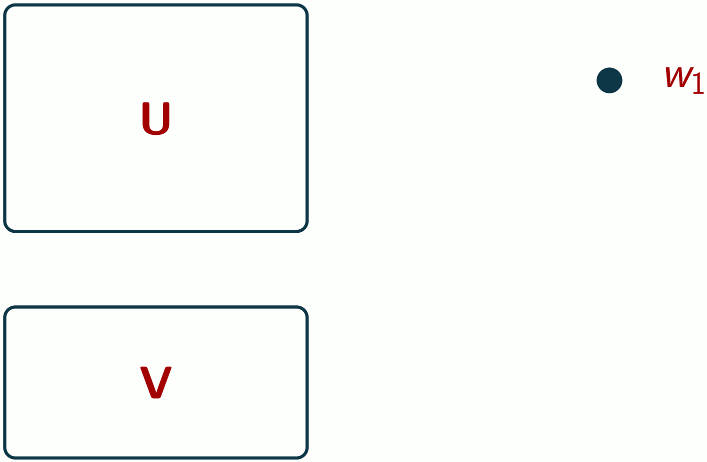
Nieskończone grafy losowe

Lemat

Nieskończony graf losowy spełnia (z prawdopodobieństwem 1) warunek:

* Dla dowolnych skończonych i rozłącznych zbiorów wierzchołków U, V istnieje wierzchołek w, sąsiadujący ze wszystkimi wierzchołkami w U oraz z żadnym wierzchołkiem w V.

Dowód



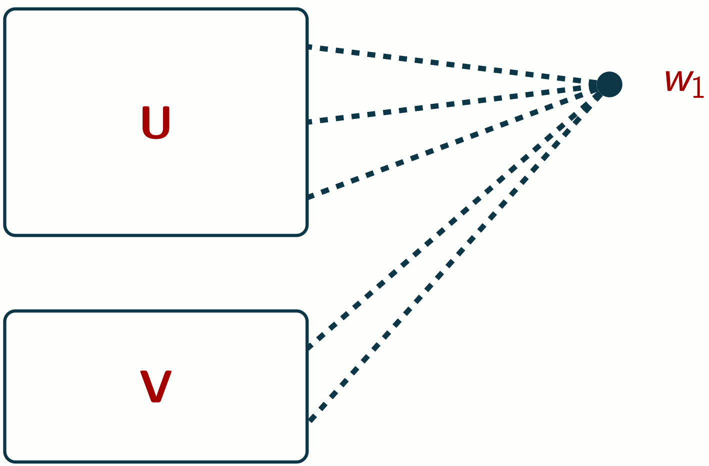
Nieskończone grafy losowe

Lemat

Nieskończony graf losowy spełnia (z prawdopodobieństwem 1) warunek:

$*$ Dla dowolnych skończonych i rozłącznych zbiorów wierzchołków U, V istnieje wierzchołek w, sąsiadujący ze wszystkimi wierzchołkami w U oraz z żadnym wierzchołkiem w V.

Dowód



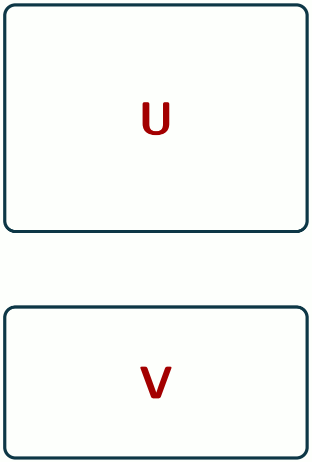
Nieskończone grafy losowe

Lemat

Nieskończony graf losowy spełnia (z prawdopodobieństwem 1) warunek:

$*$ | Dla dowolnych skończonych i rozłącznych zbiorów wierzchołków U, V istnieje wierzchołek w, sąsiadujący ze wszystkimi wierzchołkami w U oraz z żadnym wierzchołkiem w V.

Dowód



- w_1 $\qquad P(w_1 \text{ nie spełnia } *) = 1 - \frac{1}{2^k}$

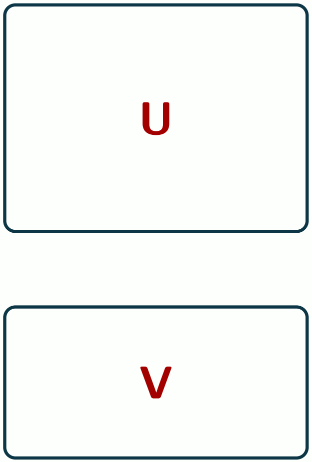
Nieskończone grafy losowe

Lemat

Nieskończony graf losowy spełnia (z prawdopodobieństwem 1) warunek:

$*$ Dla dowolnych skończonych i rozłącznych zbiorów wierzchołków U, V istnieje wierzchołek w, sąsiadujący ze wszystkimi wierzchołkami w U oraz z żadnym wierzchołkiem w V.

Dowód



$$|U \cup V| = k$$

- w_1 $\quad P(w_1 \text{ nie spełnia } *) = 1 - \frac{1}{2^k}$

Nieskończone grafy losowe

Lemat

Nieskończony graf losowy spełnia (z prawdopodobieństwem 1) warunek:

$*$ | Dla dowolnych skończonych i rozłącznych zbiorów wierzchołków U, V istnieje wierzchołek w, sąsiadujący ze wszystkimi wierzchołkami w U oraz z żadnym wierzchołkiem w V.

Dowód

U

V

$$|U \cup V| = k$$

- w_1 $\quad P(w_1 \text{ nie spełnia } *) = 1 - \frac{1}{2^k}$
- w_2

Nieskończone grafy losowe

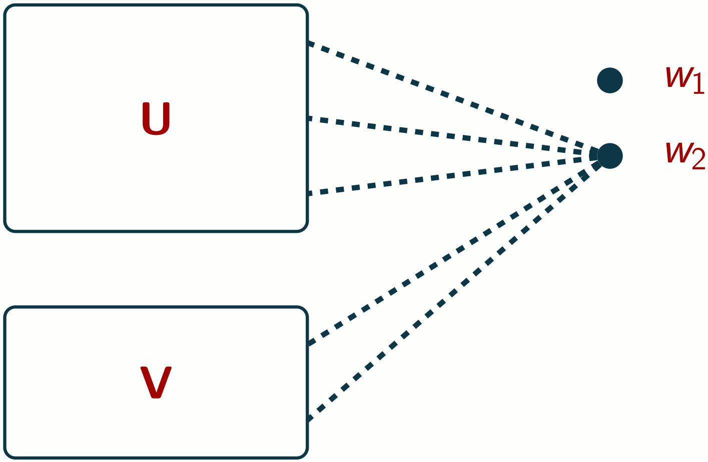
Lemat

Nieskończony graf losowy spełnia (z prawdopodobieństwem 1) warunek:

$*$ Dla dowolnych skończonych i rozłącznych zbiorów wierzchołków U, V istnieje wierzchołek w, sąsiadujący ze wszystkimi wierzchołkami w U oraz z żadnym wierzchołkiem w V.

Dowód

$$|U \cup V| = k$$



$$P(w_1 \text{ nie spełnia } *) = 1 - \frac{1}{2^k}$$

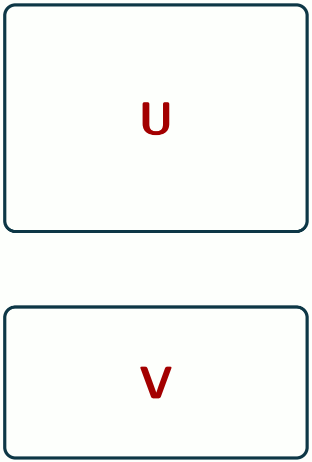
Nieskończone grafy losowe

Lemat

Nieskończony graf losowy spełnia (z prawdopodobieństwem 1) warunek:

$*$ Dla dowolnych skończonych i rozłącznych zbiorów wierzchołków U, V istnieje wierzchołek w, sąsiadujący ze wszystkimi wierzchołkami w U oraz z żadnym wierzchołkiem w V.

Dowód



$$|U \cup V| = k$$

- w_1 $\quad P(w_1 \text{ nie spełnia } *) = 1 - \frac{1}{2^k}$
- w_2 $\quad P(w_2 \text{ nie spełnia } *) = 1 - \frac{1}{2^k}$

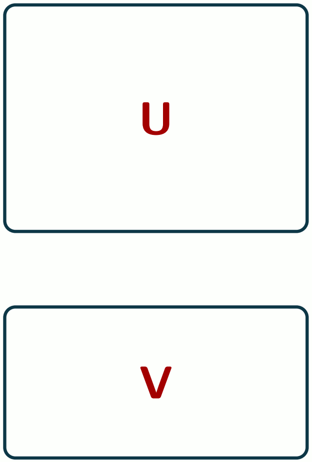
Nieskończone grafy losowe

Lemat

Nieskończony graf losowy spełnia (z prawdopodobieństwem 1) warunek:

$*$ Dla dowolnych skończonych i rozłącznych zbiorów wierzchołków U, V istnieje wierzchołek w, sąsiadujący ze wszystkimi wierzchołkami w U oraz z żadnym wierzchołkiem w V.

Dowód



$$|U \cup V| = k$$

- w_1 $\quad P(w_1 \text{ nie spełnia } *) = 1 - \frac{1}{2^k}$
- w_2 $\quad P(w_2 \text{ nie spełnia } *) = 1 - \frac{1}{2^k}$

$\vdots$

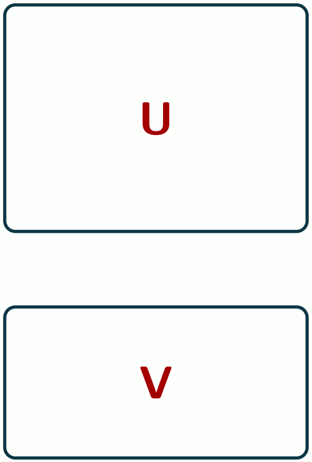
Nieskończone grafy losowe

Lemat

Nieskończony graf losowy spełnia (z prawdopodobieństwem 1) warunek:

$*$ Dla dowolnych skończonych i rozłącznych zbiorów wierzchołków U, V istnieje wierzchołek w, sąsiadujący ze wszystkimi wierzchołkami w U oraz z żadnym wierzchołkiem w V.

Dowód



$$|U \cup V| = k$$

- w_1 $\quad P(w_1 \text{ nie spełnia } *) = 1 - \frac{1}{2^k}$
- w_2 $\quad P(w_2 \text{ nie spełnia } *) = 1 - \frac{1}{2^k}$

$\vdots$

$$P(w_1, w_2, \dots, w_n \text{ nie spełniają } *) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n$$

Nieskończone grafy losowe

Lemat

Nieskończony graf losowy spełnia (z prawdopodobieństwem 1) warunek:

$*$ Dla dowolnych skończonych i rozłącznych zbiorów wierzchołków U, V istnieje wierzchołek w, sąsiadujący ze wszystkimi wierzchołkami w U oraz z żadnym wierzchołkiem w V.

Dowód

$$|U \cup V| = k$$

U

V

- w_1 $\quad P(w_1 \text{ nie spełnia } *) = 1 - \frac{1}{2^k}$
- w_2 $\quad P(w_2 \text{ nie spełnia } *) = 1 - \frac{1}{2^k}$

$\vdots$

$$P(w_1, w_2, \dots, w_n \text{ nie spełniają } *) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n$$

$$\Downarrow$$

$$P(w_1, w_2, \dots \text{ nie spełniają } *) = 0$$

Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

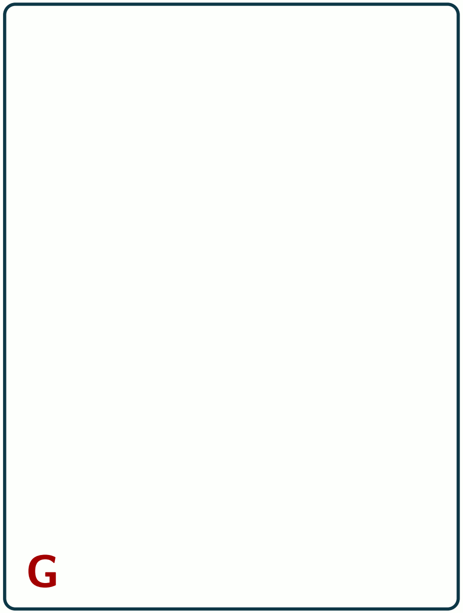
Dowód

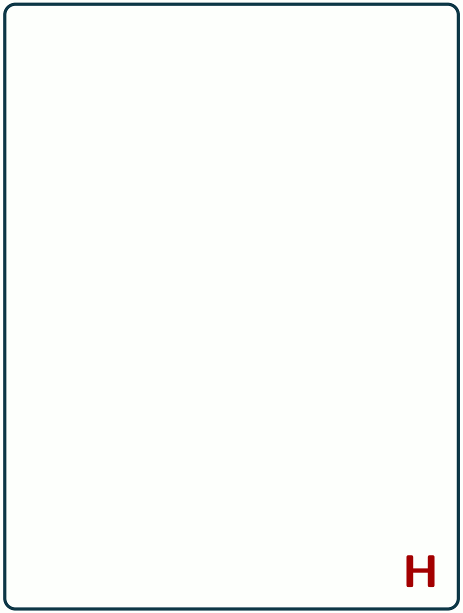
Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód





Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód Tam i z powrotem!

G

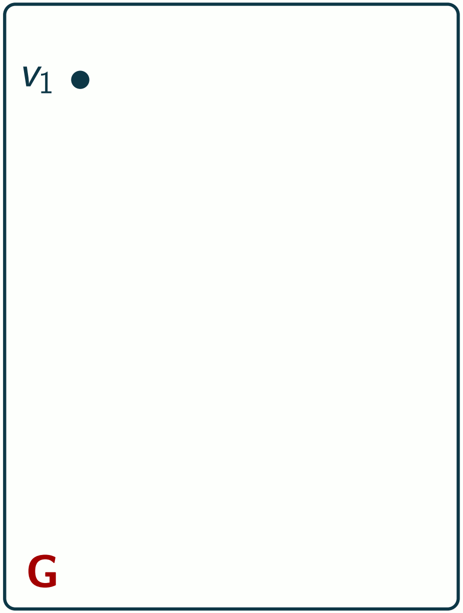
H

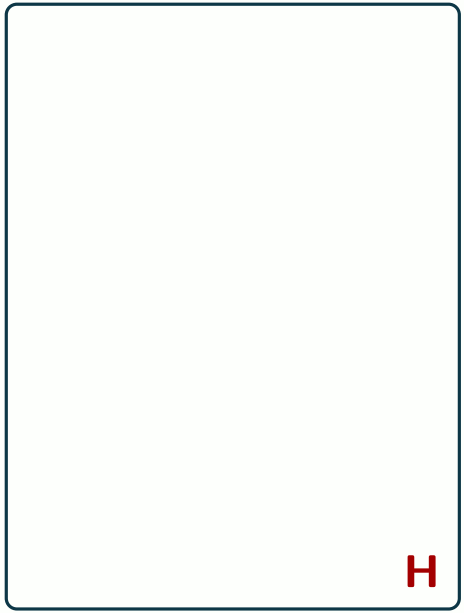
Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód Tam i z powrotem!



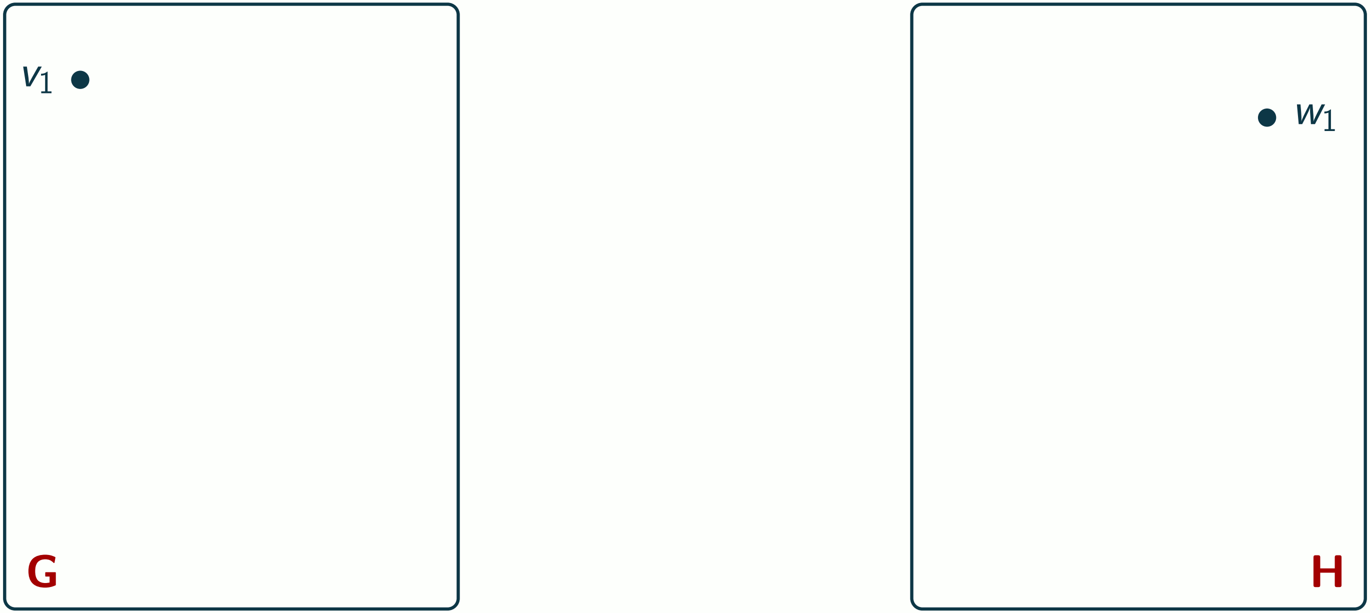


Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód Tam i z powrotem!



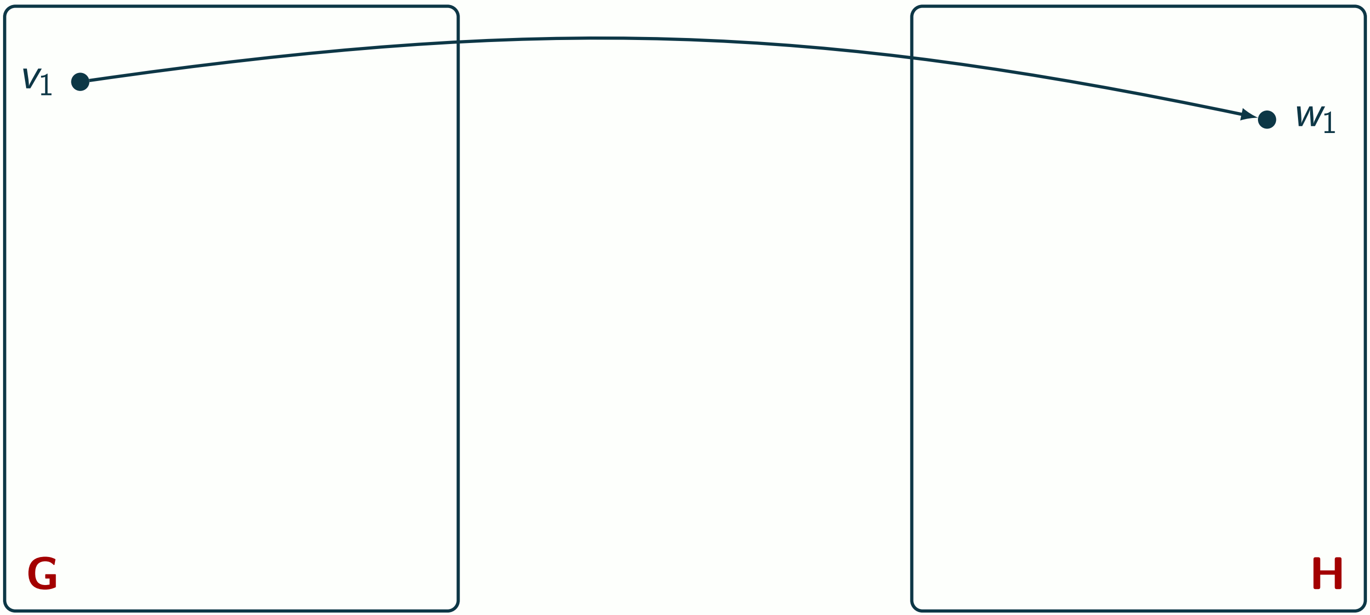
Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód

Tam i z powrotem!

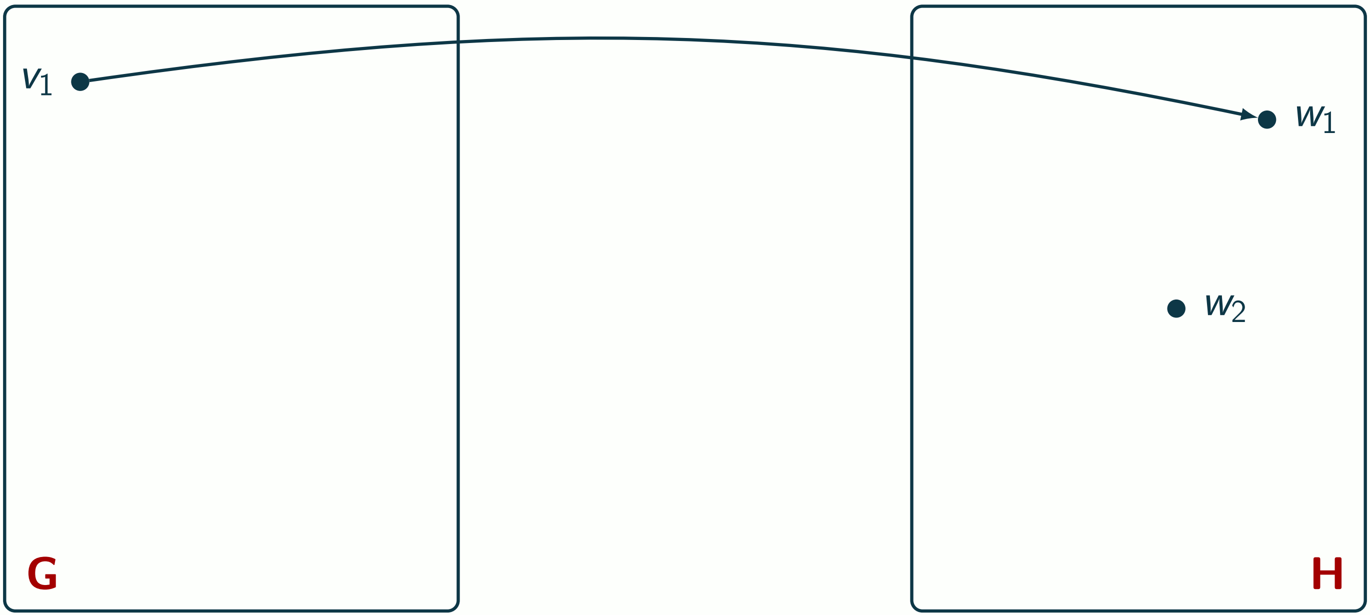


Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód Tam i z powrotem!

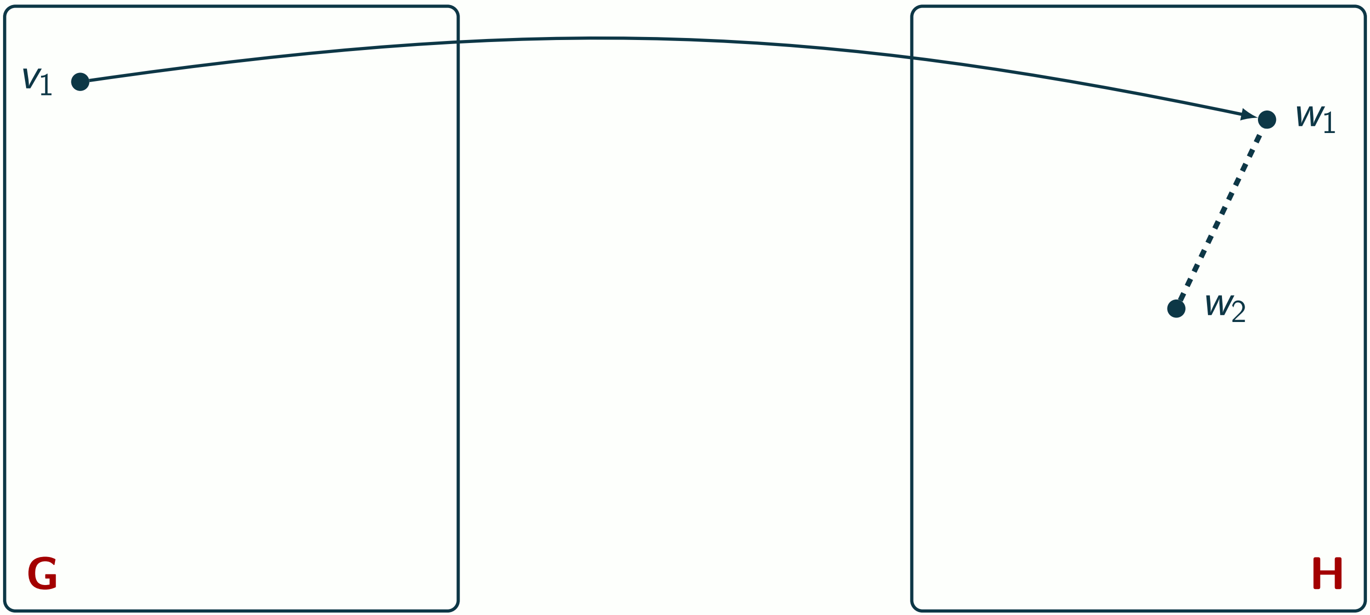


Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód Tam i z powrotem!



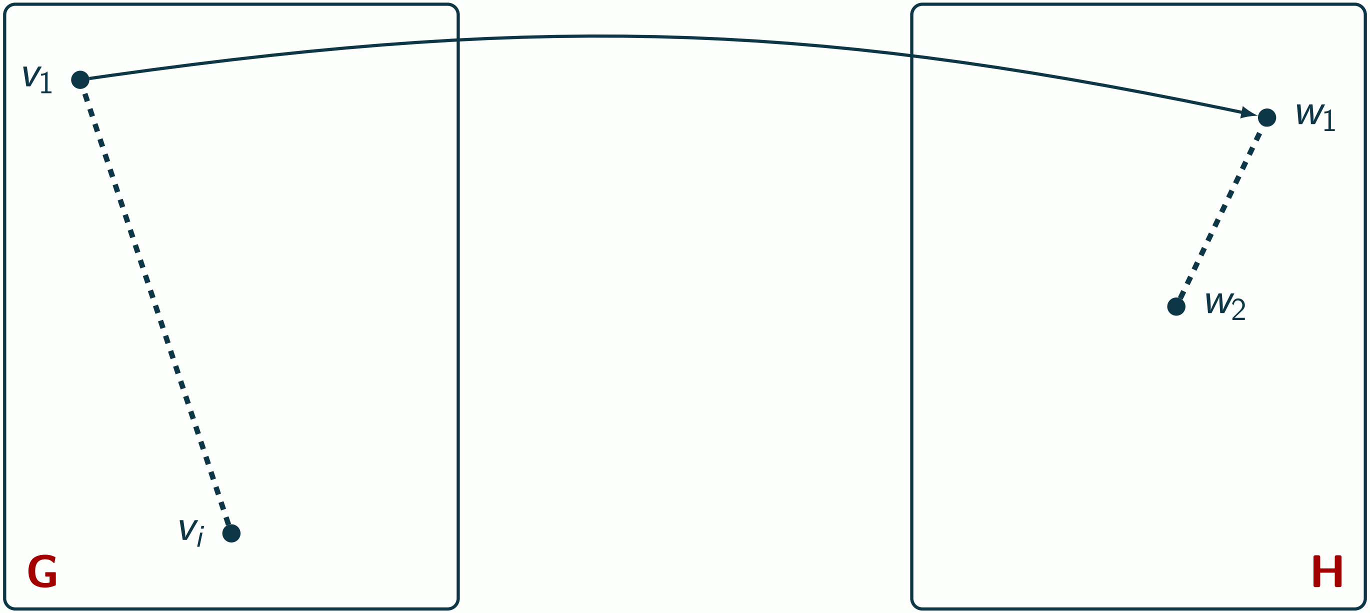
Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód

Tam i z powrotem!

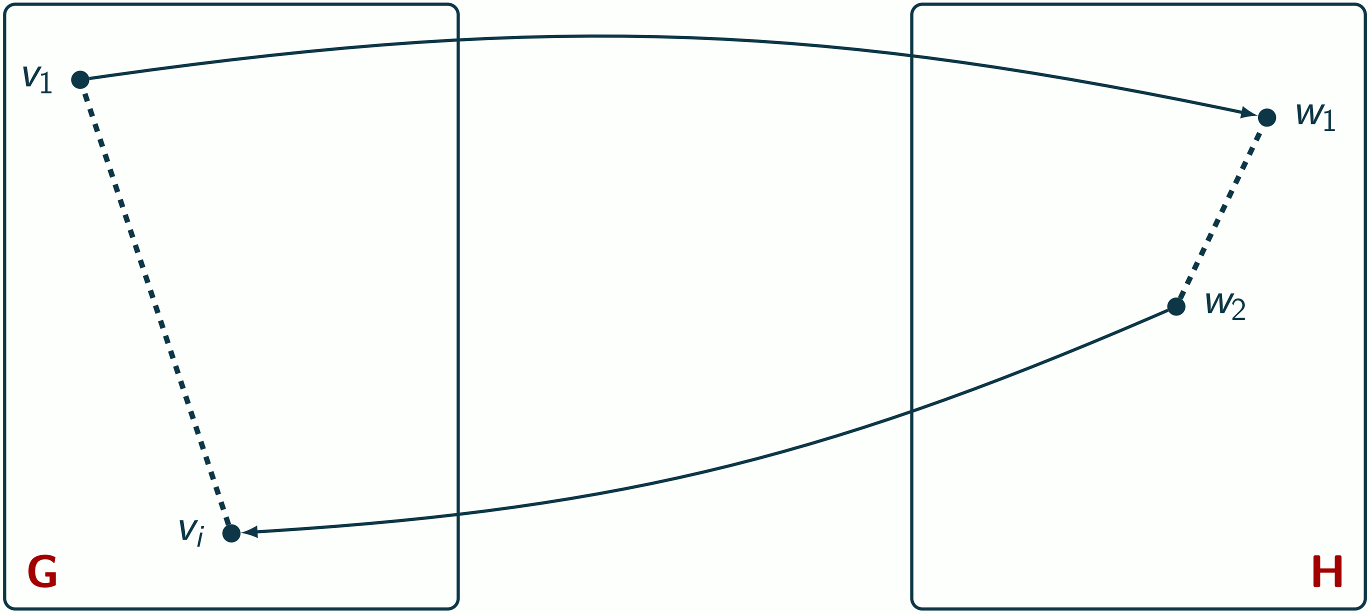


Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód Tam i z powrotem!

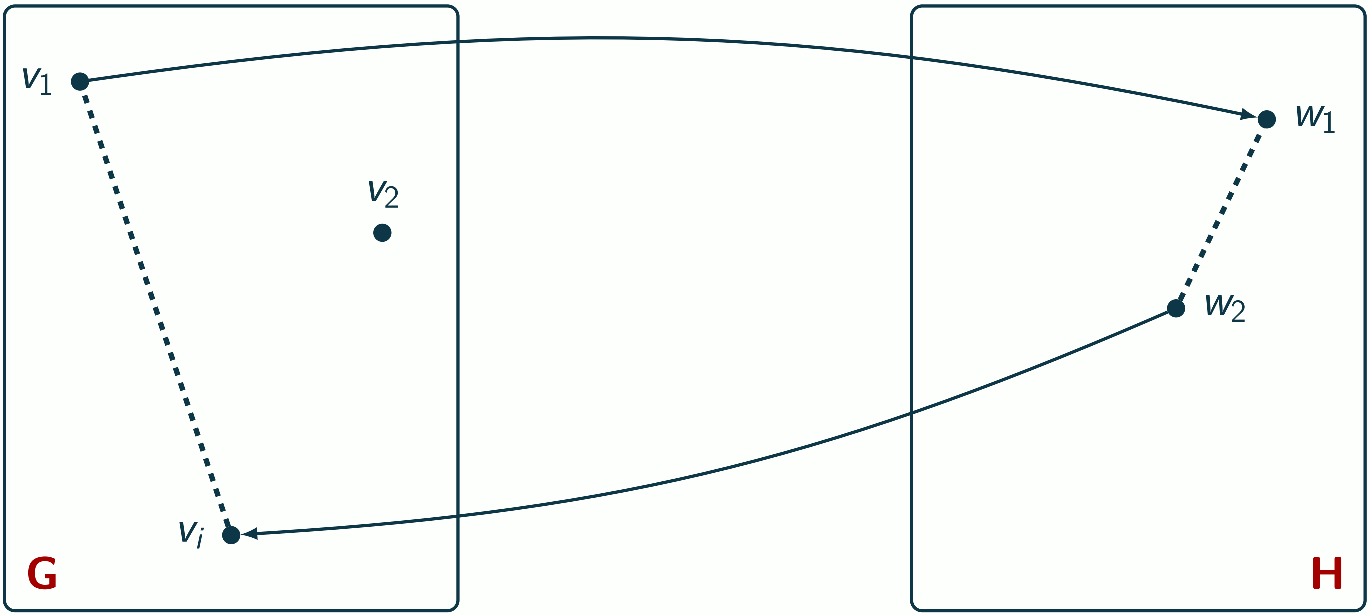


Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód Tam i z powrotem!



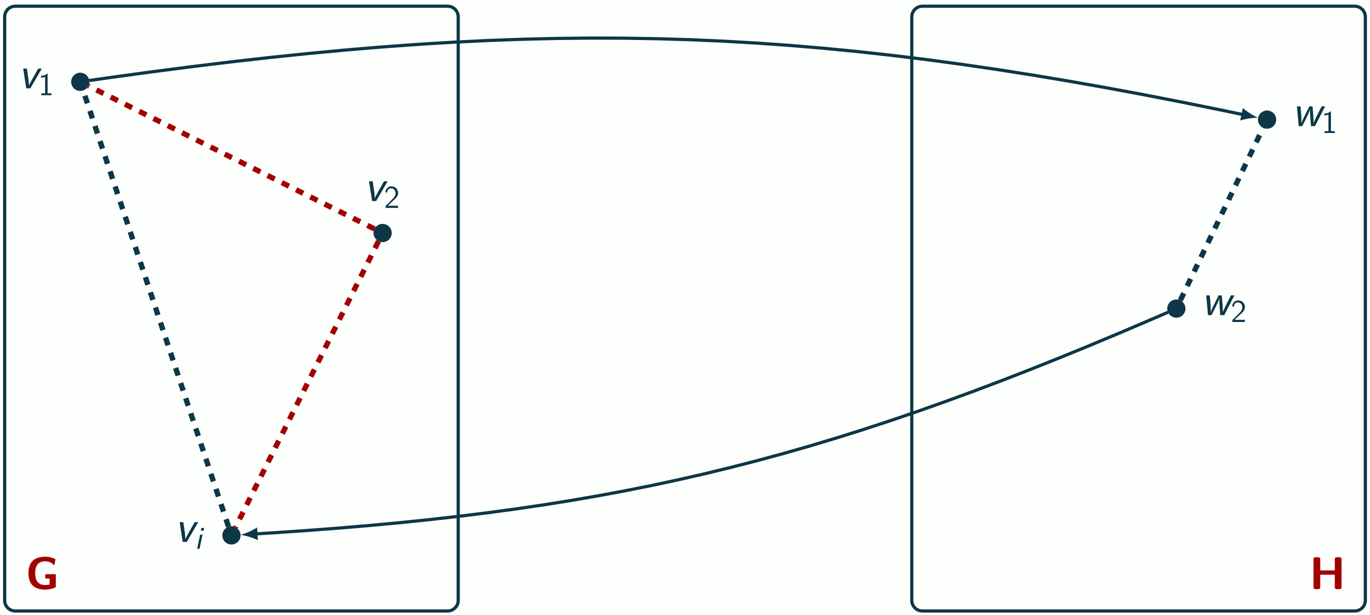
Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód

Tam i z powrotem!

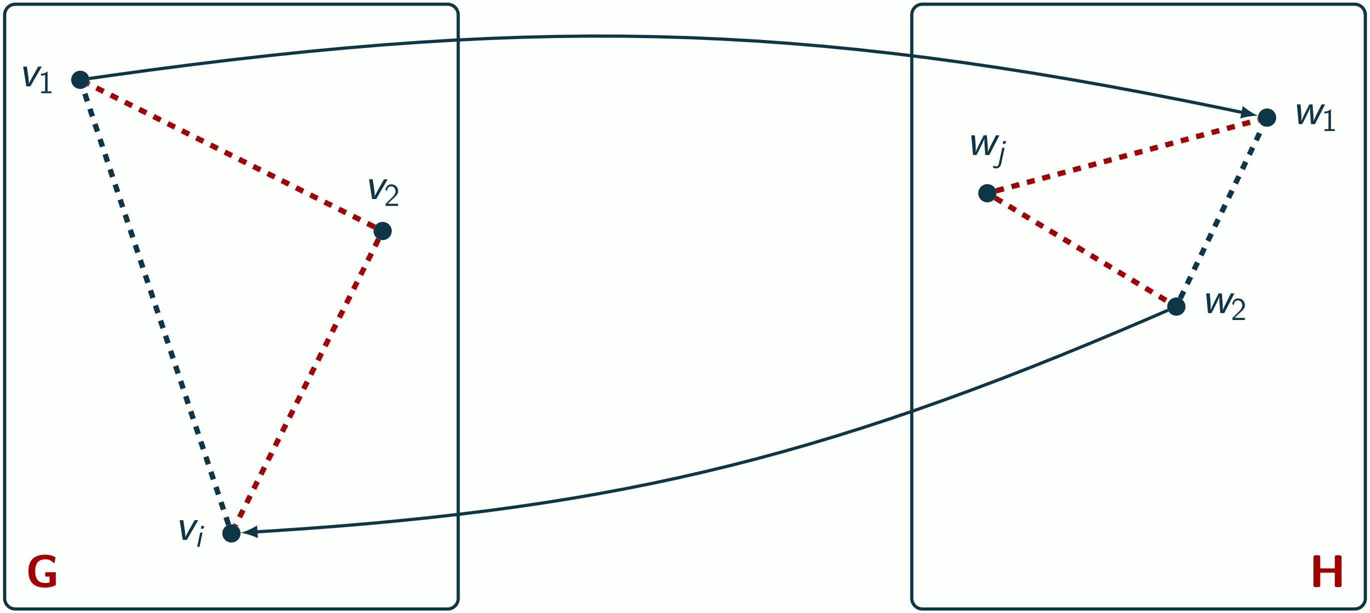


Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód Tam i z powrotem!

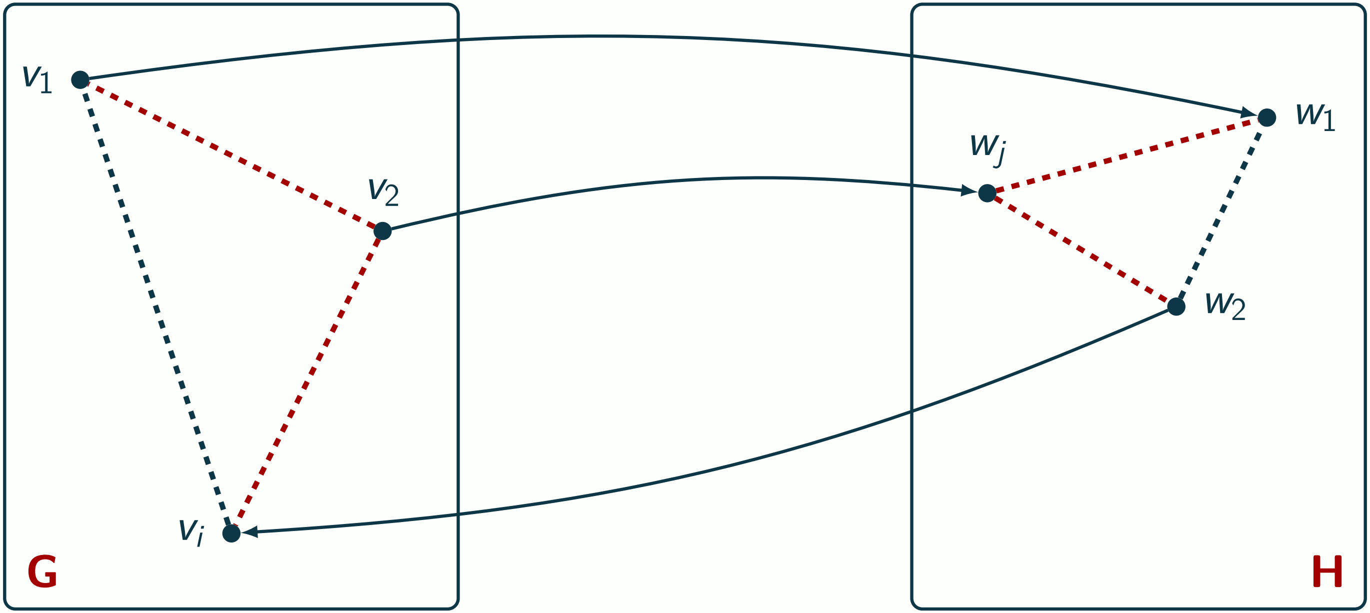


Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód Tam i z powrotem!

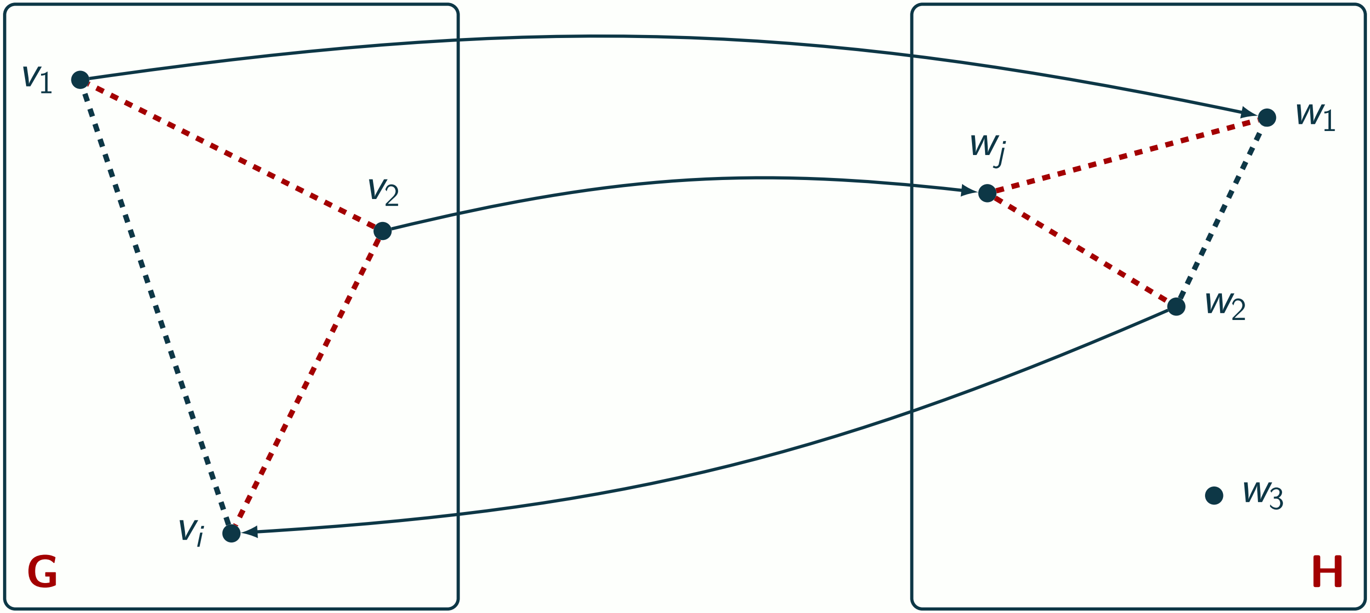


Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód Tam i z powrotem!

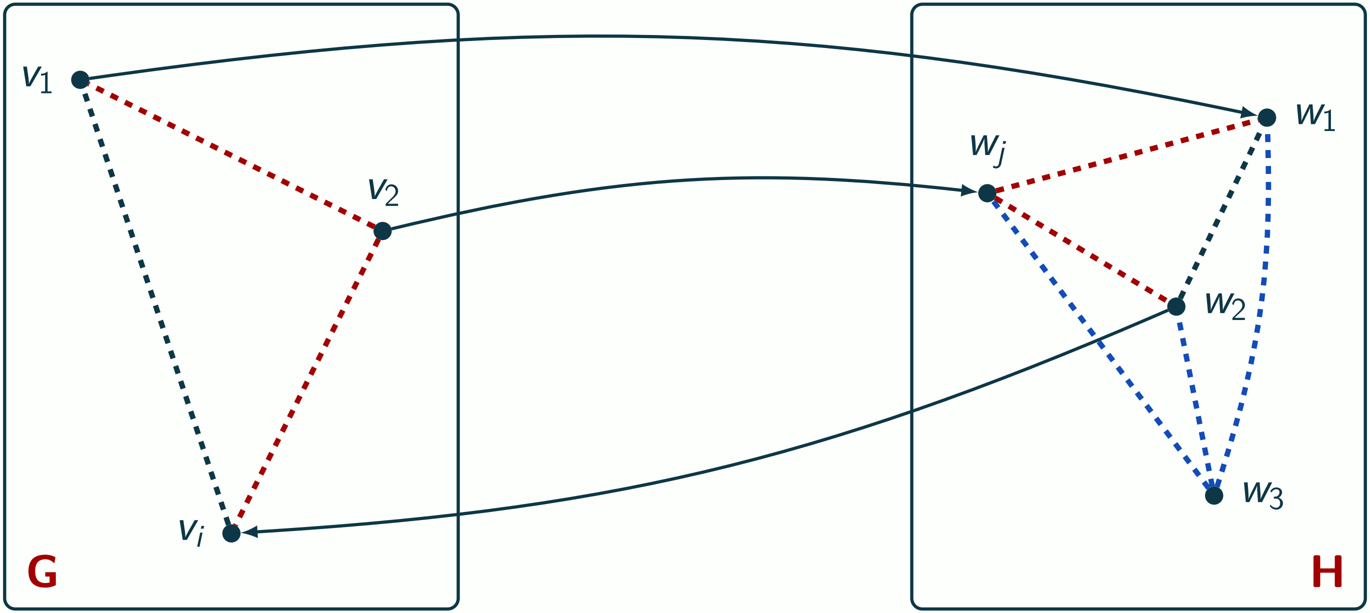


Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód Tam i z powrotem!



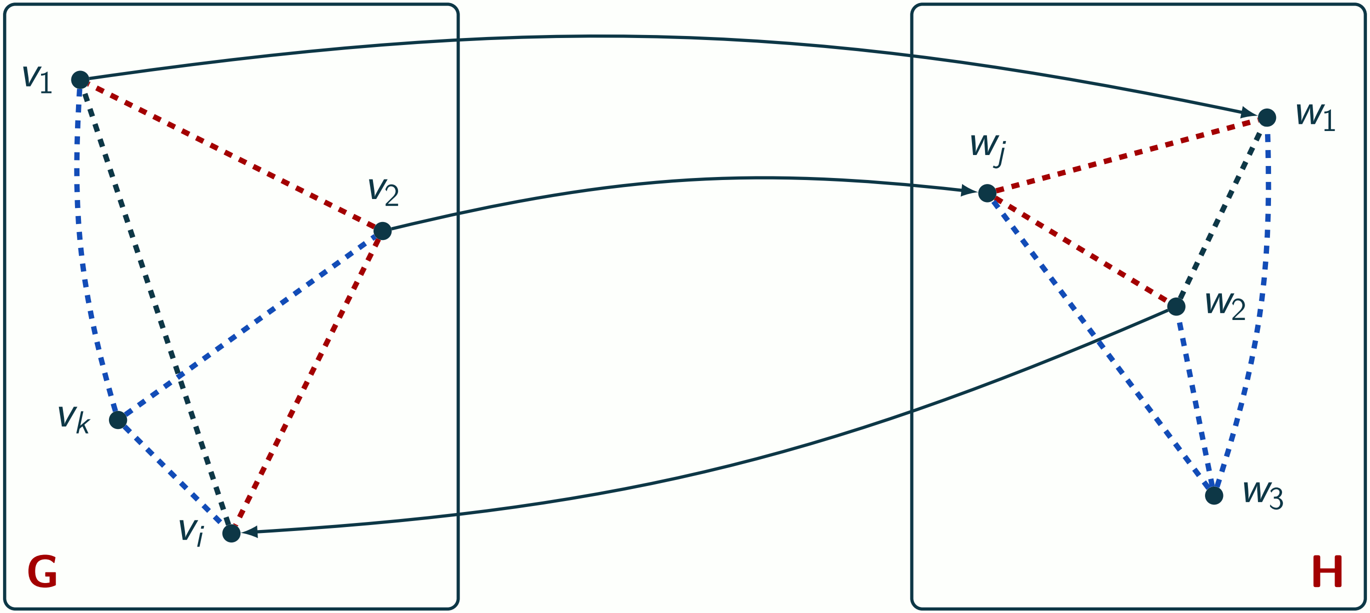
Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód

Tam i z powrotem!

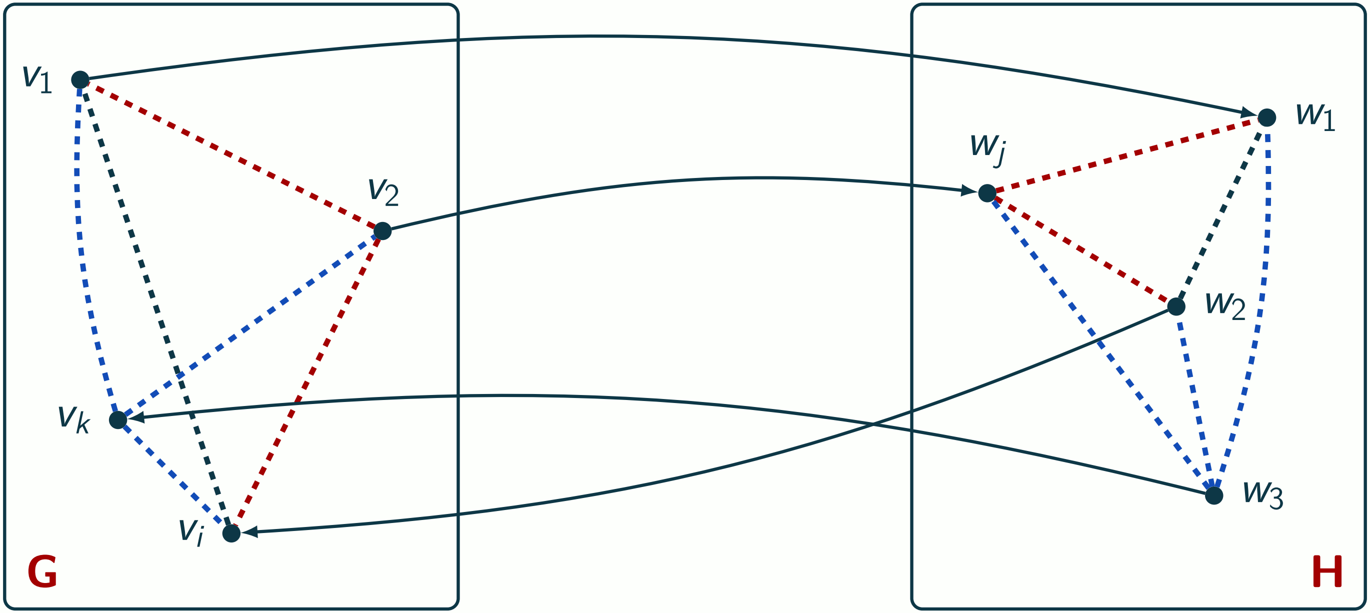


Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód Tam i z powrotem!

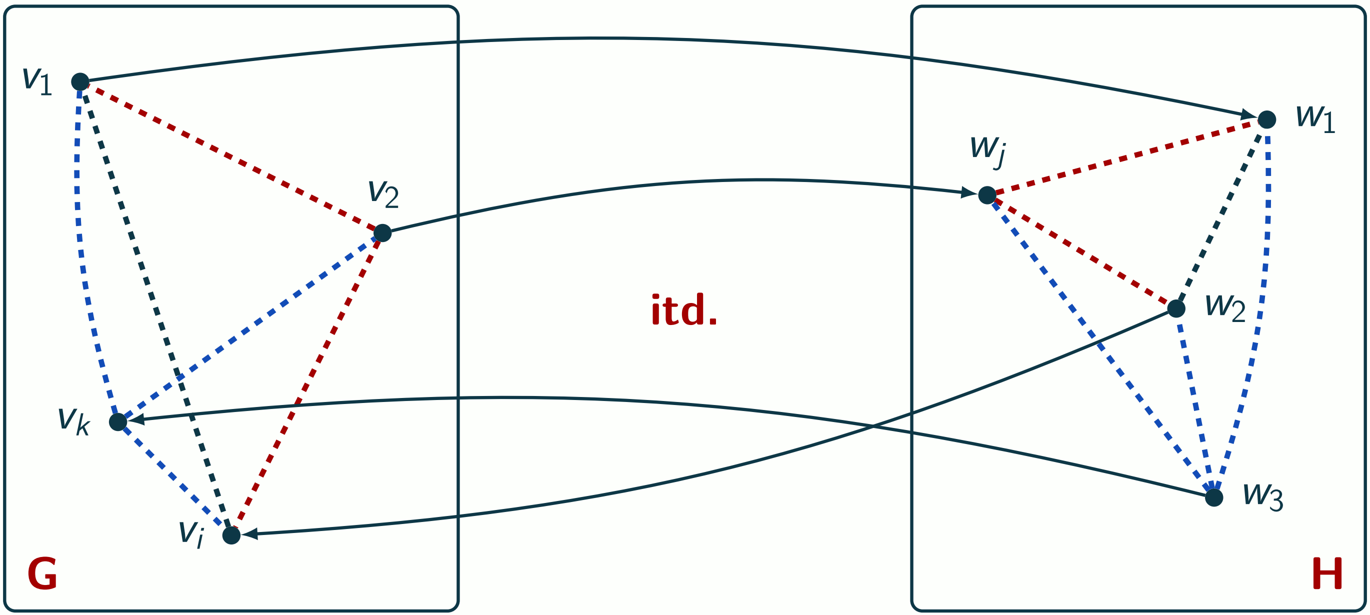


Jak dużo jest nieskończonych grafów losowych?

Twierdzenie (Erdős–Rényi–Rado, 1963 r.)

Istnieje tylko **jeden** nieskończony graf losowy!

Dowód Tam i z powrotem!



Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\implies$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\implies$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\implies$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

⇝ Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$

Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\implies$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- m, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy

Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

$$\boxed{U,\ V \text{ skończone i rozłączne} \implies \text{istnieje } w \text{ połączone z } U \text{ i niepołączone z } V}$$

Graf Rado

- $\rightsquigarrow$ Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\rightsquigarrow$ $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy

  w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.

Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\implies$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- m, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

$$\boxed{U, V \text{ skończone i rozłączne} \implies \text{istnieje } w \text{ połączone z } U \text{ i niepołączone z } V}$$

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.

$0 \frown 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12$

Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

$$\boxed{U, V \text{ skończone i rozłączne} \implies \text{istnieje } w \text{ połączone z } U \text{ i niepołączone z } V}$$

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy

  w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.

Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

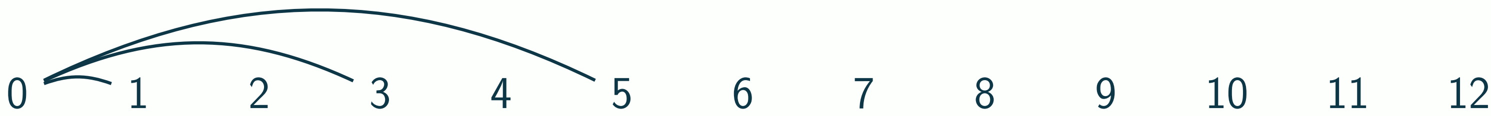
Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

$$\boxed{U, V \text{ skończone i rozłączne} \implies \text{istnieje } w \text{ połączone z } U \text{ i niepołączone z } V}$$

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy

  w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

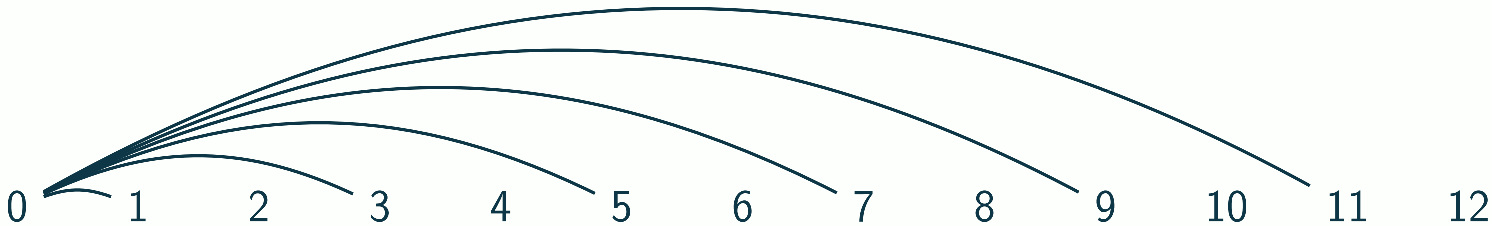
Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

$$\boxed{U, V \text{ skończone i rozłączne} \implies \text{istnieje } w \text{ połączone z } U \text{ i niepołączone z } V}$$

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy

  w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



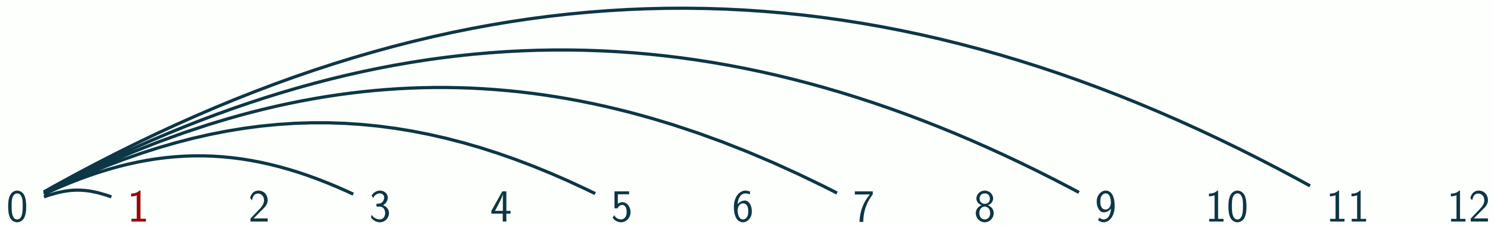
Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\implies$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- m, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

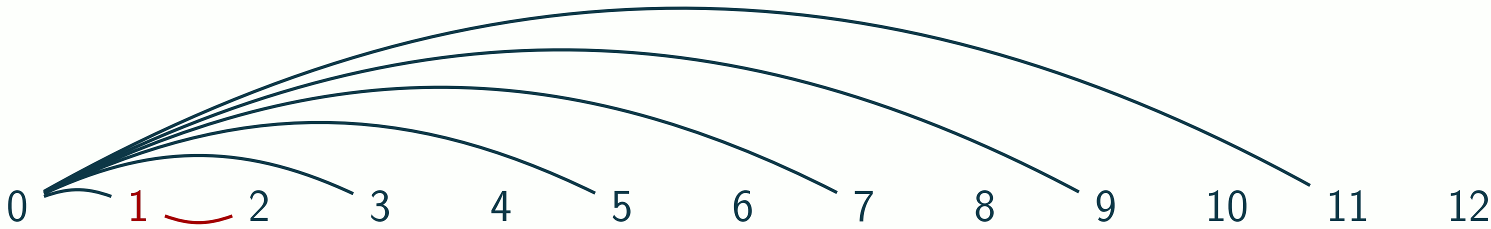
Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\Longrightarrow$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- m, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy

  w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

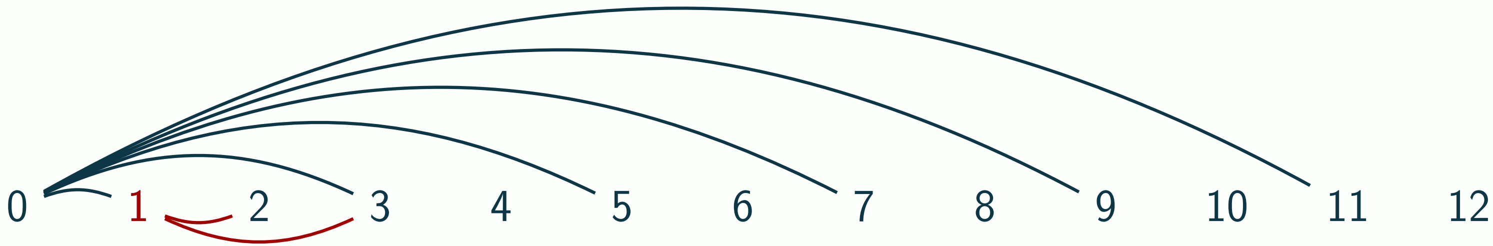
Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\implies$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- m, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy

    w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



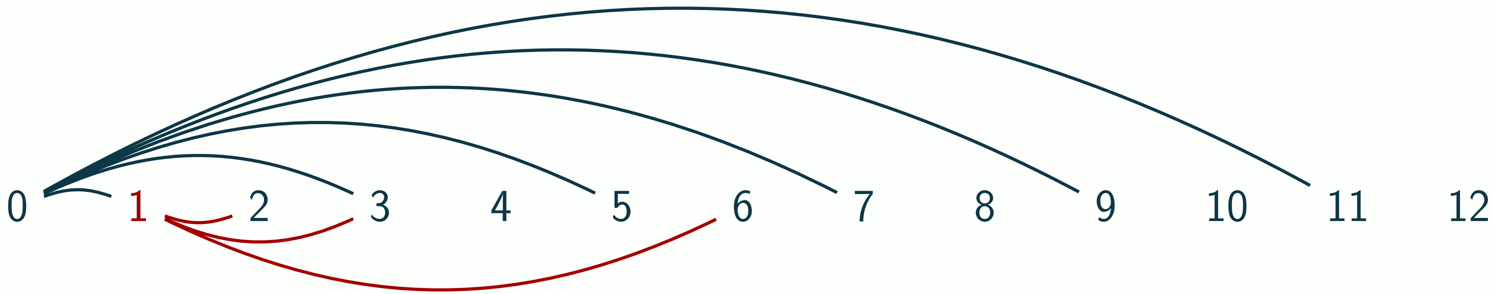
Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\implies$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

- $\rightsquigarrow$ Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\rightsquigarrow$ m, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



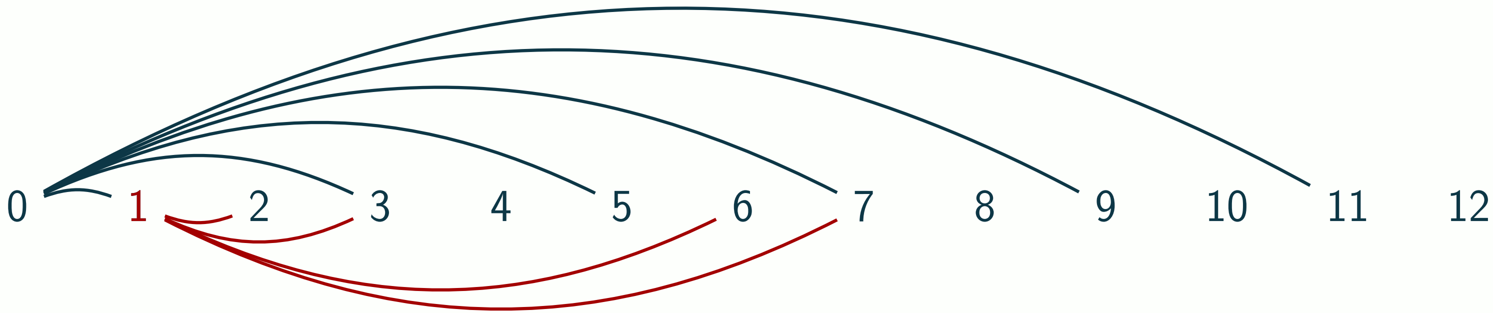
Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\implies$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

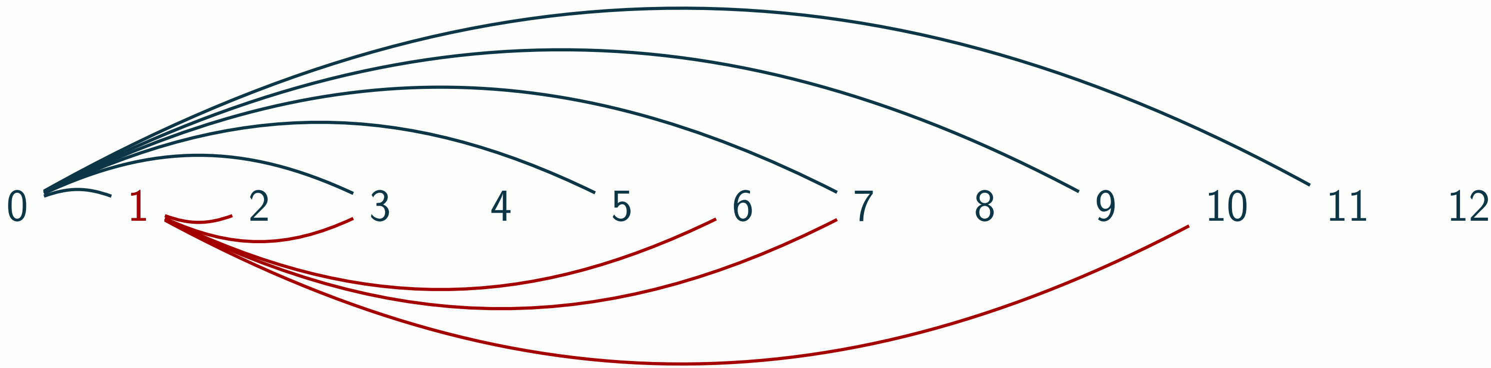
Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\implies$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- m, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy

  w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

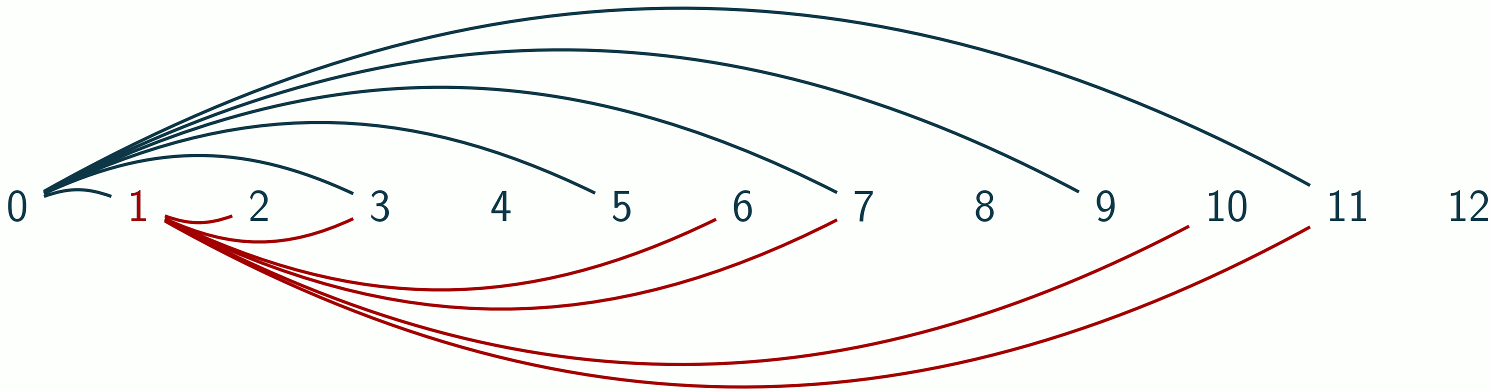
Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\implies$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

⇝ Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$

⇝ $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

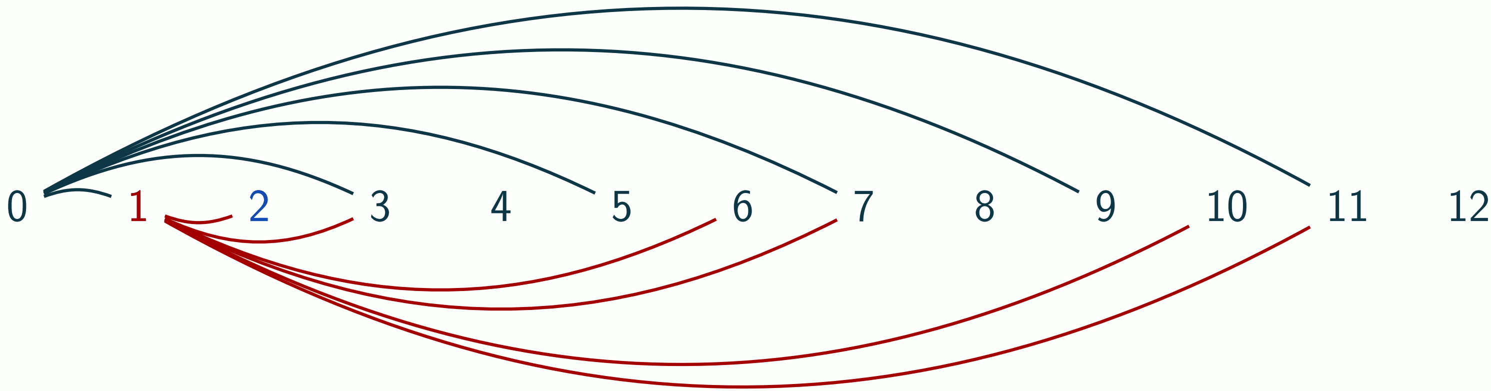
Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

$$\boxed{U, V \text{ skończone i rozłączne} \implies \text{istnieje } w \text{ połączone z } U \text{ i niepołączone z } V}$$

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy

  w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

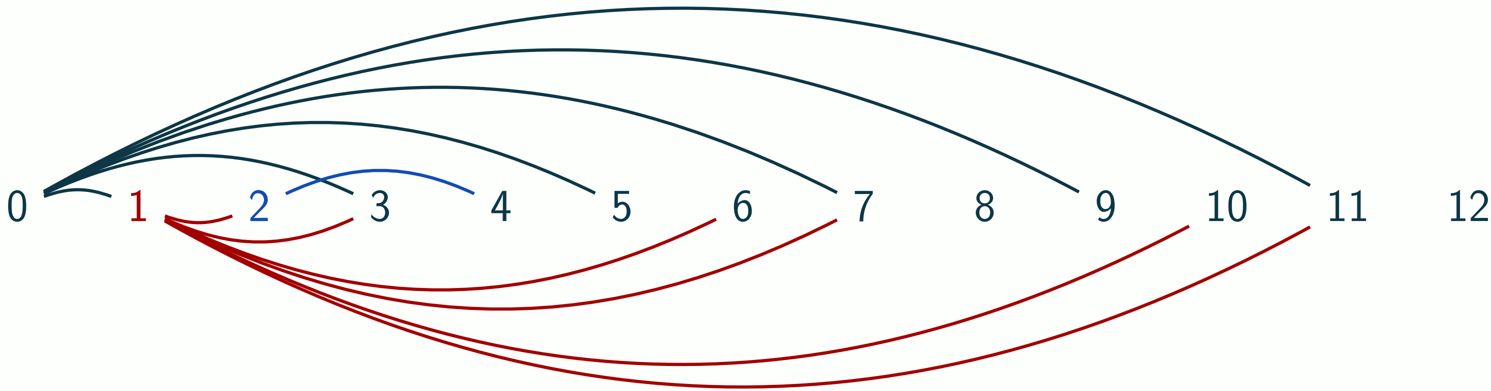
Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

$$\boxed{U, V \text{ skończone i rozłączne} \implies \text{istnieje } w \text{ połączone z } U \text{ i niepołączone z } V}$$

Graf Rado

- $\rightsquigarrow$ Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\rightsquigarrow$ $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy

  w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



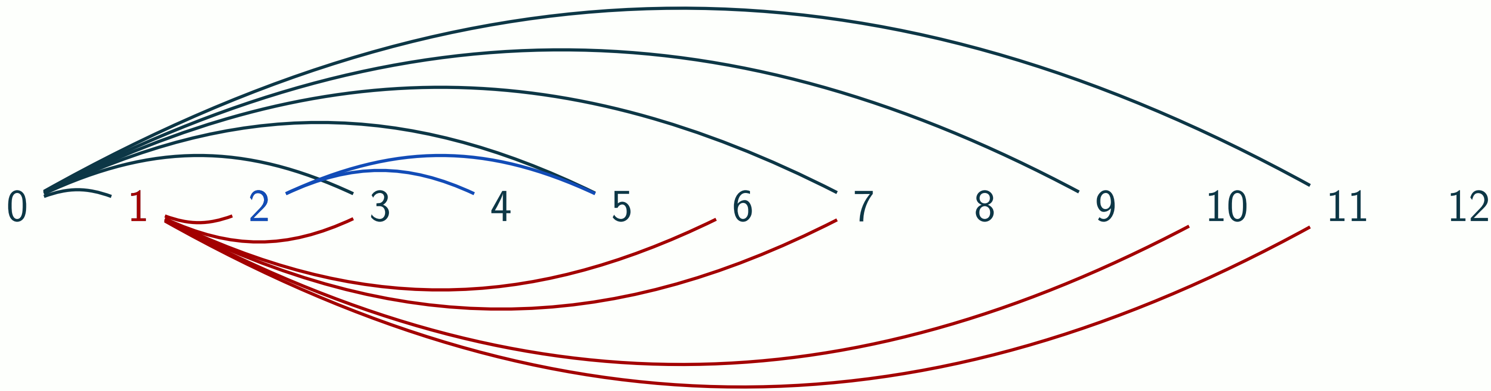
Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

$$\boxed{U, V \text{ skończone i rozłączne} \implies \text{istnieje } w \text{ połączone z } U \text{ i niepołączone z } V}$$

Graf Rado

- ⇝ Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- ⇝ $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

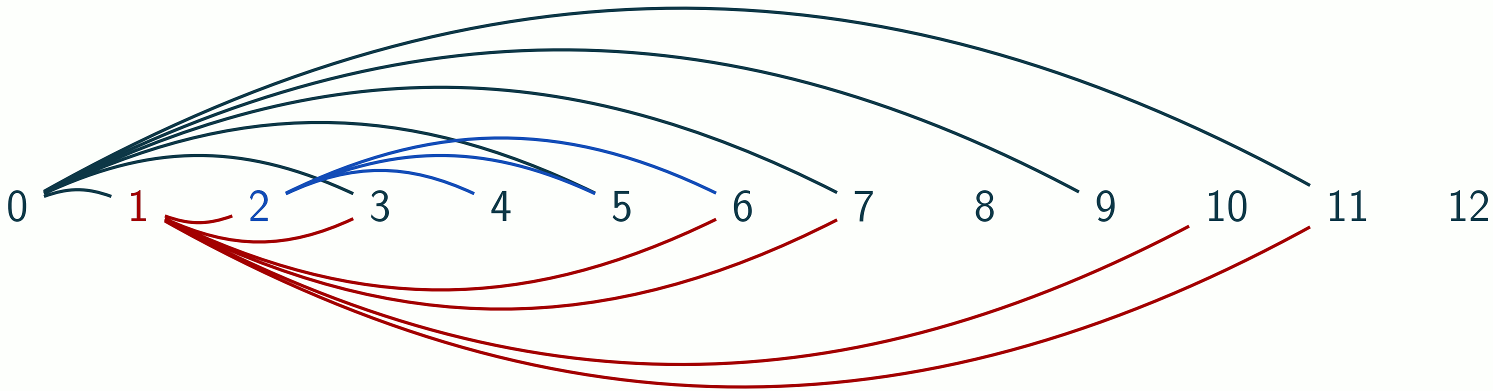
Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\Longrightarrow$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

⇝ Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$

⇝ $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



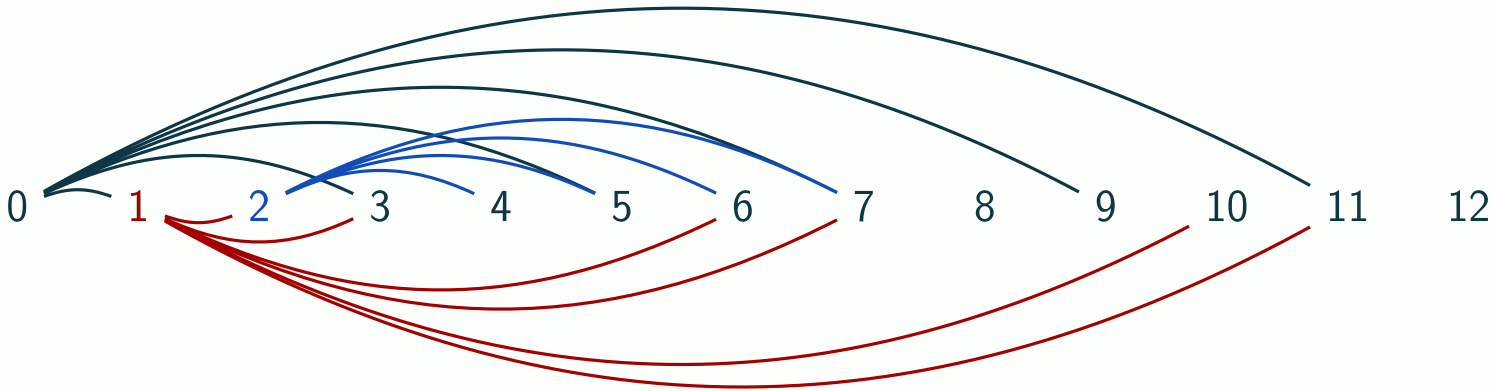
Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\implies$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- m, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



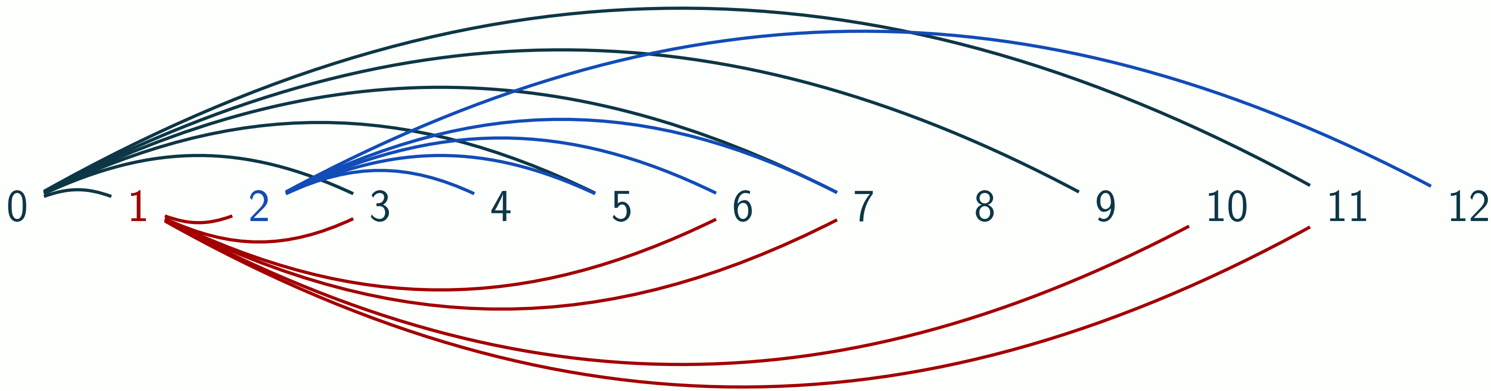
Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\Longrightarrow$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- m, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

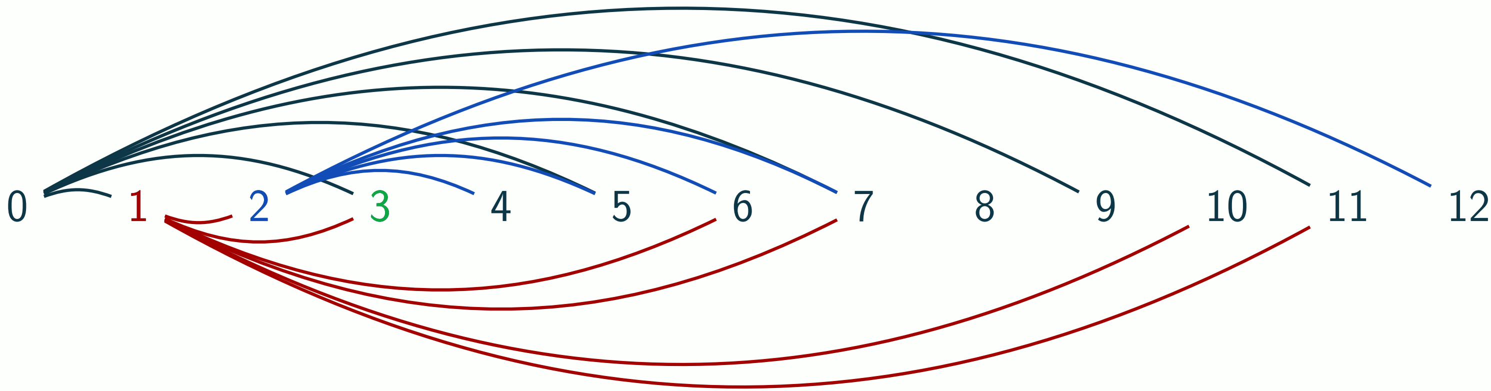
Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

$$\boxed{U, V \text{ skończone i rozłączne} \implies \text{istnieje } w \text{ połączone z } U \text{ i niepołączone z } V}$$

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy

  w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



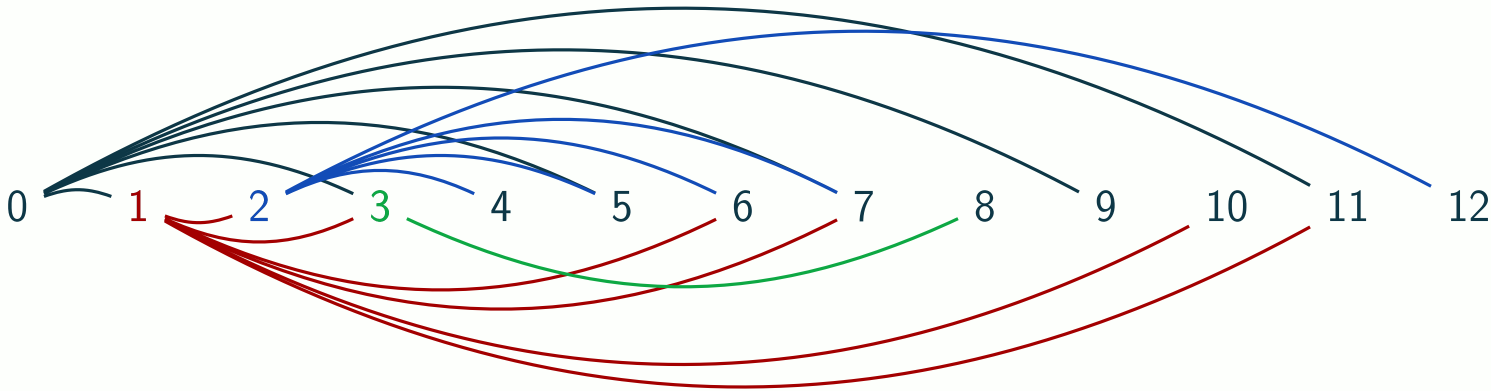
Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\Longrightarrow$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



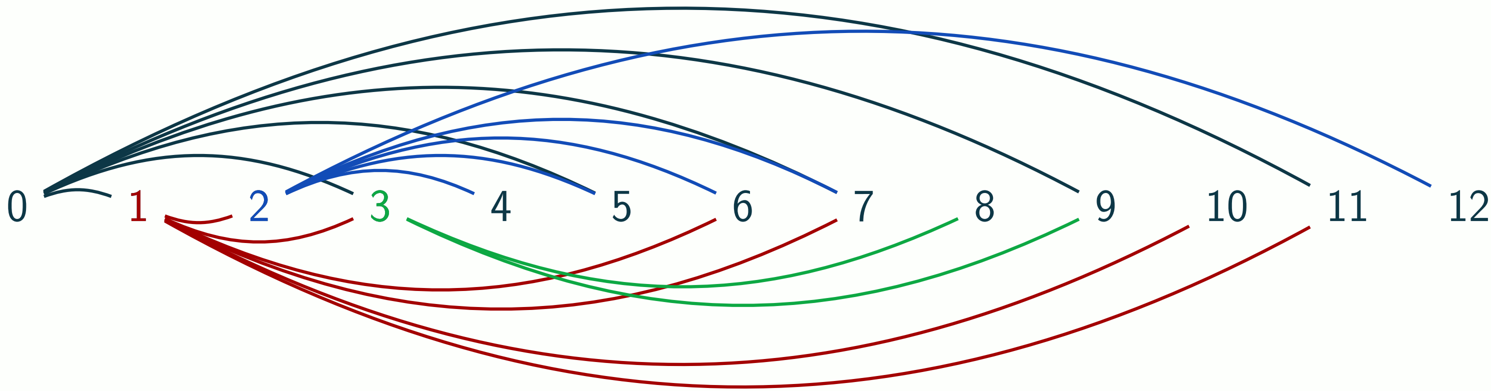
Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\Longrightarrow$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

- ⇝ Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- ⇝ $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

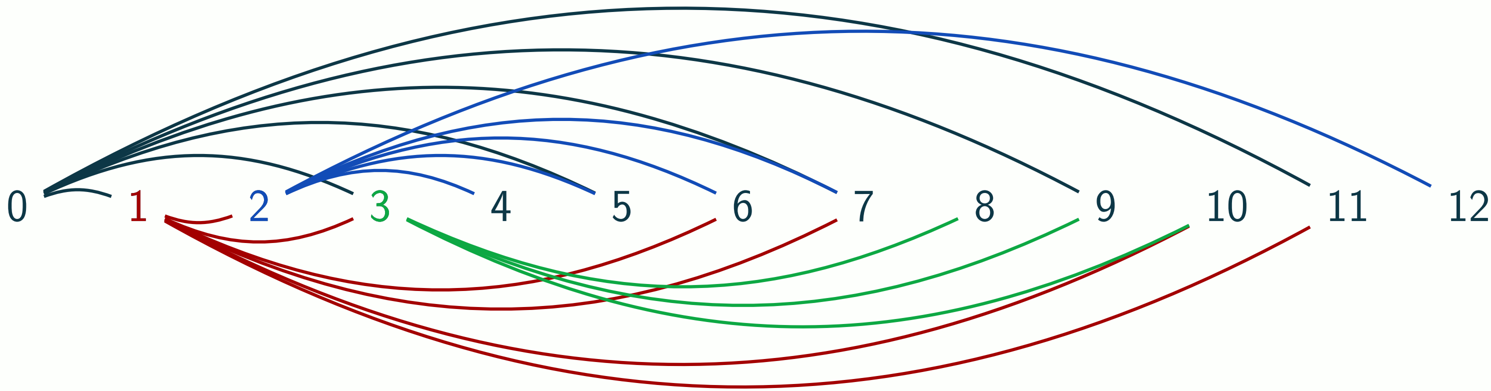
Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\implies$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

$\rightsquigarrow$ Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$\rightsquigarrow$ $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



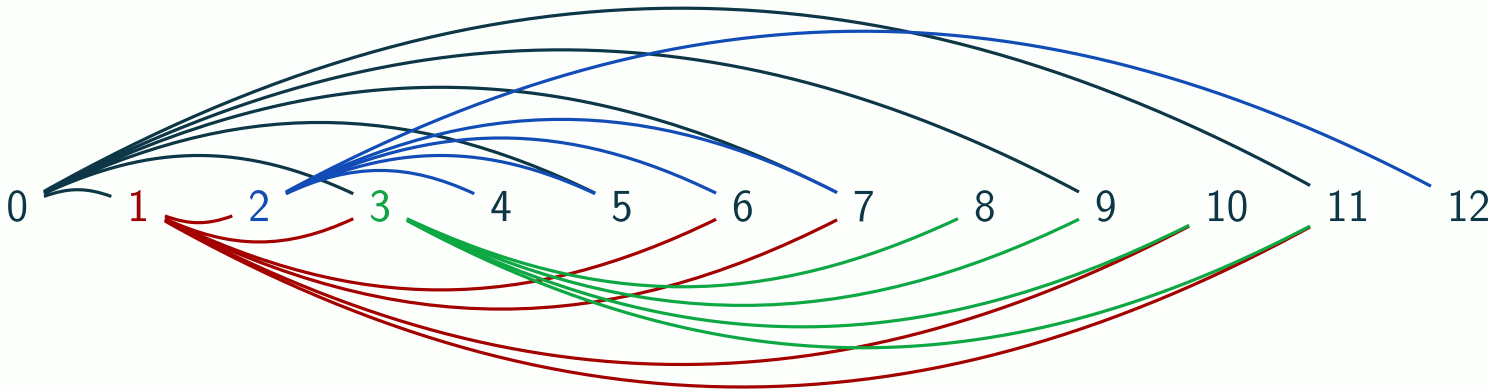
Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\implies$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

- $\rightsquigarrow$ Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\rightsquigarrow$ m, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

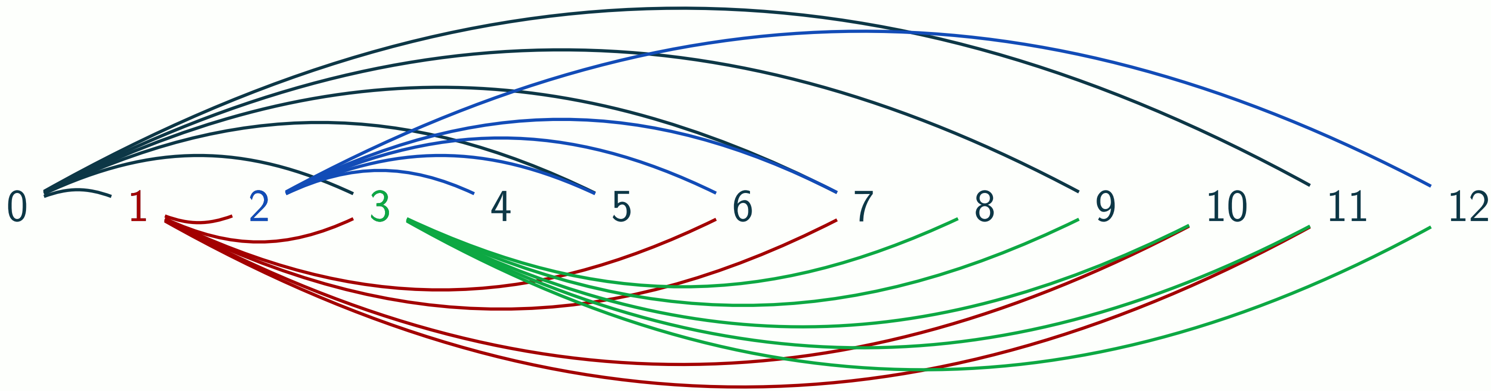
Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

U, V skończone i rozłączne $\implies$ istnieje w połączone z U i niepołączone z V

Graf Rado

⇝ Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$

⇝ $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



Jak wygląda graf Erdősa–Rényi'ego?

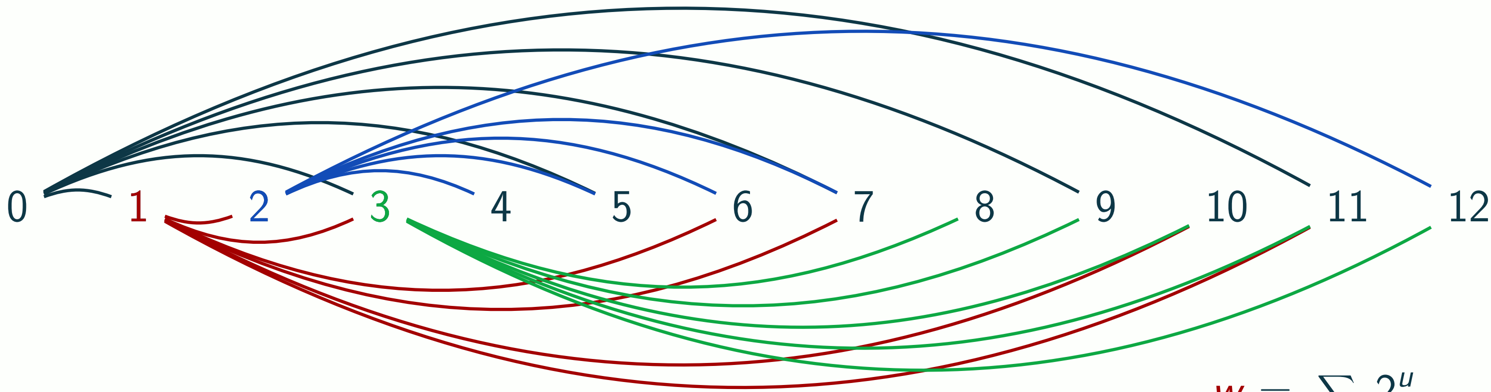
Wystarczy znaleźć przykład grafu, który spełnia warunek $*$:

$$\boxed{U, V \text{ skończone i rozłączne} \implies \text{istnieje } w \text{ połączone z } U \text{ i niepołączone z } V}$$

Graf Rado

- Zbiór wierzchołków: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy

  w zapisie dwójkowym liczby n występuje 2^m.



$$w = \sum_{u \in U} 2^u$$

Kolorowanie liczb naturalnych

Kolorowanie liczb naturalnych

Twierdzenie van der Waerdena (wersja nieskończona)

Każde k-kolorowanie zbioru $\mathbb{N}$ zawiera monochromatyczne ciągi arytmetyczne dowolnej długości.

Kolorowanie liczb naturalnych

Twierdzenie van der Waerdena (wersja nieskończona)

Każde k-kolorowanie zbioru $\mathbb{N}$ zawiera monochromatyczne ciągi arytmetyczne dowolnej długości.

Twierdzenie van der Waerdena (wersja skończona)

Dla dowolnych $k, d \in \mathbb{N}$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że każde k-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, N\}$ zawiera monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości d.

Kolorowanie liczb naturalnych

Twierdzenie van der Waerdena (wersja nieskończona)

Każde k-kolorowanie zbioru $\mathbb{N}$ zawiera monochromatyczne ciągi arytmetyczne dowolnej długości.

Twierdzenie van der Waerdena (wersja skończona)

Dla dowolnych $k, d \in \mathbb{N}$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że każde k-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, N\}$ zawiera monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości d.

Wersja skończona $\Longrightarrow$ **Wersja nieskończona**

Kolorowanie liczb naturalnych

Twierdzenie van der Waerdena (wersja nieskończona)

Każde k-kolorowanie zbioru $\mathbb{N}$ zawiera monochromatyczne ciągi arytmetyczne dowolnej długości.

Twierdzenie van der Waerdena (wersja skończona)

Dla dowolnych $k, d \in \mathbb{N}$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że każde k-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, N\}$ zawiera monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości d.

Wersja skończona $\Longrightarrow$ **Wersja nieskończona** (łatwe)

Kolorowanie liczb naturalnych

Twierdzenie van der Waerdena (wersja nieskończona)

Każde k-kolorowanie zbioru $\mathbb{N}$ zawiera monochromatyczne ciągi arytmetyczne dowolnej długości.

Twierdzenie van der Waerdena (wersja skończona)

Dla dowolnych $k, d \in \mathbb{N}$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że każde k-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, N\}$ zawiera monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości d.

Wersja skończona $\Longrightarrow$ **Wersja nieskończona** (łatwe)

Wersja nieskończona $\Longrightarrow$ **Wersja skończona**

Kolorowanie liczb naturalnych

Twierdzenie van der Waerdena (wersja nieskończona)

Każde k-kolorowanie zbioru $\mathbb{N}$ zawiera monochromatyczne ciągi arytmetyczne dowolnej długości.

Twierdzenie van der Waerdena (wersja skończona)

Dla dowolnych $k, d \in \mathbb{N}$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że każde k-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, N\}$ zawiera monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości d.

Wersja skończona $\Longrightarrow$ **Wersja nieskończona** (łatwe)

Wersja nieskończona $\Longrightarrow$ **Wersja skończona**

Nie wprost: istnieją takie k, d, że dla każdego N ...

Kolorowanie liczb naturalnych

Twierdzenie van der Waerdena (wersja nieskończona)

Każde k-kolorowanie zbioru $\mathbb{N}$ zawiera monochromatyczne ciągi arytmetyczne dowolnej długości.

Twierdzenie van der Waerdena (wersja skończona)

Dla dowolnych $k, d \in \mathbb{N}$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że każde k-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, N\}$ zawiera monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości d.

Wersja skończona $\Longrightarrow$ **Wersja nieskończona** (łatwe)

Wersja nieskończona $\Longrightarrow$ **Wersja skończona**

- Nie wprost: istnieją takie k, d, że dla każdego N ...

Kolorowanie liczb naturalnych

Twierdzenie van der Waerdena (wersja nieskończona)

Każde k-kolorowanie zbioru $\mathbb{N}$ zawiera monochromatyczne ciągi arytmetyczne dowolnej długości.

Twierdzenie van der Waerdena (wersja skończona)

Dla dowolnych $k, d \in \mathbb{N}$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że każde k-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, N\}$ zawiera monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości d.

Wersja skończona $\Longrightarrow$ **Wersja nieskończona** (łatwe)

Wersja nieskończona $\Longrightarrow$ **Wersja skończona**

- Nie wprost: istnieją takie k, d, że dla każdego N ...

$\longleftarrow$ k-kolorowania $\{1\}$ bez d-MCA

Kolorowanie liczb naturalnych

Twierdzenie van der Waerdena (wersja nieskończona)

Każde k-kolorowanie zbioru $\mathbb{N}$ zawiera monochromatyczne ciągi arytmetyczne dowolnej długości.

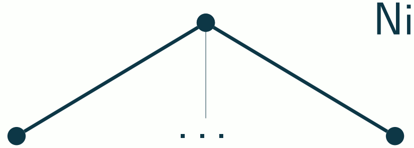
Twierdzenie van der Waerdena (wersja skończona)

Dla dowolnych $k, d \in \mathbb{N}$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że każde k-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, N\}$ zawiera monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości d.

Wersja skończona $\Longrightarrow$ **Wersja nieskończona** (łatwe)

Wersja nieskończona $\Longrightarrow$ **Wersja skończona**

Nie wprost: istnieją takie k, d, że dla każdego $N \ldots$



$\longleftarrow$ k-kolorowania $\{1\}$ bez d-MCA

Kolorowanie liczb naturalnych

Twierdzenie van der Waerdena (wersja nieskończona)

Każde k-kolorowanie zbioru $\mathbb{N}$ zawiera monochromatyczne ciągi arytmetyczne dowolnej długości.

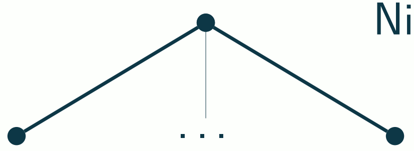
Twierdzenie van der Waerdena (wersja skończona)

Dla dowolnych $k, d \in \mathbb{N}$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że każde k-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, N\}$ zawiera monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości d.

Wersja skończona $\Longrightarrow$ **Wersja nieskończona** (łatwe)

Wersja nieskończona $\Longrightarrow$ **Wersja skończona**

Nie wprost: istnieją takie k, d, że dla każdego N ...



$\longleftarrow$ k-kolorowania $\{1\}$ bez d-MCA

$\longleftarrow$ k-kolorowania $\{1, 2\}$ bez d-MCA

Kolorowanie liczb naturalnych

Twierdzenie van der Waerdena (wersja nieskończona)

Każde k-kolorowanie zbioru $\mathbb{N}$ zawiera monochromatyczne ciągi arytmetyczne dowolnej długości.

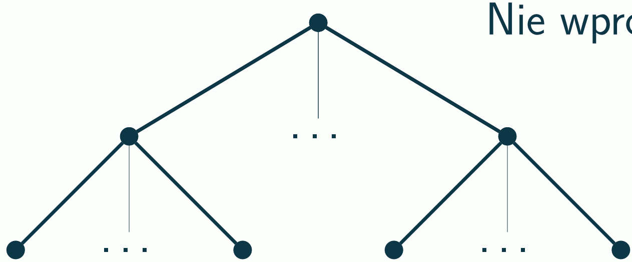
Twierdzenie van der Waerdena (wersja skończona)

Dla dowolnych $k, d \in \mathbb{N}$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że każde k-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, N\}$ zawiera monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości d.

Wersja skończona $\Longrightarrow$ **Wersja nieskończona** (łatwe)

Wersja nieskończona $\Longrightarrow$ **Wersja skończona**

Nie wprost: istnieją takie k, d, że dla każdego N ...



$\longleftarrow$ k-kolorowania $\{1\}$ bez d-MCA

$\longleftarrow$ k-kolorowania $\{1, 2\}$ bez d-MCA

Kolorowanie liczb naturalnych

Twierdzenie van der Waerdena (wersja nieskończona)

Każde k-kolorowanie zbioru $\mathbb{N}$ zawiera monochromatyczne ciągi arytmetyczne dowolnej długości.

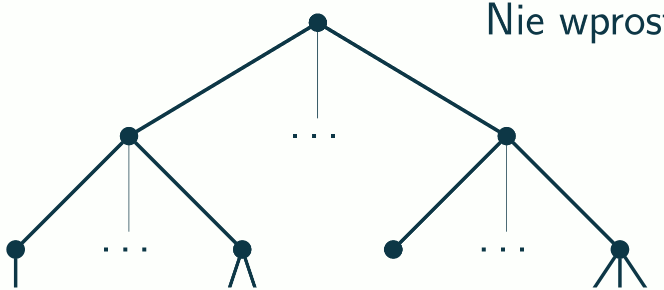
Twierdzenie van der Waerdena (wersja skończona)

Dla dowolnych $k, d \in \mathbb{N}$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że każde k-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, N\}$ zawiera monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości d.

Wersja skończona $\Longrightarrow$ **Wersja nieskończona** (łatwe)

Wersja nieskończona $\Longrightarrow$ **Wersja skończona**

Nie wprost: istnieją takie k, d, że dla każdego N ...



$\longleftarrow$ k-kolorowania $\{1\}$ bez d-MCA

$\longleftarrow$ k-kolorowania $\{1, 2\}$ bez d-MCA

Kolorowanie liczb naturalnych

Twierdzenie van der Waerdena (wersja nieskończona)

Każde k-kolorowanie zbioru $\mathbb{N}$ zawiera monochromatyczne ciągi arytmetyczne dowolnej długości.

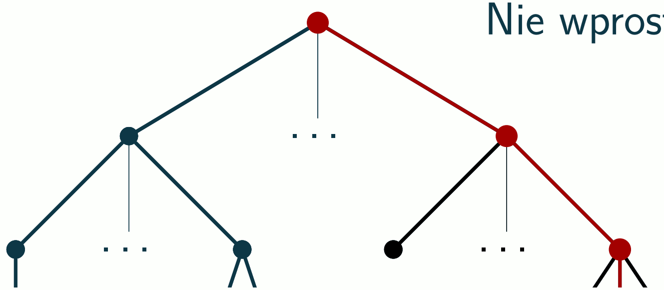
Twierdzenie van der Waerdena (wersja skończona)

Dla dowolnych $k, d \in \mathbb{N}$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że każde k-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, N\}$ zawiera monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości d.

Wersja skończona $\Longrightarrow$ **Wersja nieskończona** (łatwe)

Wersja nieskończona $\Longrightarrow$ **Wersja skończona**

Nie wprost: istnieją takie k, d, że dla każdego N ...



$\longleftarrow$ k-kolorowania $\{1\}$ bez d-MCA

$\longleftarrow$ k-kolorowania $\{1, 2\}$ bez d-MCA