Politechnika Łódzka

O e^{tA} słów kilka

Adam Błoch

66. Szkoła Matematyki Poglądowej

25-28.08.2023

Plan działania

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

1. $A \in \mathbb{R}$ – liczba
2. $A \in M_n(\mathbb{R})$ – macierz
3. $A \in B(X)$ – operator ograniczony na przestrzeni Banacha X
4. $A : X \supset D(A) \to X$ – operator nieograniczony

Krótkie przypomnienie z analizy funkcjonalnej

Niech X będzie przestrzenią liniową (nad ciałem $\mathbb{R}$).

1. **Normą** nazywamy funkcję $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ spełniającą następujce warunki dla $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{R}$:
   - $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
   - $\|ax\| = |a| \, \|x\|$,
   - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

2. Parę $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy **przestrzenią unormowaną**.

3. Przestrzeń unormowaną nazywamy **przestrzenią Banacha**, jeżeli jest ona zupełna względem metryki
$$d(x, y) := \|x - y\| .$$

Krótkie przypomnienie z analizy funkcjonalnej

Niech X będzie przestrzenią liniową (nad ciałem $\mathbb{R}$).

1. **Normą** nazywamy funkcję $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ spełniającą następujce warunki dla $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{R}$:
   - $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
   - $\|ax\| = |a| \, \|x\|$,
   - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

2. Parę $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy **przestrzenią unormowaną**.

3. Przestrzeń unormowaną nazywamy **przestrzenią Banacha**, jeżeli jest ona zupełna względem metryki
$$d(x, y) := \|x - y\| .$$

Krótkie przypomnienie z analizy funkcjonalnej

Niech X będzie przestrzenią liniową (nad ciałem $\mathbb{R}$).

1. **Normą** nazywamy funkcję $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ spełniającą następujce warunki dla $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{R}$:
   - $\|x\| = 0 \quad \iff \quad x = 0$,
   - $\|ax\| = |a| \, \|x\|$,
   - $\left\|x + y\right\| \leq \|x\| + \left\|y\right\|$.

2. Parę $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy **przestrzenią unormowaną**.

3. Przestrzeń unormowaną nazywamy **przestrzenią Banacha**, jeżeli jest ona zupełna względem metryki

$$d(x, y) := \left\|x - y\right\|.$$

Krótkie przypomnienie z analizy funkcjonalnej

Niech X będzie przestrzenią liniową (nad ciałem $\mathbb{R}$).

1. **Normą** nazywamy funkcję $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ spełniającą następujce warunki dla $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{R}$:
   - $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
   - $\|ax\| = |a| \, \|x\|$,
   - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

2. Parę $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy **przestrzenią unormowaną**.

3. Przestrzeń unormowaną nazywamy **przestrzenią Banacha**, jeżeli jest ona zupełna względem metryki
$$d(x, y) := \|x - y\| .$$

Krótkie przypomnienie z analizy funkcjonalnej

4. Odwzorowanie $T : X \to X$ nazywamy **operatorem liniowym**, jeżeli spełnia następujące warunki dla $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{R}$:
   - $T(x + y) = T(x) + T(y)$,
   - $T(ax) = aT(x)$

   Jeżeli T jest operatorem liniowym, to piszemy $Tx \overset{\text{ozn}}{=} T(x)$.

5. Operator liniowy T nazywamy **ograniczonym**, jeżeli istnieje taka stała $C > 0$, że dla każdego $x \in X$

$$\left\| Tx \right\| \leq C \, \|x\| .$$

6. **Normą operatora ograniczonego** nazywamy liczbę

$$\left\| T \right\| := \inf \left\{ C : \left\| Tx \right\| \leq C \, \|x\| \, , x \in X \right\} = \sup_{\|x\|=1} \left\| Tx \right\| .$$

7. Operator liniowy jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.

8. Przestrzeń unormowaną wszystkich operatorów liniowych i ograniczonych $T : X \to X$ oznaczamy przez $B(X)$.

   W szczególności:
   - $B(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
   - $B(\mathbb{R}^n) = M_n(\mathbb{R})$.

Krótkie przypomnienie z analizy funkcjonalnej

4. Odwzorowanie $T : X \to X$ nazywamy **operatorem liniowym**, jeżeli spełnia następujące warunki dla $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{R}$:
   - $T(x+y) = T(x) + T(y)$,
   - $T(ax) = aT(x)$

   Jeżeli T jest operatorem liniowym, to piszemy $Tx \overset{\text{ozn}}{=} T(x)$.

5. Operator liniowy T nazywamy **ograniczonym**, jeżeli istnieje taka stała $C > 0$, że dla każdego $x \in X$
$$\left\| Tx \right\| \leq C \, \|x\| \, .$$

6. **Normą operatora ograniczonego** nazywamy liczbę
$$\left\| T \right\| := \inf \left\{ C : \left\| Tx \right\| \leq C \, \|x\| \, , x \in X \right\} = \sup_{\|x\|=1} \left\| Tx \right\| .$$

7. Operator liniowy jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.

8. Przestrzeń unormowaną wszystkich operatorów liniowych i ograniczonych $T : X \to X$ oznaczamy przez $B(X)$.

   W szczególności:
   - $B(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
   - $B(\mathbb{R}^n) = M_n(\mathbb{R})$.

Krótkie przypomnienie z analizy funkcjonalnej

4. Odwzorowanie $T : X \to X$ nazywamy **operatorem liniowym**, jeżeli spełnia następujące warunki dla $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{R}$:
   - $T(x+y) = T(x) + T(y)$,
   - $T(ax) = aT(x)$

   Jeżeli T jest operatorem liniowym, to piszemy $Tx \overset{\text{ozn}}{=} T(x)$.

5. Operator liniowy T nazywamy **ograniczonym**, jeżeli istnieje taka stała $C > 0$, że dla każdego $x \in X$
$$\|Tx\| \leq C \|x\| .$$

6. **Normą operatora ograniczonego** nazywamy liczbę
$$\|T\| := \inf\left\{C : \|Tx\| \leq C \|x\| , x \in X\right\} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| .$$

7. Operator liniowy jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.

8. Przestrzeń unormowaną wszystkich operatorów liniowych i ograniczonych $T : X \to X$ oznaczamy przez $B(X)$.

   W szczególności:
   - $B(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
   - $B(\mathbb{R}^n) = M_n(\mathbb{R})$.

Krótkie przypomnienie z analizy funkcjonalnej

4. Odwzorowanie $T : X \to X$ nazywamy **operatorem liniowym**, jeżeli spełnia następujące warunki dla $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{R}$:
   - $T(x+y) = T(x) + T(y)$,
   - $T(ax) = aT(x)$

   Jeżeli T jest operatorem liniowym, to piszemy $Tx \overset{\text{ozn}}{=} T(x)$.

5. Operator liniowy T nazywamy **ograniczonym**, jeżeli istnieje taka stała $C > 0$, że dla każdego $x \in X$
$$\left\| Tx \right\| \leq C \left\| x \right\| .$$

6. **Normą operatora ograniczonego** nazywamy liczbę
$$\left\| T \right\| := \inf \left\{ C : \left\| Tx \right\| \leq C \left\| x \right\| , x \in X \right\} = \sup_{\|x\|=1} \left\| Tx \right\| .$$

7. Operator liniowy jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.

8. Przestrzeń unormowaną wszystkich operatorów liniowych i ograniczonych $T : X \to X$ oznaczamy przez $B(X)$.

   W szczególności:
   - $B(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
   - $B(\mathbb{R}^n) = M_n(\mathbb{R})$.

Krótkie przypomnienie z analizy funkcjonalnej

4. Odwzorowanie $T : X \to X$ nazywamy **operatorem liniowym**, jeżeli spełnia następujące warunki dla $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{R}$:
   - $T(x + y) = T(x) + T(y)$,
   - $T(ax) = aT(x)$

   Jeżeli T jest operatorem liniowym, to piszemy $Tx \overset{\text{ozn}}{=} T(x)$.

5. Operator liniowy T nazywamy **ograniczonym**, jeżeli istnieje taka stała $C > 0$, że dla każdego $x \in X$
$$\left\| Tx \right\| \leq C \, \|x\| \, .$$

6. **Normą operatora ograniczonego** nazywamy liczbę
$$\left\| T \right\| := \inf \left\{ C : \left\| Tx \right\| \leq C \, \|x\| \, , x \in X \right\} = \sup_{\|x\|=1} \left\| Tx \right\| .$$

7. Operator liniowy jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.

8. Przestrzeń unormowaną wszystkich operatorów liniowych i ograniczonych $T : X \to X$ oznaczamy przez $B(X)$.

   W szczególności:
   - $B(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
   - $B(\mathbb{R}^n) = M_n(\mathbb{R})$.

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad x(t) = e^{tA}x_0$$

- $x : t \mapsto e^{tA}x_0$
- $x : x_0 \mapsto e^{tA}x_0, \ t \geq 0$

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad x(t) = e^{tA}x_0$$

- $x : t \mapsto e^{tA}x_0$
- $x : x_0 \mapsto e^{tA}x_0, \; t \geq 0$

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad x(t) = e^{tA}x_0$$

- $x : t \mapsto e^{tA}x_0$
- $x : x_0 \mapsto e^{tA}x_0, \;\; t \geq 0$

Definiujemy

$$\forall t \geq 0 \quad T(t) := e^{tA} \in B(X) = \mathbb{R}.$$

Wówczas

$$x(t) = T(t)x_0 = e^{tA}x_0.$$

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad x(t) = e^{tA}x_0$$

- $x : t \mapsto e^{tA}x_0$
- $x : x_0 \mapsto e^{tA}x_0, \ t \geq 0$

Definiujemy

$$\forall t \geq 0 \quad T(t) := e^{tA} \in B(X) = \mathbb{R}.$$

Wówczas

$$x(t) = T(t)x_0 = e^{tA}x_0.$$

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad x(t) = e^{tA}x_0$$

- $x : t \mapsto e^{tA}x_0$
- $x : x_0 \mapsto e^{tA}x_0, \ t \geq 0$

Definiujemy

$$\forall t \geq 0 \quad T(t) := e^{tA} \in B(X) = \mathbb{R}.$$

Wówczas

$$x(t) = T(t)x_0 = e^{tA}x_0.$$

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t) - I| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t) - I| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t) - I| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t) - I| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t\geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t\to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim\limits_{t\to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t\to 0^+} |T(t) - I| = \lim\limits_{t\to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t) - I| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t) - I| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t) - I| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

$((T(t))_{t \geq 0}, \circ)$, gdzie $\circ$ oznacza składanie przekształceń, jest (algebraiczną) półgrupą.

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t) - I| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

$((T(t))_{t \geq 0}, \circ)$, gdzie $\circ$ oznacza składanie przekształceń, jest (algebraiczną) półgrupą.

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t) - I| = \lim\limits_{t \to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

$$\lim_{h \to 0} |T(t+h)x_0 - T(t)x_0| = \lim_{h \to 0} |e^{(t+h)A}x_0 - e^{tA}x_0|$$
$$= |e^{tA}| \lim_{h \to 0} |e^{hA}x_0 - x_0| = \lim_{h \to 0} |T(h)x_0 - x_0| = 0,$$

zatem funkcja $t \mapsto T(t)x_0$ jest ciągła dla wszystkich $t \geq 0$.

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t\geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t\to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim\limits_{t\to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t\to 0^+} |T(t) - I| = \lim\limits_{t\to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}|T(t+h)x_0 - T(t)x_0| &= \lim_{h\to 0}|e^{(t+h)A}x_0 - e^{tA}x_0|\\ &= |e^{tA}|\lim_{h\to 0}|e^{hA}x_0 - x_0| = \lim_{h\to 0}|T(h)x_0 - x_0| = 0,\end{aligned}$$

zatem funkcja $t \mapsto T(t)x_0$ jest ciągła dla wszystkich $t \geq 0$.

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim_{t \to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim_{t \to 0^+} |T(t) - I| = \lim_{t \to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

$$\lim_{h \to 0} |T(t+h)x_0 - T(t)x_0| = \lim_{h \to 0} |e^{(t+h)A}x_0 - e^{tA}x_0|$$

$$= |e^{tA}| \lim_{h \to 0} |e^{hA}x_0 - x_0| = \lim_{h \to 0} |T(h)x_0 - x_0| = 0,$$

zatem funkcja $t \mapsto T(t)x_0$ jest ciągła dla wszystkich $t \geq 0$.

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t\geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t\to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim\limits_{t\to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t\to 0^+} |T(t) - I| = \lim\limits_{t\to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} |T(t+h)x_0 - T(t)x_0| &= \lim_{h\to 0} |e^{(t+h)A}x_0 - e^{tA}x_0| \\ &= |e^{tA}| \lim_{h\to 0} |e^{hA}x_0 - x_0| = \lim_{h\to 0} |T(h)x_0 - x_0| = 0,\end{aligned}$$

zatem funkcja $t \mapsto T(t)x_0$ jest ciągła dla wszystkich $t \geq 0$.

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim_{t \to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim_{t \to 0^+} |T(t) - I| = \lim_{t \to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} |T(t+h)x_0 - T(t)x_0| &= \lim_{h \to 0} |e^{(t+h)A}x_0 - e^{tA}x_0| \\ &= |e^{tA}| \lim_{h \to 0} |e^{hA}x_0 - x_0| = \lim_{h \to 0} |T(h)x_0 - x_0| = 0,\end{aligned}$$

zatem funkcja $t \mapsto T(t)x_0$ jest ciągła dla wszystkich $t \geq 0$.

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim_{t \to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim_{t \to 0^+} |T(t) - I| = \lim_{t \to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} |T(t+h)x_0 - T(t)x_0| &= \lim_{h \to 0} |e^{(t+h)A}x_0 - e^{tA}x_0| \\ &= |e^{tA}| \lim_{h \to 0} |e^{hA}x_0 - x_0| = \lim_{h \to 0} |T(h)x_0 - x_0| = 0,\end{aligned}$$

zatem funkcja $t \mapsto T(t)x_0$ jest ciągła dla wszystkich $t \geq 0$.

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim_{t \to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim_{t \to 0^+} |T(t) - I| = \lim_{t \to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

W szczególności,

$$\frac{d}{dt}T(t)\Big|_{t=0} = A.$$

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t\geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim_{t\to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim_{t\to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim_{t\to 0^+} |T(t) - I| = \lim_{t\to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

W szczególności,

$$\frac{d}{dt}T(t)\Big|_{t=0} = A.$$

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim_{t \to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim_{t \to 0^+} |T(t) - I| = \lim_{t \to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Zatem funkcja $t \mapsto T(t)x_0$ spełnia zagadnienie Cauchy'ego.

Przypadek 1: $A \in \mathbb{R}$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = \lim_{t \to 0^+} |e^{tA}x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = 1 = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim_{t \to 0^+} |T(t) - I| = \lim_{t \to 0^+} |e^{tA} - 1| = 0$
5. $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA}x_0 = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Zatem funkcja $t \mapsto T(t)x_0$ spełnia zagadnienie Cauchy'ego.

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad x(t) \stackrel{?}{=} e^{tA}x_0$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Definiujemy

$$T(t) := e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \in B(\mathbb{R}^n) = M_n(\mathbb{R}), \quad t \geq 0.$$

Wówczas

$$x(t) = T(t)x_0 = e^{tA}x_0.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad x(t) \stackrel{?}{=} e^{tA} x_0$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Definiujemy

$$T(t) := e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \in B(\mathbb{R}^n) = M_n(\mathbb{R}), \quad t \geq 0.$$

Wówczas

$$x(t) = T(t)x_0 = e^{tA}x_0.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \longrightarrow \qquad x(t) \stackrel{?}{=} e^{tA}x_0$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \Longrightarrow \quad e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad \Longrightarrow \quad e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Definiujemy

$$T(t) := e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \in B(\mathbb{R}^n) = M_n(\mathbb{R}), \quad t \geq 0.$$

Wówczas

$$x(t) = T(t)x_0 = e^{tA}x_0.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad x(t) \overset{?}{=} e^{tA}x_0$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Definiujemy

$$T(t) := e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \in B(\mathbb{R}^n) = M_n(\mathbb{R}), \quad t \geq 0.$$

Wówczas

$$x(t) = T(t)x_0 = e^{tA}x_0.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad x(t) \overset{?}{=} e^{tA}x_0$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Definiujemy

$$T(t) := e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \in B(\mathbb{R}^n) = M_n(\mathbb{R}), \quad t \geq 0.$$

Wówczas

$$x(t) = T(t)x_0 = e^{tA}x_0.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad x(t) \stackrel{?}{=} e^{tA}x_0$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Definiujemy

$$T(t) := e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \in B(\mathbb{R}^n) = M_n(\mathbb{R}), \quad t \geq 0.$$

Wówczas

$$x(t) = T(t)x_0 = e^{tA}x_0.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t) - I| = 0$
5. $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA} = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Własności rodziny $(T(t))_{t\geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t\to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t\to 0^+} |T(t) - I| = 0$
5. $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA} = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t) - I| = 0$
5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA} = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Własności rodziny $(T(t))_{t\geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim_{t\to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim_{t\to 0^+} |T(t) - I| = 0$
5. $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA} = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t) - I| = 0$
5. $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA} = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Własności rodziny $(T(t))_{t \geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t \to 0^+} |T(t) - I| = 0$
5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA} = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Własności rodziny $(T(t))_{t\geq 0}$:

1. $T(0)x_0 = e^{t0}x_0 = x_0$
2. $\lim\limits_{t\to 0^+} |T(t)x_0 - x_0| = 0$
3. $T(0) = e^{t0} = I \in B(\mathbb{R})$ (operator identycznościowy)
4. $\lim\limits_{t\to 0^+} |T(t) - I| = 0$
5. $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$
6. $T(s+t)x_0 = e^{(s+t)A}x_0 = e^{sA}e^{tA} = T(s)T(t)x_0$ dla dowolnych $s, t \geq 0$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \frac{d}{dt}\left(I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \dots\right) = A + 2\frac{tA^2}{2!} + 3\frac{t^2A^3}{3!} + \dots$$
$$= A\left(I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \dots\right) = Ae^{tA}$$

W szczegolności

$$\left.\frac{d}{dt}e^{tA}\right|_{t=0} = A.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

5 $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA} x_0 = Ae^{tA} x_0 = AT(t)x_0$

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \frac{d}{dt}\left(I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \dots\right) = A + 2\frac{tA^2}{2!} + 3\frac{t^2A^3}{3!} + \dots$$
$$= A\left(I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \dots\right) = Ae^{tA}$$

W szczegolności

$$\left.\frac{d}{dt} e^{tA}\right|_{t=0} = A.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

5. $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \frac{d}{dt}\left(I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \dots\right) = A + 2\frac{tA^2}{2!} + 3\frac{t^2A^3}{3!} + \dots$$

$$= A\left(I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \dots\right) = Ae^{tA}$$

W szczegolności

$$\left.\frac{d}{dt}e^{tA}\right|_{t=0} = A.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

5. $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \frac{d}{dt}\left(I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \dots\right) = A + 2\frac{tA^2}{2!} + 3\frac{t^2A^3}{3!} + \dots$$

$$= A\left(I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \dots\right) = Ae^{tA}$$

W szczegolności

$$\frac{d}{dt}e^{tA}\bigg|_{t=0} = A.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA} x_0 = Ae^{tA} x_0 = AT(t)x_0$

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \frac{d}{dt} \left(I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \dots \right) = A + 2\frac{tA^2}{2!} + 3\frac{t^2A^3}{3!} + \dots$$
$$= A \left(I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \dots \right) = Ae^{tA}$$

W szczegolności

$$\left. \frac{d}{dt} e^{tA} \right|_{t=0} = A.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA} x_0 = Ae^{tA} x_0 = AT(t)x_0$

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \frac{d}{dt} \left(I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \dots \right) = A + 2\frac{tA^2}{2!} + 3\frac{t^2A^3}{3!} + \dots$$
$$= A \left(I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \dots \right) = Ae^{tA}$$

W szczegolności

$$\left.\frac{d}{dt} e^{tA}\right|_{t=0} = A.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

5. $\frac{d}{dt} T(t)x_0 = \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 = AT(t)x_0$

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \frac{d}{dt}\left(I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \dots\right) = A + 2\frac{tA^2}{2!} + 3\frac{t^2A^3}{3!} + \dots$$
$$= A\left(I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \dots\right) = Ae^{tA}$$

W szczegolności
$$\left.\frac{d}{dt}e^{tA}\right|_{t=0} = A.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$e^{tA}x_0 = ?$$

Jeżeli istnieją liczba λ i wektor $v \neq 0$, dla których

$$Av = \lambda v,$$

to λ nazywamy **wartością własną** macierzy A, zaś v **wektorem własnym** odpowiadającym wartości własnej λ.

Niech $A \in M_2(\mathbb{R})$ oraz niech λ_1, λ_2 będą jej wartościami własnymi, zaś v_1, v_2 odpowiadającymi im wektorami własnymi.

(v_1, v_2) jest bazą $\mathbb{R}^2$ i odwzorowanie liniowe $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wyznaczone przez macierz A ma w tej bazie postać

$$J := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$e^{tA}x_0 = ?$$

Jeżeli istnieją liczba λ i wektor $v \neq 0$, dla których

$$Av = \lambda v,$$

to λ nazywamy **wartością własną** macierzy A, zaś v **wektorem własnym** odpowiadającym wartości własnej λ.

Niech $A \in M_2(\mathbb{R})$ oraz niech λ_1, λ_2 będą jej wartościami własnymi, zaś v_1, v_2 odpowiadającymi im wektorami własnymi.

(v_1, v_2) jest bazą $\mathbb{R}^2$ i odwzorowanie liniowe $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wyznaczone przez macierz A ma w tej bazie postać

$$J := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$e^{tA}x_0 = ?$$

Jeżeli istnieją liczba λ i wektor $v \neq 0$, dla których

$$Av = \lambda v,$$

to λ nazywamy **wartością własną** macierzy A, zaś v **wektorem własnym** odpowiadającym wartości własnej λ.

Niech $A \in M_2(\mathbb{R})$ oraz niech λ_1, λ_2 będą jej wartościami własnymi, zaś v_1, v_2 odpowiadającymi im wektorami własnymi.

(v_1, v_2) jest bazą $\mathbb{R}^2$ i odwzorowanie liniowe $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wyznaczone przez macierz A ma w tej bazie postać

$$J := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$e^{tA}x_0 = ?$$

Jeżeli istnieją liczba λ i wektor $v \neq 0$, dla których

$$Av = \lambda v,$$

to λ nazywamy **wartością własną** macierzy A, zaś v **wektorem własnym** odpowiadającym wartości własnej λ.

Niech $A \in M_2(\mathbb{R})$ oraz niech λ_1, λ_2 będą jej wartościami własnymi, zaś v_1, v_2 odpowiadającymi im wektorami własnymi.

(v_1, v_2) jest bazą $\mathbb{R}^2$ i odwzorowanie liniowe $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wyznaczone przez macierz A ma w tej bazie postać

$$J := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Niech S będzie macierzą przejścia z bazy standardowej do bazy (v_1, v_2). Wówczas

$$A = SJS^{-1}.$$

Zatem

$$A^n = (SJS^{-1})^n = SJS^{-1} \cdot SJS^{-1} \cdot \ldots \cdot SJS^{-1} = SJ^nS^{-1},$$

przy czym

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (SJS^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n SJ^nS^{-1}}{n!} = S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n J^n}{n!} S^{-1}$$

$$= S \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

W ogólności – **dekompozycja Jordana**.

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Niech S będzie macierzą przejścia z bazy standardowej do bazy (v_1, v_2). Wówczas

$$A = SJS^{-1}.$$

Zatem

$$A^n = (SJS^{-1})^n = SJS^{-1} \cdot SJS^{-1} \cdot \ldots \cdot SJS^{-1} = SJ^nS^{-1},$$

przy czym

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (SJS^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n SJ^nS^{-1}}{n!} = S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n J^n}{n!} S^{-1}$$

$$= S \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

W ogólności – **dekompozycja Jordana.**

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Niech S będzie macierzą przejścia z bazy standardowej do bazy (v_1, v_2). Wówczas

$$A = SJS^{-1}.$$

Zatem

$$A^n = (SJS^{-1})^n = SJS^{-1} \cdot SJS^{-1} \cdot \ldots \cdot SJS^{-1} = SJ^nS^{-1},$$

przy czym

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (SJS^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n SJ^nS^{-1}}{n!} = S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n J^n}{n!} S^{-1}$$

$$= S \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

W ogólności – **dekompozycja Jordana.**

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Niech S będzie macierzą przejścia z bazy standardowej do bazy (v_1, v_2). Wówczas

$$A = SJS^{-1}.$$

Zatem

$$A^n = (SJS^{-1})^n = SJS^{-1} \cdot SJS^{-1} \cdot \ldots \cdot SJS^{-1} = SJ^nS^{-1},$$

przy czym

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (SJS^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n SJ^nS^{-1}}{n!} = S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n J^n}{n!} S^{-1}$$

$$= S \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

W ogólności – **dekompozycja Jordana.**

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Niech S będzie macierzą przejścia z bazy standardowej do bazy (v_1, v_2). Wówczas

$$A = SJS^{-1}.$$

Zatem

$$A^n = (SJS^{-1})^n = SJS^{-1} \cdot SJS^{-1} \cdot \ldots \cdot SJS^{-1} = SJ^nS^{-1},$$

przy czym

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (SJS^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n SJ^nS^{-1}}{n!} = S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n J^n}{n!} S^{-1}$$

$$= S \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

W ogólności – **dekompozycja Jordana.**

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Niech S będzie macierzą przejścia z bazy standardowej do bazy (v_1, v_2). Wówczas

$$A = SJS^{-1}.$$

Zatem

$$A^n = (SJS^{-1})^n = SJS^{-1} \cdot SJS^{-1} \cdot \ldots \cdot SJS^{-1} = SJ^nS^{-1},$$

przy czym

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (SJS^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n SJ^nS^{-1}}{n!} = S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n J^n}{n!} S^{-1}$$

$$= S \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

W ogólności – **dekompozycja Jordana.**

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Niech S będzie macierzą przejścia z bazy standardowej do bazy (v_1, v_2). Wówczas

$$A = SJS^{-1}.$$

Zatem

$$A^n = (SJS^{-1})^n = SJS^{-1} \cdot SJS^{-1} \cdot \ldots \cdot SJS^{-1} = SJ^nS^{-1},$$

przy czym

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (SJS^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n SJ^nS^{-1}}{n!} = S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n J^n}{n!} S^{-1}$$

$$= S \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

W ogólności – **dekompozycja Jordana.**

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Niech S będzie macierzą przejścia z bazy standardowej do bazy (v_1, v_2). Wówczas

$$A = SJS^{-1}.$$

Zatem

$$A^n = (SJS^{-1})^n = SJS^{-1} \cdot SJS^{-1} \cdot \ldots \cdot SJS^{-1} = SJ^nS^{-1},$$

przy czym

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (SJS^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n SJ^nS^{-1}}{n!} = S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n J^n}{n!} S^{-1}$$

$$= S \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

W ogólności – dekompozycja Jordana.

Przypadek 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Niech S będzie macierzą przejścia z bazy standardowej do bazy (v_1, v_2). Wówczas

$$A = SJS^{-1}.$$

Zatem

$$A^n = (SJS^{-1})^n = SJS^{-1} \cdot SJS^{-1} \cdot \ldots \cdot SJS^{-1} = SJ^nS^{-1},$$

przy czym

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (SJS^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n SJ^nS^{-1}}{n!} = S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n J^n}{n!} S^{-1}$$

$$= S \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

W ogólności – **dekompozycja Jordana**.

Półgrupy operatorów

Niech X będzie przestrzenią Banacha.

Półgrupa

Rodzinę $(T(t))_{t\geq 0}$ operatorów liniowych i ograniczonych na X nazywamy półgrupą, jeżeli

(i) $T(0) = I$ (operator identycznościowy na X)

(ii) $\forall t, s \geq 0 \quad T(s+t) = T(s)T(t)$.

C_0-półgrupa

Półgrupę $(T(t))_{t\geq 0}$ nazywamy silnie ciągłą (C_0-półgrupą), jeżeli

$$\forall x \in X \qquad \lim_{t\to 0^+} \left\| T(t)x - x \right\| = 0.$$

Jednostajnie ciągła półgrupa

Półgrupę $(T(t))_{t\geq 0}$ nazywamy jednostajnie ciągłą, jeżeli

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| T(t) - I \right\| = 0.$$

Półgrupy operatorów

Niech X będzie przestrzenią Banacha.

Półgrupa

Rodzinę $(T(t))_{t\geq 0}$ operatorów liniowych i ograniczonych na X nazywamy półgrupą, jeżeli

(i) $T(0) = I$ (operator identycznościowy na X)

(ii) $\forall t, s \geq 0 \quad T(s+t) = T(s)T(t)$.

C_0-półgrupa

Półgrupę $(T(t))_{t\geq 0}$ nazywamy silnie ciągłą (C_0-półgrupą), jeżeli

$$\forall x \in X \quad \lim_{t\to 0^+} \left\| T(t)x - x \right\| = 0.$$

Jednostajnie ciągła półgrupa

Półgrupę $(T(t))_{t\geq 0}$ nazywamy jednostajnie ciągłą, jeżeli

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| T(t) - I \right\| = 0.$$

Półgrupy operatorów

Niech X będzie przestrzenią Banacha.

Półgrupa

Rodzinę $(T(t))_{t\geq 0}$ operatorów liniowych i ograniczonych na X nazywamy półgrupą, jeżeli

(i) $T(0) = I$ (operator identycznościowy na X)

(ii) $\forall t, s \geq 0 \quad T(s+t) = T(s)T(t)$.

C_0-półgrupa

Półgrupę $(T(t))_{t\geq 0}$ nazywamy silnie ciągłą (C_0-półgrupą), jeżeli

$$\forall x \in X \quad \lim_{t\to 0^+} \left\| T(t)x - x \right\| = 0.$$

Jednostajnie ciągła półgrupa

Półgrupę $(T(t))_{t\geq 0}$ nazywamy jednostajnie ciągłą, jeżeli

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| T(t) - I \right\| = 0.$$

Generator półgrupy

Jak powiązać $(T(t))_{t\geq 0}$ z A występującym w równaniu?

Do tej pory:

$$\frac{d}{dt}T(t)\Big|_{t=0} = A.$$

Generator

Generatorem C_0-półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$ nazywamy operator $A : X \supset D(A) \to X$ dany wzorem

$$Ax := \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}$$

Generator półgrupy

Jak powiązać $(T(t))_{t\geq 0}$ z A występującym w równaniu?

Do tej pory:

$$\frac{d}{dt}T(t)\bigg|_{t=0} = A.$$

Generator

Generatorem C_0-półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$ nazywamy operator $A : X \supset D(A) \to X$ dany wzorem

$$Ax := \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}$$

Generator półgrupy

Jak powiązać $(T(t))_{t\geq 0}$ z A występującym w równaniu?

Do tej pory:

$$\frac{d}{dt}T(t)\bigg|_{t=0} = A.$$

Generator

Generatorem C_0-półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$ nazywamy operator $A : X \supset D(A) \to X$ dany wzorem

$$Ax := \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}$$

zdefiniowany dla każdego x należącego do dziedziny

$$D(A) := \left\{ x \in X : \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ istnieje} \right\}.$$

Generator półgrupy

Jak powiązać $(T(t))_{t\geq 0}$ z A występującym w równaniu?

Do tej pory:

$$\frac{d}{dt}T(t)\Big|_{t=0} = A.$$

Generator

Generatorem C_0-półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$ nazywamy operator $A : X \supset D(A) \to X$ dany wzorem

$$Ax := \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}$$

zdefiniowany dla każdego x należącego do dziedziny

$$D(A) := \left\{ x \in X : \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ istnieje} \right\}.$$

Własności C_0-półgrup

1. Funkcja $t \mapsto T(t)x \in X$ jest ciągła dla $x \in X$.
2. Jeżeli dodatkowo $(T(t))_{t\geq 0}$ jest półgrupą jednostajnie ciągłą, to funkcja $t \mapsto T(t) \in B(X)$ jest ciągła.
3. $\exists\, w \in R \;\exists\, M \geq 1 \quad \left\| T(t) \right\| \leq Me^{wt}$.
4. A jest operatorem liniowym.
5. $D(A)$ jest gęstą podprzestrzenią X.
6. $\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x$ dla $x \in D(A)$.
7. A jest operatorem domkniętym, tj.

   $$\text{jeżeli} \quad x_n \to x \quad \text{i} \quad Ax_n \to y, \qquad \text{to} \qquad x \in D(A) \quad \text{i} \quad Ax = y.$$

   Innymi słowy, wykres

   $$\operatorname{Graph} A := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

   jest zbiorem domkniętym w X.

Własności C_0-półgrup

1. Funkcja $t \mapsto T(t)x \in X$ jest ciągła dla $x \in X$.
2. Jeżeli dodatkowo $(T(t))_{t \geq 0}$ jest półgrupą jednostajnie ciągłą, to funkcja $t \mapsto T(t) \in B(X)$ jest ciągła.
3. $\exists\, w \in R \ \exists\, M \geq 1 \quad \left\| T(t) \right\| \leq Me^{wt}$.
4. A jest operatorem liniowym.
5. $D(A)$ jest gęstą podprzestrzenią X.
6. $\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x$ dla $x \in D(A)$.
7. A jest operatorem domkniętym, tj.

$$\text{jeżeli} \quad x_n \to x \quad \text{i} \quad Ax_n \to y, \qquad \text{to} \qquad x \in D(A) \quad \text{i} \quad Ax = y.$$

Innymi słowy, wykres

$$\text{Graph}\, A := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

jest zbiorem domkniętym w X.

Własności C_0-półgrup

1. Funkcja $t \mapsto T(t)x \in X$ jest ciągła dla $x \in X$.
2. Jeżeli dodatkowo $(T(t))_{t \geq 0}$ jest półgrupą jednostajnie ciągłą, to funkcja $t \mapsto T(t) \in B(X)$ jest ciągła.
3. $\exists\, w \in R \;\; \exists\, M \geq 1 \quad \|T(t)\| \leq Me^{wt}$.
4. A jest operatorem liniowym.
5. $D(A)$ jest gęstą podprzestrzenią X.
6. $\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x$ dla $x \in D(A)$.
7. A jest operatorem domkniętym, tj.

$$\text{jeżeli} \quad x_n \to x \quad \text{i} \quad Ax_n \to y, \qquad \text{to} \qquad x \in D(A) \quad \text{i} \quad Ax = y.$$

Innymi słowy, wykres

$$\operatorname{Graph} A := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

jest zbiorem domkniętym w X.

Własności C_0-półgrup

1. Funkcja $t \mapsto T(t)x \in X$ jest ciągła dla $x \in X$.
2. Jeżeli dodatkowo $(T(t))_{t \geq 0}$ jest półgrupą jednostajnie ciągłą, to funkcja $t \mapsto T(t) \in B(X)$ jest ciągła.
3. $\exists\, w \in R \;\; \exists\, M \geq 1 \quad \|T(t)\| \leq Me^{wt}$.
4. A jest operatorem liniowym.
5. $D(A)$ jest gęstą podprzestrzenią X.
6. $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x$ dla $x \in D(A)$.
7. A jest operatorem domkniętym, tj.

$$\text{jeżeli} \quad x_n \to x \quad \text{i} \quad Ax_n \to y, \qquad \text{to} \qquad x \in D(A) \quad \text{i} \quad Ax = y.$$

Innymi słowy, wykres

$$\operatorname{Graph} A := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

jest zbiorem domkniętym w X.

Własności C_0-półgrup

1. Funkcja $t \mapsto T(t)x \in X$ jest ciągła dla $x \in X$.

2. Jeżeli dodatkowo $(T(t))_{t \geq 0}$ jest półgrupą jednostajnie ciągłą, to funkcja $t \mapsto T(t) \in B(X)$ jest ciągła.

3. $\exists\, w \in R \ \exists\, M \geq 1 \quad \|T(t)\| \leq Me^{wt}$.

4. A jest operatorem liniowym.

5. $D(A)$ jest gęstą podprzestrzenią X.

6. $\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x$ dla $x \in D(A)$.

7. A jest operatorem domkniętym, tj.

$$\text{jeżeli} \quad x_n \to x \quad \text{i} \quad Ax_n \to y, \qquad \text{to} \qquad x \in D(A) \quad \text{i} \quad Ax = y.$$

Innymi słowy, wykres

$$\mathrm{Graph}\, A := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

jest zbiorem domkniętym w X.

Własności C_0-półgrup

1. Funkcja $t \mapsto T(t)x \in X$ jest ciągła dla $x \in X$.

2. Jeżeli dodatkowo $(T(t))_{t \geq 0}$ jest półgrupą jednostajnie ciągłą, to funkcja $t \mapsto T(t) \in B(X)$ jest ciągła.

3. $\exists\, w \in R \;\; \exists\, M \geq 1 \quad \left\| T(t) \right\| \leq M e^{wt}$.

4. A jest operatorem liniowym.

5. $D(A)$ jest gęstą podprzestrzenią X.

6. $\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x$ dla $x \in D(A)$.

7. A jest operatorem domkniętym, tj.

$$\text{jeżeli} \quad x_n \to x \quad \text{i} \quad Ax_n \to y, \qquad \text{to} \qquad x \in D(A) \quad \text{i} \quad Ax = y.$$

Innymi słowy, wykres

$$\operatorname{Graph} A := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

jest zbiorem domkniętym w X.

Własności C_0-półgrup

1. Funkcja $t \mapsto T(t)x \in X$ jest ciągła dla $x \in X$.
2. Jeżeli dodatkowo $(T(t))_{t \geq 0}$ jest półgrupą jednostajnie ciągłą, to funkcja $t \mapsto T(t) \in B(X)$ jest ciągła.
3. $\exists\, w \in R \;\; \exists\, M \geq 1 \quad \left\| T(t) \right\| \leq M e^{wt}$.
4. A jest operatorem liniowym.
5. $D(A)$ jest gęstą podprzestrzenią X.
6. $\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x$ dla $x \in D(A)$.
7. A jest operatorem domkniętym, tj.

$$\text{jeżeli} \quad x_n \to x \quad \text{i} \quad Ax_n \to y, \qquad \text{to} \qquad x \in D(A) \quad \text{i} \quad Ax = y.$$

Innymi słowy, wykres

$$\mathrm{Graph}\, A := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

jest zbiorem domkniętym w X.

Własności C_0-półgrup

1. Funkcja $t \mapsto T(t)x \in X$ jest ciągła dla $x \in X$.
2. Jeżeli dodatkowo $(T(t))_{t\geq 0}$ jest półgrupą jednostajnie ciągłą, to funkcja $t \mapsto T(t) \in B(X)$ jest ciągła.
3. $\exists\, w \in R \;\; \exists\, M \geq 1 \quad \big\|T(t)\big\| \leq Me^{wt}$.
4. A jest operatorem liniowym.
5. $D(A)$ jest gęstą podprzestrzenią X.
6. $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x$ dla $x \in D(A)$.
7. A jest operatorem domkniętym, tj.

$$\text{jeżeli} \quad x_n \to x \quad \text{i} \quad Ax_n \to y, \qquad \text{to} \qquad x \in D(A) \quad \text{i} \quad Ax = y.$$

Innymi słowy, wykres

$$\text{Graph}\, A := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

jest zbiorem domkniętym w X.

Zagadnienia dobrze postawione

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{$*$}$$

Twierdzenie

Zagadnienie $(*)$ jest dobrze postawione, tj.

(i) rozwiązanie istnieje,

(ii) rozwiązanie jest jednoznaczne,

(iii) rozwiązanie zależy w sposób ciągły od warunku początkowego,

wtedy i tylko wtedy, gdy A jest generatorem C_0-półgrupy (zatem w szczególności jeżeli jest generatorem jednostajnie ciągłej półgrupy).

Przypadek 3: $A \in B(X)$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

Twierdzenie

1. Operator A jest generatorem jednostajnie ciągłej półgrupy $(T(t))_{t \geq 0}$.
2. Półgrupa $(T(t))_{t \geq 0}$ jest dana wzorem

$$T(t) := e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \quad t \geq 0.$$

3. Rozwiązanie zagadnienia $(*)$ jest dane wzorem

$$x(t) = T(t)x_0 = e^{tA}x_0.$$

Brak ogólnej metody na znalezienie e^{tA}.

Przypadek 3: $A \in B(X)$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

Twierdzenie

1. Operator A jest generatorem jednostajnie ciągłej półgrupy $(T(t))_{t \geq 0}$.
2. Półgrupa $(T(t))_{t \geq 0}$ jest dana wzorem
$$T(t) := e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \quad t \geq 0.$$
3. Rozwiązanie zagadnienia $(*)$ jest dane wzorem
$$x(t) = T(t)x_0 = e^{tA}x_0.$$

Brak ogólnej metody na znalezienie e^{tA}.

Przypadek 3: $A \in B(X)$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

Twierdzenie

1. Operator A jest generatorem jednostajnie ciągłej półgrupy $(T(t))_{t \geq 0}$.
2. Półgrupa $(T(t))_{t \geq 0}$ jest dana wzorem

$$T(t) := e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \quad t \geq 0.$$

3. Rozwiązanie zagadnienia $(*)$ jest dane wzorem

$$x(t) = T(t)x_0 = e^{tA}x_0.$$

Brak ogólnej metody na znalezienie e^{tA}.

Przypadek 3: $A \in B(X)$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

Twierdzenie

1. Operator A jest generatorem jednostajnie ciągłej półgrupy $(T(t))_{t \geq 0}$.
2. Półgrupa $(T(t))_{t \geq 0}$ jest dana wzorem

$$T(t) := e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \quad t \geq 0.$$

3. Rozwiązanie zagadnienia $(*)$ jest dane wzorem

$$x(t) = T(t)x_0 = e^{tA}x_0.$$

Brak ogólnej metody na znalezienie e^{tA}.

Przypadek 3: $A \in B(X)$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

Twierdzenie

1. Operator A jest generatorem jednostajnie ciągłej półgrupy $(T(t))_{t \geq 0}$.
2. Półgrupa $(T(t))_{t \geq 0}$ jest dana wzorem
$$T(t) := e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \quad t \geq 0.$$
3. Rozwiązanie zagadnienia $(*)$ jest dane wzorem
$$x(t) = T(t)x_0 = e^{tA}x_0.$$

Brak ogólnej metody na znalezienie e^{tA}.

Zła wiadomość

Twierdzenie

Operator liniowy A jest generatorem jednostajnie ciągłej półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest operatorem ograniczonym. Wówczas

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

i $D(A) = X$.

Równanie cząstkowe jako równanie zwyczajne?

$$\partial_t u(x,t) = -\partial_x u(x,t) \tag{$*$}$$

Rozwiązanie – funkcja dwóch zmiennych (x,t), przy czym dla ustalonego $t \in \mathbb{R}$, $u(x,t)$ jest funkcją jednej zmiennej – x.

- $(x,t) \mapsto u(x,t)$
- $t \mapsto \boldsymbol{u}(t) = u(x,t)$

$\boldsymbol{u}(t)$ – funkcja zmiennej x, tj. $\boldsymbol{u}(t) \in X$, gdzie X jest pewną przestrzenią funkcyjną

W ten sposób równanie cząstkowe $(*)$ można zapisać jako równanie zwyczajne w przestrzeni Banacha X. Np.:

$$X = C(0,1), \quad A := -\partial_x, \quad D(A) = C^1(0,1).$$

Wówczas

$$\partial_t u(x,t) = -\partial_x u(x,t) \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = A\boldsymbol{u}(t).$$

Równanie cząstkowe jako równanie zwyczajne?

$$\partial_t u(x,t) = -\partial_x u(x,t) \tag{$*$}$$

Rozwiązanie – funkcja dwóch zmiennych (x, t), przy czym dla ustalonego $t \in \mathbb{R}$, $u(x, t)$ jest funkcją jednej zmiennej – x.

- $(x, t) \mapsto u(x, t)$
- $t \mapsto \boldsymbol{u}(t) = u(x, t)$

$\boldsymbol{u}(t)$ – funkcja zmiennej x, tj. $\boldsymbol{u}(t) \in X$, gdzie X jest pewną przestrzenią funkcyjną

W ten sposób równanie cząstkowe $(*)$ można zapisać jako równanie zwyczajne w przestrzeni Banacha X. Np.:

$$X = C(0,1), \quad A := -\partial_x, \quad D(A) = C^1(0,1).$$

Wówczas

$$\partial_t u(x,t) = -\partial_x u(x,t) \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = A\boldsymbol{u}(t).$$

Równanie cząstkowe jako równanie zwyczajne?

$$\partial_t u(x,t) = -\partial_x u(x,t) \qquad (*)$$

Rozwiązanie – funkcja dwóch zmiennych (x,t), przy czym dla ustalonego $t \in \mathbb{R}$, $u(x,t)$ jest funkcją jednej zmiennej – x.

- $(x,t) \mapsto u(x,t)$
- $t \mapsto \boldsymbol{u}(t) = u(x,t)$

$\boldsymbol{u}(t)$ – funkcja zmiennej x, tj. $\boldsymbol{u}(t) \in X$, gdzie X jest pewną przestrzenią funkcyjną

W ten sposób równanie cząstkowe $(*)$ można zapisać jako równanie zwyczajne w przestrzeni Banacha X. Np.:

$$X = C(0,1), \quad A := -\partial_x, \quad D(A) = C^1(0,1).$$

Wówczas

$$\partial_t u(x,t) = -\partial_x u(x,t) \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = A\boldsymbol{u}(t).$$

Abstrakcyjne zagadnienie Cauchy'ego

Niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie operatorem liniowym.

Zagadnienie

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = A\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{u}(0) = x_0, \end{cases}$$

nazywamy abstrakcyjnym zagadnieniem Cauchy'ego.

1. Zagadnienie to jest dobrze postawione wtedy i tylko wtedy, gdy A jest generatorem C_0-półgrupy, ALE
2. operator A jest z natury rzeczy nieograniczony, zatem
3. A nie może być generatorem jednostajnie ciągłej półgrupy.
4. Dlaczego $A : X \supset D(A) \to X$ a nie $A : Y \to X$ (tak, aby A był operatorem ograniczonym)?
   Np.
   $$X = C(0,1), \quad A := -\partial_x, \quad D(A) = C^1(0,1)$$
   zamiast
   $$A := -\partial_x, \quad A : C^1(0,1) \to C(0,1)?$$

Abstrakcyjne zagadnienie Cauchy'ego

Niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie operatorem liniowym.

Zagadnienie

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = A\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{u}(0) = x_0, \end{cases}$$

nazywamy abstrakcyjnym zagadnieniem Cauchy'ego.

1. Zagadnienie to jest dobrze postawione wtedy i tylko wtedy, gdy A jest generatorem C_0-półgrupy, ALE
2. operator A jest z natury rzeczy nieograniczony, zatem
3. A nie może być generatorem jednostajnie ciągłej półgrupy.
4. Dlaczego $A : X \supset D(A) \to X$ a nie $A : Y \to X$ (tak, aby A był operatorem ograniczonym)?
   Np.
   $$X = C(0,1), \quad A := -\partial_x, \quad D(A) = C^1(0,1)$$
   zamiast
   $$A := -\partial_x, \quad A : C^1(0,1) \to C(0,1)?$$

Abstrakcyjne zagadnienie Cauchy'ego

Niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie operatorem liniowym.

Zagadnienie

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = A\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{u}(0) = x_0, \end{cases}$$

nazywamy abstrakcyjnym zagadnieniem Cauchy'ego.

1. Zagadnienie to jest dobrze postawione wtedy i tylko wtedy, gdy A jest generatorem C_0-półgrupy, ALE
2. operator A jest z natury rzeczy nieograniczony, zatem
3. A nie może być generatorem jednostajnie ciągłej półgrupy.
4. Dlaczego $A : X \supset D(A) \to X$ a nie $A : Y \to X$ (tak, aby A był operatorem ograniczonym)?
   Np.
   $$X = C(0,1), \quad A := -\partial_x, \quad D(A) = C^1(0,1)$$
   zamiast
   $$A := -\partial_x, \quad A : C^1(0,1) \to C(0,1)?$$

Abstrakcyjne zagadnienie Cauchy'ego

Niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie operatorem liniowym.

Zagadnienie

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = A\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{u}(0) = x_0, \end{cases}$$

nazywamy abstrakcyjnym zagadnieniem Cauchy'ego.

1. Zagadnienie to jest dobrze postawione wtedy i tylko wtedy, gdy A jest generatorem C_0-półgrupy, ALE
2. operator A jest z natury rzeczy nieograniczony, zatem
3. A nie może być generatorem jednostajnie ciągłej półgrupy.
4. Dlaczego $A : X \supset D(A) \to X$ a nie $A : Y \to X$ (tak, aby A był operatorem ograniczonym)?
   Np.
   $$X = C(0,1), \quad A := -\partial_x, \quad D(A) = C^1(0,1)$$
   zamiast
   $$A := -\partial_x, \quad A : C^1(0,1) \to C(0,1)?$$

Abstrakcyjne zagadnienie Cauchy'ego

Niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie operatorem liniowym.

Zagadnienie

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = A\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{u}(0) = x_0, \end{cases}$$

nazywamy abstrakcyjnym zagadnieniem Cauchy'ego.

1. Zagadnienie to jest dobrze postawione wtedy i tylko wtedy, gdy A jest generatorem C_0-półgrupy, ALE
2. operator A jest z natury rzeczy nieograniczony, zatem
3. A nie może być generatorem jednostajnie ciągłej półgrupy.
4. Dlaczego $A : X \supset D(A) \to X$ a nie $A : Y \to X$ (tak, aby A był operatorem ograniczonym)?
   Np.
   $$X = C(0,1), \quad A := -\partial_x, \quad D(A) = C^1(0,1)$$
   zamiast
   $$A := -\partial_x, \quad A : C^1(0,1) \to C(0,1)?$$

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

Jak wygenerować półgrupę, tj. mając dany operator A otrzymać $(T(t))_{t\geq 0}$?

1. $T(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$? – dla operatora nieograniczonego nie można oczekiwać zbieżności tego szeregu

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

Jak wygenerować półgrupę, tj. mając dany operator A otrzymać $(T(t))_{t\geq 0}$?

1. $T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$? – dla operatora nieograniczonego nie można oczekiwać zbieżności tego szeregu

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

Jak wygenerować półgrupę, tj. mając dany operator A otrzymać $(T(t))_{t\geq 0}$?

1. $T(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$? – dla operatora nieograniczonego nie można oczekiwać zbieżności tego szeregu

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

2. Jeżeli $A \in \mathbb{R}$, to
$$e^A = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{A}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{A}{n}\right)^{-n}$$

Może zatem
$$T(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{tA}{n}\right)^{-n} ?$$

Znów potęgi operatora nieograniczonego, ale
$$\left(1-\frac{tA}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t}-A\right)^{-1}\right)^n$$

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

2. Jeżeli $A \in \mathbb{R}$, to

$$e^A = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{A}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{A}{n}\right)^{-n}$$

Może zatem

$$T(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{tA}{n}\right)^{-n} \; ?$$

Znów potęgi operatora nieograniczonego, ale

$$\left(1 - \frac{tA}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}\right)^n$$

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

2. Jeżeli $A \in \mathbb{R}$, to

$$e^A = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{A}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{A}{n}\right)^{-n}$$

Może zatem

$$T(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{tA}{n}\right)^{-n} ?$$

Znów potęgi operatora nieograniczonego, ale

$$\left(1-\frac{tA}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t}-A\right)^{-1}\right)^n$$

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

Operator rezolwenty

Dla operatora $A : X \supset D(A) \to X$ definiujemy **zbiór rezolwenty**

$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in B(X)\right\}$$

oraz **operator rezolwenty** wzorem

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A).$$

Wówczas

$$\left(1 - \frac{tA}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}\right)^{n} = \left(\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right)^{n}$$

i stąd

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right)^{n} x.$$

Był to pomysł E. Hille'a.

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

Operator rezolwenty

Dla operatora $A : X \supset D(A) \to X$ definiujemy **zbiór rezolwenty**

$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in B(X)\right\}$$

oraz **operator rezolwenty** wzorem

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A).$$

Wówczas

$$\left(1 - \frac{tA}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}\right)^{n} = \left(\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right)^{n}$$

i stąd

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right)^{n} x.$$

Był to pomysł E. Hille'a.

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

Operator rezolwenty

Dla operatora $A : X \supset D(A) \to X$ definiujemy **zbiór rezolwenty**

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in B(X) \right\}$$

oraz **operator rezolwenty** wzorem

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A).$$

Wówczas

$$\left(1 - \frac{tA}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}\right)^{n} = \left(\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right)^{n}$$

i stąd

$$T(t)x = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right)^{n} x.$$

Był to pomysł E. Hille'a.

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

Operator rezolwenty

Dla operatora $A : X \supset D(A) \to X$ definiujemy **zbiór rezolwenty**

$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in B(X)\right\}$$

oraz **operator rezolwenty** wzorem

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A).$$

Wówczas

$$\left(1 - \frac{tA}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}\right)^{n} = \left(\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right)^{n}$$

i stąd

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right)^{n} x.$$

Był to pomysł E. Hille'a.

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

Operator rezolwenty

Dla operatora $A : X \supset D(A) \to X$ definiujemy **zbiór rezolwenty**

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in B(X) \right\}$$

oraz **operator rezolwenty** wzorem

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A).$$

Wówczas

$$\left(1 - \frac{tA}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}\right)^{n} = \left(\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right)^{n}$$

i stąd

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right)^{n} x.$$

Był to pomysł E. Hille'a.

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

3. Przybliżyć operator A ciągiem $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operatorów ograniczonych i liczyć na to, że

$$T(t) = \lim_{n\to\infty} e^{tA_n}.$$

Był to pomysł K. Yosidy.

- $A_n := n^2 R(n, A) - nI \in B(X)$ – aproksymacje Yosidy
- $T_n(t) := e^{tA_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A_n^n}{n!}$ – jednostajnie ciągła półgrupa
- $T(t) := \lim_{n\to\infty} T_n(t)$ – C_0-półgrupa

Zatem C_0-półgrupa jest „granicą funkcji wykładniczych”.

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

3. Przybliżyć operator A ciągiem $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operatorów ograniczonych i liczyć na to, że

$$T(t) = \lim_{n\to\infty} e^{tA_n}.$$

Był to pomysł K. Yosidy.

- $A_n := n^2 R(n, A) - nI \in B(X)$ – aproksymacje Yosidy
- $T_n(t) := e^{tA_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A_n^n}{n!}$ – jednostajnie ciągła półgrupa
- $T(t) := \lim_{n\to\infty} T_n(t)$ – C_0-półgrupa

Zatem C_0-półgrupa jest „granicą funkcji wykładniczych”.

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

3. Przybliżyć operator A ciągiem $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operatorów ograniczonych i liczyć na to, że
$$T(t) = \lim_{n\to\infty} e^{tA_n}.$$
Był to pomysł K. Yosidy.

- $A_n := n^2 R(n, A) - nI \in B(X)$ – aproksymacje Yosidy
- $T_n(t) := e^{tA_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A_n^n}{n!}$ – jednostajnie ciągła półgrupa
- $T(t) := \lim_{n\to\infty} T_n(t)$ – C_0-półgrupa

Zatem C_0-półgrupa jest „granicą funkcji wykładniczych".

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

3. Przybliżyć operator A ciągiem $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operatorów ograniczonych i liczyć na to, że

$$T(t) = \lim_{n\to\infty} e^{tA_n}.$$

Był to pomysł K. Yosidy.

- $A_n := n^2 R(n, A) - nI \in B(X)$ – aproksymacje Yosidy
- $T_n(t) := e^{tA_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A_n^n}{n!}$ – jednostajnie ciągła półgrupa
- $T(t) := \lim_{n\to\infty} T_n(t)$ – C_0-półgrupa

Zatem C_0-półgrupa jest „granicą funkcji wykładniczych”.

Przypadek 4: A – operator nieograniczony

3. Przybliżyć operator A ciągiem $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operatorów ograniczonych i liczyć na to, że

$$T(t) = \lim_{n\to\infty} e^{tA_n}.$$

Był to pomysł K. Yosidy.

- $A_n := n^2 R(n, A) - nI \in B(X)$ – aproksymacje Yosidy
- $T_n(t) := e^{tA_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A_n^n}{n!}$ – jednostajnie ciągła półgrupa
- $T(t) := \lim_{n\to\infty} T_n(t)$ – C_0-półgrupa

Zatem C_0-półgrupa jest „granicą funkcji wykładniczych".

Twierdzenie Hille'a-Yosidy

Przypadek kontrakcji

Operator liniowy $A : X \supset D(A) \to X$ w przestrzeni Banacha X jest generatorem C_0-półgrupy kontrakcji, tj. półgrupy spełniającej warunek

$$\left\| T(t) \right\| \leq 1, \quad t \geq 0,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

(i) A jest operatorem domkniętym,

(i) $D(A)$ jest gęstym podzbiorem X,

(iii) $(0, \infty) \subset \rho(A)$,

(iv) dla każdego $\lambda \in \rho(A)$ zachodzi

$$\left\| R(\lambda, A) \right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Twierdzenie Hille'a-Yosidy

Przypadek ogólny

Operator liniowy $A : X \supset D(A) \to X$ w przestrzeni Banacha X jest generatorem C_0-półgrupy $(T(t))_{t \geq 0}$ spełniającej oszacowanie

$$\left\| T(t) \right\| \leq Me^{wt}, \quad t \geq 0,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

(i) A jest operatorem domkniętym,

(i) $D(A)$ jest gęstym podzbiorem X,

(iii) $(w, \infty) \subset \rho(A)$,

(iv) dla każdego $\lambda \in \rho(A)$ i $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\left\| R(\lambda, A)^n \right\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}.$$

Podsumowanie

Czy rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

zawsze istnieje?

$A \in \mathbb{R}$	✓	
$A \in M_n(\mathbb{R})$	✓	
$A \in B(X)$	✓	
A – nieograniczony	✗	A musi być generatorem półgrupy

Jeżeli rozwiązanie istnieje, to w każdym przypadku jest dane w postaci

$$x(t) = T(t)x_0, \quad t \geq 0,$$

gdzie $(T(t))_{t\geq 0}$ jest silnie/jednostajnie ciągłą półgrupą operatorów liniowych i ograniczonych.

Podsumowanie

Czy rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

zawsze istnieje?

$A \in \mathbb{R}$	✓	
$A \in M_n(\mathbb{R})$	✓	
$A \in B(X)$	✓	
A – nieograniczony	✗	A musi być generatorem półgrupy

Jeżeli rozwiązanie istnieje, to w każdym przypadku jest dane w postaci

$$x(t) = T(t)x_0, \quad t \geq 0,$$

gdzie $(T(t))_{t \geq 0}$ jest silnie/jednostajnie ciągłą półgrupą operatorów liniowych i ograniczonych.

Podsumowanie

Czy rozwiązanie jest klasyczne (klasy C^1 względem t)?

$A \in \mathbb{R}$	✓
$A \in M_n(\mathbb{R})$	✓
$A \in B(X)$	✓
A – nieograniczony	jeżeli $x_0 \in D(A)$

Podsumowanie

Czy zagadnienie

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

jest dobrze postawione dla $t < 0$?

$A \in \mathbb{R}$	✓
$A \in M_n(\mathbb{R})$	✓
$A \in B(X)$	✓
A – nieograniczony	A musi być generatorem grupy

Podsumowanie

$$\lim_{t \to 0^+} \left\| T(t)x - x \right\| = 0$$

$A \in \mathbb{R}$	✓
$A \in M_n(\mathbb{R})$	✓
$A \in B(X)$	✓
A – nieograniczony	✓

Podsumowanie

$$\lim_{t \to 0^+} \left\| T(t) - I \right\| = 0$$

$A \in \mathbb{R}$	✓
$A \in M_n(\mathbb{R})$	✓
$A \in B(X)$	✓
A – nieograniczony	✗

Podsumowanie

Jawny wzór na $(T(t))_{t\geq 0}$?

$A \in \mathbb{R}$	✓
$A \in M_n(\mathbb{R})$	✓
$A \in B(X)$	czasami
A – nieograniczony	czasami

Podsumowanie

$$\frac{d}{dt} T(t)x \Big|_{t=0}$$

$A \in \mathbb{R}$	Ax	
$A \in M_n(\mathbb{R})$	Ax	
$A \in B(X)$	Ax	
A – nieograniczony	Ax	dla $x \in D(A)$

Bibliografia

L. Arlotti, J. Banasiak, *Perturbations of Positive Semigroups with Applications*, Springer London, 2006

A. Bátkai, M. Kramar Fijavž, A. Rhandi, *Positive Operator Semigroups*, Operator Theory: Advances and Applications vol. 257, Birkhäuser Cham, 2017

K.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer New York, 2000

E. Hille, R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1957

A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer New York, 1983