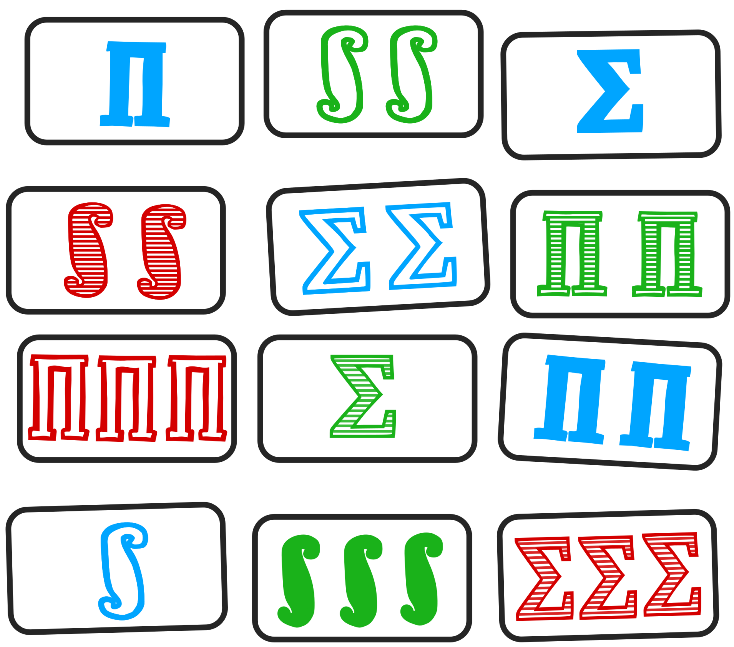
66. Szkoła Matematyki Poglądowej

Podobieństwa i różnice

Ośrodek Kultury Matematycznej

OKM

25-28 sierpnia 2023, Siedlce



Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Podobieństwa i różnice pojawiają się w matematycznej edukacji bardzo wcześnie. Różnica, jako pojęcie z zakresu arytmetyki liczb naturalnych jest omawiana już w pierwszej klasie szkoły podstawowej, a niewiele później, wraz z podstawami geometrii pojawia się pojęcie podobieństwa różnych figur. Jakkolwiek nie będziemy uciekać od tych podstawowych definicji podczas najbliższej Szkoły Matematyki Poglądowej, zamierzamy raczej się przyjrzeć się ogólniejszej i może też ciut potoczniejszej interpretacji tych pojęć.

W końcu poważna część matematyki wyższej opiera się na klasyfikacjach różnych klas obiektów: w algebrze zastanawiamy się nad izomorficznością grup czy ciał, w topologii nad homeomorficznością przestrzeni, w geometrii różniczkowej nad dyfeomorficznością rozmaitości – tak możnaby wymieniać bez końca. Takie klasyfikacje prowadzą do jednych z najbardziej fascynujących zagadnień matematycznych, a tak naprawdę sprowadzają się do określenia, czy dane obiekty te są według nas wystarczająco podobne. Zresztą wszystkie te pojęcia „podobieństwa" są stopniowalne: na przykład, w topologii badamy nie tylko homeomorficzność, ale też słabsze pojęcia homotopijnej równoważności lub kobordyzmu, w geometrii algebranicznej – słabsze od izomorfizmu pojęcie biwymiernej równoważności.

A jeśli chcemy pokazać, że pewne obiekty się różnią? Posiadamy mnóstwo sposobów określania tych różnic – chociażby całe teorie niezmienników: wyznaczniki, ślady, miary, grupy homologii i kohomologii, K-teoria, niezmienniki węzłów itp. . Ale co zrobić, gdy kolejne niezmienniki uparcie wychodzą takie same?

I wreszcie podobieństwa i różnice przydają się w matematyce na poziomie metanaukowym. Szukając nowych, interesujących zagadnień, rozwiązując otwarte problemy, często pozwalamy naszej intuicji na oparcie się na podobieństwach i różnicach pomiędzy obiektami, o których staramy się uzyskać informacje, a tym, co już wiemy.

Patronaty:

Rektor Uniwersytetu Przyrodniczo-Humanistycznego w Siedlcach	Rektor Politechniki Warszawskiej	Prezes Polskiego Towarzystwa Matematycznego

66. Szkoła Matematyki Poglądowej

Podobieństwa i różnice

25-28 sierpnia 2023, `www.smp.uph.edu.pl`

	piątek, 25 sierpnia prowadzący: Jarosław Grytczuk
8:50–9:00	otwarcie Szkoły
9:00–9:45	Adam Gregosiewicz *Wykład Laureata Medalu Filca⋆ 65 SMP:* *Skończony czy nieskończony? A może to zupełnie nieistotne?*
10:00–10:45	Bartłomiej Pawlik *Problemy pętli*
10:45–11:15	przerwa
11:15–12:00	Oskar Skibski *Tajemnica z Talmudu*
12:15–13:00	Małgorzata Śleszyńska-Nowak *O uczciwych złodziejach naszyjników*
13:00–16:00	przerwa
16:15–17:00	Paweł Naroski *Cierpienia Młodego Studenta*
17:15–18:00	Tomasz Bartnicki *Ekstremalne podobieństwa*
18:00–19:30	przerwa
19:30–20:30	Renata Jurasińska *Zagadki*

	sobota, 26 sierpnia prowadzący: Grzegorz Kosiorowski
9:00–9:45	Zofia Miechowicz *Zakopane i nie na pokaz*
10:00–10:45	Anna Gierzkiewicz-Pieniążek *Pomiędzy orbitami okresowymi*
10:45–11:15	przerwa
11:15–12:00	Zdzisław Pogoda *O zaskakujących różnicach i dziwnych podobieństwach,* *czyli scenki o problemach klasyfikacji*
12:15–13:00	Joanna Jaszuńska *Podobieństwa? Im mniej, tym lepiej!*
13:00–16:00	przerwa
16:15–17:00	Bartłomiej Bzdęga *Prawie jak podobieństwo*
17:15–18:00	Marek Kordos *Kwadratura kontra kubatura*
18:00–19:30	przerwa
19:30–22:00	*uroczysta kolacja*

	niedziela, 27 sierpnia prowadzący: Adam Bobrowski
9:30–11:00	Michał Śliwiński *Gra terenowa*
11:15–12:00	Elżbieta Ratajczyk *Co się kryje na przekątnej?*
12:15–13:00	Jacek Banasiak *Na ile modele matematyczne są podobne do rzeczywistości – sukcesy i wpadki modelowania matematycznego*
13:00–15:45	przerwa
16:15–17:00	Adam Błoch *O* e^{tA} *słów kilka*
17:15–18:00	Adam Bobrowski *Oryginałowie i oryginały*
18:00–19:30	przerwa
19:30–20:15	Krzysztof Piejko *Czym liczba* π *różni się od innych stałych?*

	poniedziałek, 28 sierpnia prowadzący: Maria Donten-Bury
9:00–9:45	Maciej Borodzik *Wielomian Jonesa a wielomian Aleksandera*
10:00–10:45	Rafał Meller *Rachunek prawdopodobieństwa jednowymiarowy i wielowymiarowy*
10:45–11:15	przerwa
11:15–12:00	Masha Vlasenko *Rozmaitości w lustrze i arytmetyka*
12:15–13:00	Bartosz Naskręcki *Układanie kształtów w przestrzeni*
13:00–13:15	Małgorzata Misztal *Konkurs na Wzorowego Słuchacza*⋆⋆
13:15–13:30	przerwa i głosowanie na laureata Medalu Filca⋆
13:30–14:00	*zakończenie Szkoły*

⋆ Najlepszy odczyt każdej Szkoły nagradzany jest Medalem Filca. Głosowanie odbywa się na zakończenie Szkoły. Można głosować na wiele odczytów. Każdy z uczestników dysponuje liczbą głosów równą liczbie wykładów, na jakich był obecny. Na jeden wykład można oddać co najwyżej 10 głosów. Następna szkoła rozpoczyna się uroczystym wręczeniem medalu oraz odczytem Laureata.

Osoby wyjeżdżające wcześniej, a chcące zagłosować, prosimy o kontakt z Organizatorami.

⋆⋆ Konkurs na Wzorowego Słuchacza przeprowadzany jest na zakończenie Szkoły. Pytania dotyczą tego, co było na wykładach – czasami merytorycznie, czasami z przymrużeniem oka. Do finału wchodzi pięć osób, które jako pierwsze udzielą trzech poprawnych odpowiedzi w eliminacjach. Pierwsze trzy osoby zdobywają medale Wzorowego Słuchacza, wszyscy finaliści – nagrody rzeczowe. Medal Wzorowego Słuchacza można zdobyć co najwyżej trzykrotnie.

Serdecznie zachęcamy do uczestnictwa oraz do zgłaszania w trakcie Szkoły własnych propozycji pytań, wraz ze źródłem i poprawną odpowiedzią – można potem trafić na własne pytanie w konkursie. Propozycje zbierają Małgosia Misztal i Renata Jurasińska.

REFERATY

Skończony czy nieskończony? A może to zupełnie nieistotne?

Adam Gregosiewicz

Odmienny charakter struktur skończonych i nieskończonych jest z samej definicji oczywisty. Mimo wyraźnych różnic, istnieje jednak między nimi zaskakująco wiele subtelnych podobieństw, o których postaram się trochę opowiedzieć.

Problemy pętli

Bartłomiej Pawlik

W referacie będziemy się przyglądać pewnym zagadnieniom związanym z zachowaniem wybranych rodzin rekurencyjnych ciągów liczb całkowitych. Oględnie rzecz ujmując, problem pętli polega na określaniu, czy dane typy ciągów od pewnego miejsca zachowują się *podobnie*, czy może jednak wykazują pewne *różnice*. W wielu miejscach otrzemy się o matematykę rekreacyjną (stała Kaprekara, ciągi *pea pattern* i inne zabawy słowne), a w kilku o poważniejszą (problem Collatza).

Pod koniec referatu postaram się uzasadnić, iż to, że mam selfie z Évaristem Galois jest bardziej prawdopodobne niż to, że 26 sierpnia 2023 roku trafię szóstkę w Lotto.

Tajemnica z Talmudu

Oskar Skibski

Jedna z historii w Talmudzie Babilońskim opisuje następującą sytuację. Mężczyzna mający trzy żony umiera. W kontrakcie małżeńskim obiecał im kolejno 100, 200 i 300 starożytnych srebrnych monet. Niestety, gdy umierał jego majątek był zbyt mały, aby spełnić te obietnice. Jak sprawiedliwie rozdzielić majątek między żony? W Talmudzie przedstawione są trzy warianty problemu oraz ich rozwiązania, jednak przez prawie dwa tysiące lat nikt nie rozumiał, jaki jest sens tych rozwiązań i jaką ogólną metodę opisują. Tajemnicę tą rozwiązali dopiero Robert Aumann i Michael Maschler pod koniec XX wieku i o tym opowiemy na wykładzie.

O uczciwych złodziejach naszyjników

Małgorzata Śleszyńska-Nowak

Dwóch złodziei ukradło naszyjnik składający się z diamentów i szmaragdów. Zamierzają sprawiedliwie podzielić się łupem, czyli pociąć naszyjnik na kilka części. Złodzieje nie są estetami, nie zależy im na tym, żeby naszyjniki były podobne pod względem rozmieszczenia kamieni. Chcą tylko aby obaj dostali taką samą liczbę diamentów i szmaragdów. Mają jeszcze jedno założenie – planują przeciąć naszyjnik w jak najmniejszej liczbie miejsc (kamienie połączone są złotym łańcuszkiem, którego nie chcą zbytnio poniszczyć). Ile cięć muszą zrobić złodzieje? A gdyby w naszyjniku były nie tylko diamenty i szmaragdy, ale też rubiny? Albo gdyby szajka składała się z większej liczby złodziei? Ile wtedy cięć byłoby potrzebnych?

Cierpienia Młodego Studenta

Paweł Naroski

Przeróżne konwencje stosowane przez zawodowych matematyków, które dla nich są jakże wygodnym i precyzyjnym narzędziem wyrażania myśli, dla uczących się dopiero co adeptów tej sztuki są ciężkimi do odróżnienia napisami, które oznaczają często zupełnie różne rzeczy. I odwrotnie – nieraz rzeczy, które na pierwszy rzut oka wyglądają tak różnie, mówią o podobnych, a nawet tożsamych, obiektach. W czasie referatu opowiem o kilku takich krytycznych miejscach, które zauważyłem przez lata nauczania matematyki dyskretnej. Bo cierpienia młodego studenta są również cierpieniami młodego nauczyciela.

Ekstremalne podobieństwa

Tomasz Bartnicki

Pokażemy podobieństwo między niepozornym zadaniem logiczno-matematycznym, a pierwszym klasycznym twierdzeniem ekstremalnej teorii grafów – Twierdzeniem Turána. Omówimy je szerzej (być może z jednym z dowodów) oraz przybliżymy sylwetkę autora. Na koniec podamy rozwiązanie zadania w przypadku ogólnym.

Zakopane i nie na pokaz

Zofia Miechowicz

O tym jak zupełnie niewinne zabawy słowne mogą przerodzić się w całkiem poważne rozważania matematyczne, czyli o palindromach w różnych matematycznych ujęciach.

Pomiędzy orbitami okresowymi

Anna Gierzkiewicz-Pieniążek

Porządek Szarkowskiego „$\triangleleft$" na liczbach naturalnych:

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft \cdots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft \cdots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft \cdots \triangleleft 2^k \triangleleft 2^{k-1} \triangleleft \cdots \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1$$

pojawia się, gdy badamy punkty okresowe ciągłego odwzorowania odcinka w siebie. Twierdzenie Szarkowskiego mówi, że jeśli takie odwzorowanie ma punkt o okresie m, to ma również punkty okresowe o wszystkich okresach n, które są „większe" według tego porządku: $m \triangleleft n$. W szczególności, pomiędzy punktami orbity o okresie 3 na odcinku znajdziemy punkty o wszystkich okresach naturalnych!

Niestety, to piękne twierdzenie nie daje się uogólnić na wyższe wymiary. Chyba, że... odwzorowanie jest wystarczająco podobne do jednowymiarowego. Dzięki temu znajdziemy całe mnóstwo okresowych rozwiązań równań różniczkowych, które wydają się na oko niezbyt chaotyczne.

O zaskakujących różnicach i dziwnych podobieństwach, czyli scenki o problemach klasyfikacji

Zdzisław Pogoda

Ważną rolę w matematyce odgrywają problemy klasyfikacji rozmaitych obiektów (krzywych, grup, rozmaitości). Matematycy stosują przeróżne wymyślne techniki i, jeśli sprawdzają się w jednym przypadku, to próbują je wykorzystać również w innych sytuacjach, czasem to się udaje, a czasem nie. Kiedy? Może uda się o tym opowiedzieć.

Podobieństwa? Im mniej, tym lepiej!

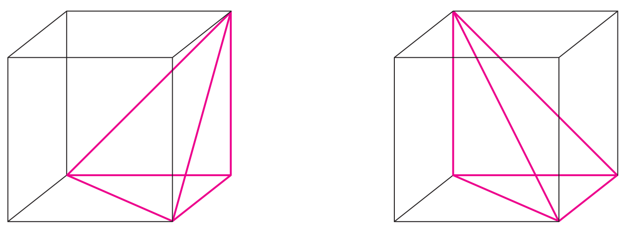
Joanna Jaszuńska

Opowiem o tym, dlaczego i w jakim sensie podobieństw jest bardzo niewiele. Pokażę także, jakie płyną z tego korzyści i w jakich okolicznościach ten mały wybór może bardziej cieszyć niż martwić.

Kwadratura kontra kubatura

Marek Kordos

Mierzenie pola czy objętości wielokąta czy wielościanu (czyli ich miary Jordana) to identyczne procedury: umieszczamy obiekt na jednostkowej siatce kwadratowej czy sześciennej, którą następnie wielokrotnie (i) zagęszczamy, zliczając (k_i) zawarte w nim oczka – ciąg odpowiednio $\frac{k_i}{4^{i-1}}$ czy $\frac{k_i}{8^{i-1}}$ okazuje się zbieżny i jego granica to odpowiednio pole czy objętość. Euklides nie znał miary Jordana i mierzył inaczej: rozkładał każdy wielokąt na trójkąty, a wielościan na czworościany i w przypadku trójkątów dzielił je na kawałki, z których składał kwadraty, a w przypadku czworościanów posługiwał się metodą wyczerpywania, a więc używał granicy. Postępował zatem niejednakowo. Problem pozbycia się granicy w przypadku wielościanów był najdłużej bezskutecznie atakowanym problemem matematyki. Hilbert uważał, że brak odpowiedzi na to, czy możliwe jest obliczanie miary wielościanów bez przejścia granicznego, jest krępujący i umieścił to pytanie jako swój III problem (tuż za hipotezą continuum i niesprzecznością arytmetyki). Rozwiązanie jest negatywne i zaowocowało czymś tak zgoła nieoczywistym, jak baza Hamela. Dowód tej niemożności wzbogacony będzie demonstracją, że z tych czworościanów tylko jeden da się elementarnie (*tangramowo*) przekształcić na sześcian.



Co się kryje na przekątnej?

Elżbieta Ratajczyk

Podczas wykładu omówimy podobieństwa między twierdzeniem Cantora, paradoksem kłamcy, problemem stopu, twierdzeniem Gödla o niezupełności i antynomią Russella. We wszystkich tych zagadnieniach obiekty odwołują się do samych siebie. Spróbujemy dotrzeć do sedna metody przekątniowej, jednocześnie kategorycznie unikając formalizmu teorii kategorii.

Na ile modele matematyczne są podobne do rzeczywistości – sukcesy i wpadki modelowania matematycznego

Jacek Banasiak

W wykładzie omówimy podstawowe aspekty modelowania matematycznego wraz z jego historią pełną sukcesów, jak i spektakularnych porażek.

O e^{tA} słów kilka

Adam Błoch

Punktem wyjścia naszych rozważań będzie równanie różniczkowe postaci $x'(t) = Ax(t)$. Przeanalizujemy cztery przypadki: kiedy A jest liczbą rzeczywistą, macierzą, operatorem ograniczonym w przestrzeni Banacha i wreszcie gdy A jest operatorem nieograniczonym. Jak wiadomo, w pierwszej sytuacji rozwiązaniem jest funkcja wykładnicza. Zastanowimy się czy i w jaki sposób wynik ten można przenieść na pozostałe przypadki oraz prześledzimy podobieństwa i różnice pomiędzy nimi.

Oryginałowie i oryginały

Adam Bobrowski

Opowiem (krótką) historię twierdzeń o istnieniu oryginałów dla transformat Laplace'a funkcji o wartościach wektorowych, której głównymi bohaterami są twórczy matematyczni oryginałowie. Bo czy można stworzyć twierdzenie wprowadzające nową jakość lub pokazujące nową perspektywę, a nie tylko technikalia, jeśli nie myśli się – nazwijmy to – niestandardowo? Być może przy okazji uda się też podyskutować o tym, które uogólnienia są warte uwagi, a które nie.

Czym liczba π różni się od innych stałych?

Krzysztof Piejko

Liczba π to jedna z najbardziej znanych stałych liczbowych. Występuje nie tylko w matematyce, fizyce i innych naukach, ale także w literaturze, sztuce i kulturze. Była wyzwaniem dla badaczy i natchnieniem dla artystów. W wielu krajach, czternastego marca, obchodzony jest nawet dzień liczby π, któremu towarzyszą liczne imprezy naukowe i kulturalne. Ta oszałamiająca kariera rodzi pewne pytania. Co sprawiło, że liczba π pełni dziś rolę celebrytki w świecie liczb? Czym różni się ta liczba od innych stałych? Dlaczego wielu ludzi poświęciło znaczną część swojego życia na badanie jej własności i szukanie coraz dokładniejszych przybliżeń? Referat będzie próbą odpowiedzi na powyższe pytania.

Wielomian Jonesa a wielomian Aleksandera

Maciej Borodzik

Wielomiany Jonesa i Aleksandera są dwoma najważniejszymi niezmiennikami węzłów. Istnieją bardzo podobne definicje. Na wykładzie pokażę zaskakujące podobieństwa i zaskakujące różnice między tymi niezmiennikami.

Rachunek prawdopodobieństwa jednowymiarowy i wielowymiarowy

Rafał Meller

Naturalnym pytaniem w rachunku prawdopodobieństwa jest, czy dany wynik dotyczący zmiennych losowych, można uogólnić na wektory losowe. Dodatkowa struktura przestrzeni liniowej czasem nie przeszkadza w uogólnieniu twierdzeń, czasem jest znaczną przeszkodą. Podczas wystąpienia omówimy przyczyny, czemu wielowymiarowy rachunek prawdopodobieństwa jest trudniejszy. Przyjrzymy się też klasycznym twierdzeniom rachunku prawdopodobieństwa (mocne prawo wielkich liczb, centralne twierdzenie graniczne, prawo iterowanego logarytmu) i ich wielowymiarowym uogólnieniom.

Rozmaitości w lustrze i arytmetyka

Masha Vlasenko

W fizyce teoria strun rozważa cząstki elementarne jako jednowymiarowe obiekty zwane strunami. W tej teorii czasoprzestrzeń ma więcej niż cztery wymiary i wymiary dodatkowe są opisywane rozmaitościami zespolonymi specjalnego typu, tzw. rozmaitościami Calabiego-Yau. Symetria lustrzana jest zjawiskiem, w którym dwie rozmaitości Calabiego-Yau wyglądają bardzo różnie geometrycznie, ale mimo to są równoważne, gdy są stosowane jako dodatkowe wymiary teorii strun. Planuję opowiedzieć historię, jak to zjawisko zostało zaobserwowane na początku lat 90. Wtedy Candelas, de la Ossa, Green and Parkes odkryli, że trudne problemy geometrii enumeratywnej mogą być szybko rozwiązane ”w lustrze” z pomocą równań różniczkowych. Fizycy również zauważyli, że obserwowane po tamtej stronie lustra tzw. liczby instantonów okazują się całkowite. Niedawno razem z Fritsem Beukersem udowodniliśmy tę hipotezę w kilku kluczowych przykładach symetrii lustrzanej.

Układanie kształtów w przestrzeni

Bartosz Naskręcki

Każdy potrafi ułożyć kwadratowe płytki na podłodze. Ale czy podobnie można ułożyć płytki sześciokątne. A co jeśli, próbujemy podobnej sztuki w trzech lub więcej wymiarach? Opowiem o tym jakie reguły (symetrie) rządzą tymi problemami w 2D i wyższych wymiarach. Zobaczymy co jest podobne dla wszystkich wymiarów, a czym różnią się te problemy wraz ze wzrostem wymiaru. Rozróżnimy układanie płytek w sposób regularny (periodyczny) od nieperiodycznego lub wręcz aperiodycznego.

SESJA PLAKATOWA

Matematyka w poezji. Stany splątane

Aleksandra Górecka

Plakat skupia się na przedstawieniu utworów dwóch poetów: Andrzeja Sosnowskiego oraz Tymoteusza Karpowicza pod kątem translacji języka i świata matematyki na płaszczyznę wiersza. Analizowane teksty rozpatrywane są jako projekt matematycznej poezji.

Przy rozpatrywaniu tekstów Andrzeja Sosnowskiego najważniejsze jest nawiązanie do teorii grafów, incydentalne natomiast do geometrii różniczkowej czy logiki. Wzajemne połączenia między elementami rzeczywistości Sosnowski zauważył tworząc wiersze-grafy. Miesza słowa ze sobą, rozkleja je, a one wytwarzają różne płaszczyzny znaczeń. To, co dzieje się w wierszach Sosnowskiego przypomina sieć, plątaninę znaczeń i podmiotowości.

Część poświęcona Tymoteuszowi Karpowiczowi prezentuje jego projekt poezji matematycznej, który badany jest pod kątem przenikania się kilku dziedzin matematycznych – logiki, teorii mnogości, geometrii euklidesowej i różniczkowej. Karpowicz, podobnie jak Sosnowski, stosuje grę odbić, szukając możliwości pogodzenia słowa z rzeczą, wyobraźni z materią, a liczby ze słowem.

Plakat ma również za zadanie sprawdzić, czy istnieje ścieżka, która łączy matematykę czystą z tzw. poezją czystą. Czy matematyka teoretyczna może okazać się pomocna w tej dziedzinie literatury? Czy jest możliwość by stworzyć interdyscyplinarny (totalny) projekt matematyczno-poetycki? Jak rozpatrywać poezję narzędziami matematyki i czy to w ogóle możliwe?

Przedłużenia analityczne szeregów potęgowych

Adrian Startek

Jak niewielkie różnice w doborze wykładników szeregu potęgowego o niezerowych współczynnikach wpływa na istnienie i kształt przedłużenia analitycznego?

Własności różnych parametryzacji sfery

Mateusz Tokarski

Praca będzie prezentować wady i zalety wybranych parametryzacji ze szczególnym naciskiem na cechy, które nie są zachowane.
