65. Szkoła Matematyki Poglądowej
Siedlce, 26-29 sierpnia 2022

Entropia w teorii układów dynamicznych

Olena Karpel

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Entropia

Rudolf Clausius (1854): termodynamika

“en” = w + “tropia” = przekształcenie

Entropia - “miara chaosu”

Jeżeli układ termodynamiczny przechodzi od jednego stanu równowagi do drugiego, bez udziału czynników zewnętrznych, to jego entropia zawsze rośnie.

Układy dynamiczne

Matematyczna teoria układów dynamicznych, zapoczątkowana przez Poincarégo pod koniec XIX i na początku XX wieku

- X — przestrzeń fazowa wyposażona w pewną strukturę (np. topologię lub σ-ciało zbiorów mierzalnych)
- czas — grupa (półgrupa) przekształceń X w siebie, które zachowują tę strukturę

Klasyczny przypadek: (X, T)

$\mathcal{O}(x) = \{T^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}(\mathbb{Z})}$ — orbita (trajektoria) punktu

Układy dynamiczne

- **Układ dynamiczny teoriomiarowy (metryczny)**

  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — przestrzeń miarowa (najczęściej probabilistyczna)

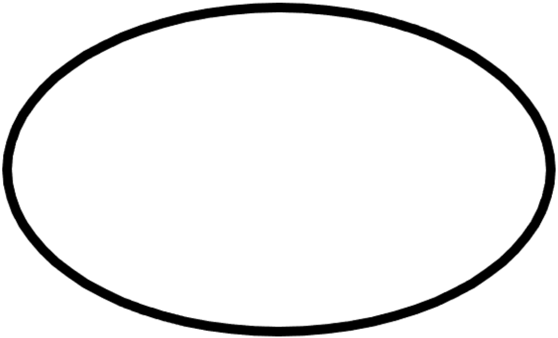
  T — przekształcenie mierzalne zachowujące miarę μ $(\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A))$

- **Układ dynamiczny topologiczny**

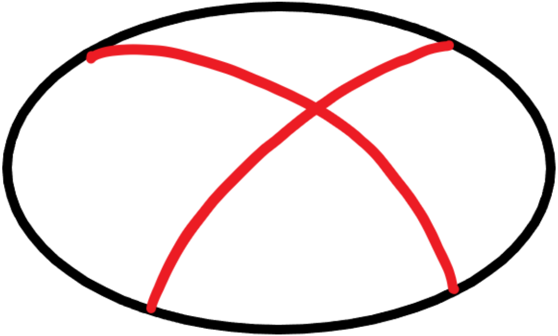
  X — zwarta przestrzeń topologiczna (najczęściej metryczna)

  $T \colon X \to X$ — przekształcenie ciągłe

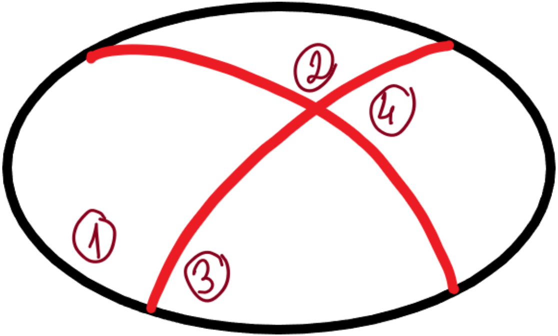
Dynamika symboliczna



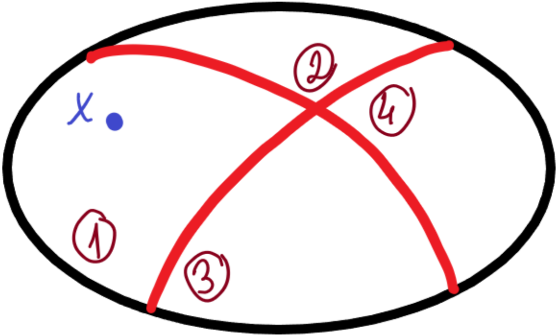
Dynamika symboliczna



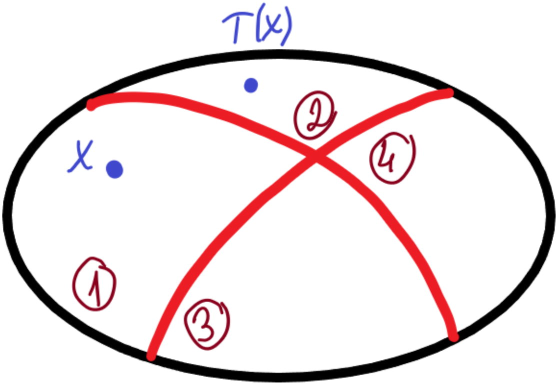
Dynamika symboliczna



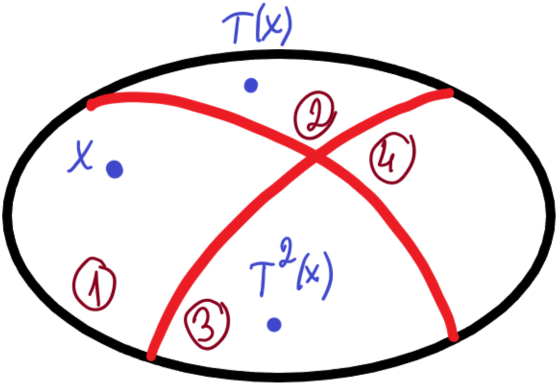
Dynamika symboliczna



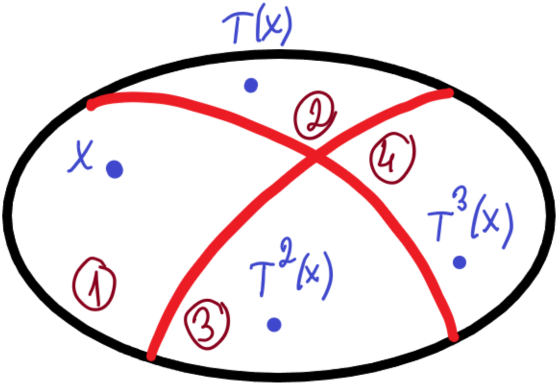
Dynamika symboliczna



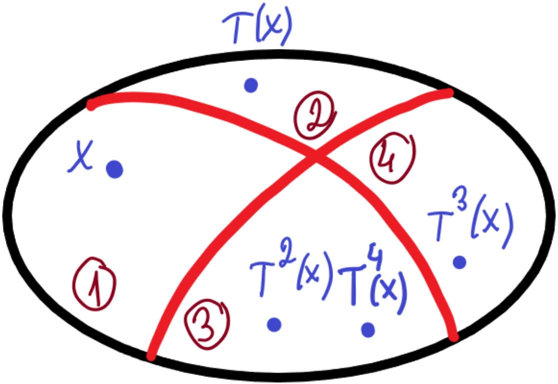
Dynamika symboliczna



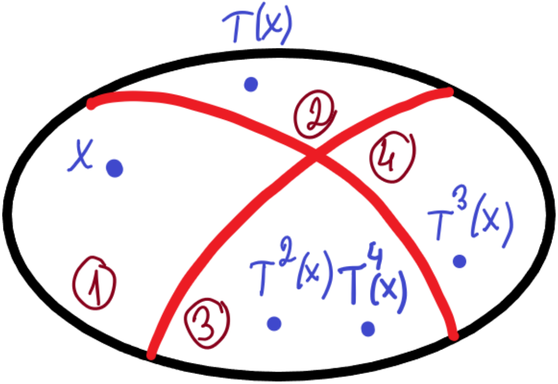
Dynamika symboliczna



Dynamika symboliczna

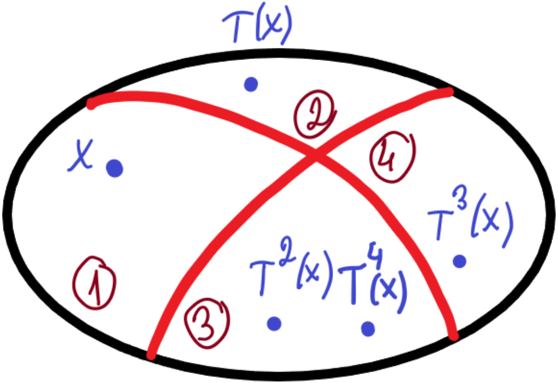


Dynamika symboliczna



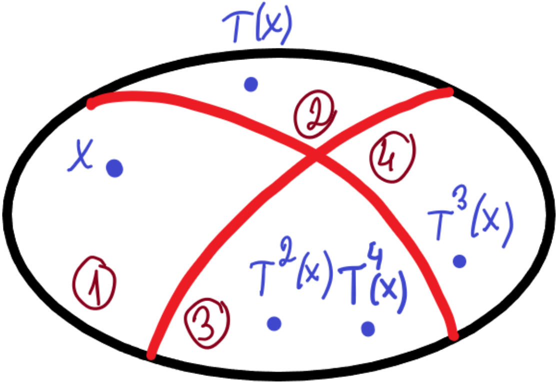
$$x \longleftrightarrow (.12343\ldots)$$

Dynamika symboliczna



$$x \longleftrightarrow (.12343\ldots)$$
$$T(x) \longleftrightarrow \sigma(.12343\ldots) = (.2343\ldots)$$

Dynamika symboliczna



$$x \longleftrightarrow (.12343\ldots)$$
$$T(x) \longleftrightarrow \sigma(.12343\ldots) = (.2343\ldots)$$

Hadamard (1898)

Dynamika symboliczna

$\{0, 1, \ldots, m-1\}$ — alfabet

$\Sigma_m = \{0, \ldots, m-1\}^{\mathbb{N}}$

$x = (x_n), y = (y_n) \in \Sigma_m$, $d(x, y) = 2^{-l}$, gdzie $l = \min\{i : x_i \neq y_i\}$.

$\sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m$, $(\sigma(x))_n = x_{n+1}$

$\sigma(.01001...) = (.1001...)$

$p = (p_0, \ldots, p_{m-1})$, $p_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{m-1} p_i = 1 \to$ miara na $\{0, \ldots, m-1\}$;

μ_p — miara produktowa na Σ_m

Cylindry $[.i] = \{x \in \Sigma_m : x_0 = i\}$ (pierwszej generacji)

$\mu_p([.i]) = p_i$

$[.i_0 \ldots i_n] = \{x \in \Sigma_m : x_0 = i_0, \ldots, x_n = i_n\}$

$\mu_p([.i_0 \ldots i_n]) = p_{i_0} \cdots p_{i_n}$

$\mu_p([.00]) = p_0^2$, $\quad \mu_p([.01]) = \mu_p([.10]) = p_0 p_1$, $\quad \mu_p([.11]) = p_1^2$

X — zbiór możliwych wyników eksperymentu, C — zdarzenie losowe, μ — prawdopodobieństwo.

Funkcja informacji zdarzenia C:

$$I(C) = -\log \mu(C).$$

Własności funkcji informacji:

- $I(C) \geq 0$ dla każdego zdarzenia C;
- im mniejsze prawdopodobieństwo C tym więcej informacji otrzymujemy w przypadku zdarzenia C;
- $I(X) = 0$;
- Dla niezależnych zdarzeń C i D (czyli $\mu(C \cap D) = \mu(C)\mu(D)$) informacja jest addytywną: $I(C \cap D) = I(C) + I(D)$.

Z dokładnością do stałej $-\log \mu(C)$ jest jedyną taką funkcją.

Entropia metryczna (teorio-miarowa)

Entropia rozbicia

Entropia rozbicia = ile średnio dostajemy informacji z rozbicia (entropia Shannona).

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ — przestrzeń z miarą probabilistyczną.

$\xi = \{C_1, \ldots, C_n\}$ — rozbicie X na zbiory mierzalne.

$$H(\xi) = -\sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) \log \mu(C_i)$$

Przyjmujemy $0 \log 0 = 0$ (zgodnie z granicą $\lim_{p \to 0^+} p \log p = 0$).

$H(\xi) = -\int_X \log m(x, \xi)\, d\mu$, gdzie $m(x, \xi)$ jest miarą elementu ξ, który zawiera x.

Funkcja $(-x) \log x$ jest wklęsła na przedziale $[0, 1]$.

Entropia metryczna

$\xi = \{C_1, \ldots, C_n\} \quad H(\xi) = -\sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) \log \mu(C_i)$

Własności entropii rozbicia

(i) $H(\xi) \geq 0$; $H(\xi) = 0 \iff \xi = \{X\}$.

(ii) $\xi \leq \eta$ (rozbicie η jest drobniejsze od ξ) $\Longrightarrow H(\xi) \leq H(\eta)$; $H(\xi) = H(\eta) \iff \xi = \eta$.

(iii) $H(\xi) \leq \log n$; $H(\xi) = \log n \iff \mu(C_i) = \frac{1}{n}$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$.

(iv) $\eta = \{D_1, \ldots, D_m\}$, $\xi \vee \eta = \{C_i \cap D_j, C_i \in \xi, D_j \in \eta\}$ $H(\xi \vee \eta) \leq H(\xi) + H(\eta)$; dla rozbić niezależnych $(\mu(C_i \cap D_j) = \mu(C_i)\mu(D_j))$: $H(\xi \vee \eta) = H(\xi) + H(\eta)$.

Te własności determinują postać wzoru na entropię rozbicia.

Entropia metryczna odwzorowania względem rozbicia

Kołmogorow-Sinaj (1958-1959)

$(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ — układ dynamiczny metryczny

$\xi = \{C_1, \ldots, C_n\}$ — rozbicie X na zbiory mierzalne

$T^{-k}(\xi) = \{T^{-k}(C_1), \ldots, T^{-k}(C_n)\}$

$\eta = \{D_1, \ldots, D_m\}$, $\xi \vee \eta = \{C_i \cap D_j, C_i \in \xi, D_j \in \eta\}$

$\xi^n = \xi \vee T^{-1}(\xi) \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}(\xi)$

$H(T^{-k}(\xi)) = H(\xi)$ oraz $H(\xi^{m+n}) \leq H(\xi^m) + H(\xi^n)$

Ciąg entropii $H(\xi^n)$ jest podaddytywny, zatem istnieje

$$h(T, \xi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\xi^n) = \inf_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\xi^n)$$

Interpretacja: graniczny średni przyrost informacji uzyskanej w jednym kroku ewolucji

Entropia metryczna (teorio-miarowa)

$(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ — układ dynamiczny metryczny

$$h_\mu(T) = \sup\{h(T, \xi) : \xi \text{ – skończone mierzalne rozbicie } X\}$$

$$h_\mu(T) \in [0, \infty]$$

Jeśli dwa układy metryczne $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ i $(Y, \mathcal{A}, S, \nu)$ są izomorficzne, to $h_\mu(T) = h_\nu(S)$

Przesunięcie Bernoulli'ego (entropia metryczna)

$\Sigma_m = \{0, \dots, m-1\}^{\mathbb{N}}$, $\sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m$, $(\sigma(x))_n = x_{n+1}$

$p = (p_0, \dots, p_{m-1})$, $\sum_{i=0}^{m-1} p_i = 1$; μ_p miara produktowa na Σ_m

$\xi = \{[.i], i = 1, \dots, m\}$ — rozbicie generujące

$$h_{\mu_p}(\sigma) = H(\xi) = -\sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i$$

Największa entropia $h_{\mu_p}(\sigma) = \log m$ dla $p = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right)$

Przykłady

Ornstein (1970): dwa układy Bernoulli'ego są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe entropie.

Na przykład przesunięcia Bernoulliego z wagami $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i z wagami $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ nie są izomorficzne, bo mają różne entropie ($\log 2$ i $\log 3$).

Przesunięcia Bernoulliego z wagami $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ i z wagami $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ są izomorficzne, bo mają entropię $2 \log 2$.

Entropia topologiczna

Entropia pokrycia

(X, d) — zwarta przestrzeń metryczna

$\mathcal{U}, \mathcal{V}$ — otwarte pokrycia X

$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \{U \cap V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$

$N(\mathcal{U})$ — minimalna liczba elementów skończonego podpokrycia $\mathcal{U}$

$$H(\mathcal{U}) = \log N(\mathcal{U}) = -N(\mathcal{U}) \frac{1}{N(\mathcal{U})} \log \frac{1}{N(\mathcal{U})}$$

Entropia topologiczna

Adler-Konheim-McAndrew (1965)

$T\colon X \to X$ — ciągłe odwzorowanie

$\mathcal{U}$ — otwarte pokrycie X

$T^{-1}(\mathcal{U}) = \{T^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}, \quad N(T^{-1}(\mathcal{U})) \leq N(\mathcal{U})$

$$\mathcal{U}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})$$

$$h(T,\mathcal{U}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{U}^n)$$

$$h(T) = \sup\{h(T,\mathcal{U}) : \mathcal{U} \ \text{– otwarte pokrycie } X\}$$

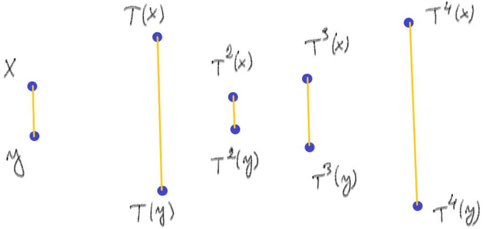
Entropia topologiczna

Dinaburg (1970), Bowen (1971)

$$d_n(x, y) = \max_{0 \le k \le n-1} d(T^k(x), T^k(y))$$

$d_1 = d$

$\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ są równoważnymi metrykami na X



d_n jest odległością pomiędzy segmentami orbit x i y

Entropia topologiczna

$N(T, r, n)$ — maksymalna liczba segmentów orbit długości n, które są odróżnialne z dokładnością do r

Rozważamy wykładniczą prędkość wzrostu $N(T, r, n)$:

$$h(T, r) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N(T, r, n)$$

$$h(T) = \lim_{r \to 0} h(T, r)$$

Jeśli (X_1, d_1), (X_2, d_2) są przestrzeniami metrycznymi zwartymi, $T\colon X \to X$, $S\colon Y \to Y$ są sprzężone topologicznie, to $h(T) = h(S)$.

Przykłady

- Niech $T\colon X \to X$ będzie izometrią (na przykład obrotem na okręgu). Wówczas
$$h(T) = 0$$
- Przesunięcie Bernoulliego
$\Sigma_m = \{0, \dots, m-1\}^{\mathbb{N}}$, $\sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m$, $(\sigma(x))_n = x_{n+1}$
$$h(\sigma) = \log m$$

Związek między entropią metryczną a topologiczną

Twierdzenie (Kryłow-Bogolubow (1937))

Każdy homeomorfizm T zwartej przestrzeni metrycznej X posiada probabilistyczną borelowską miarę niezmienniczą.

Niech $\mathcal{M}_T(X)$ — zbiór wszystkich probabilistycznych borelowskich miar niezmienniczych dla T.

Dla każdej $\mu \in \mathcal{M}(T)$: $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ — układ teorio-miarowy.

Twierdzenie (Zasada waryacyjna (Goodwyn, Dinaburg, Goodman, 1969-1971))

Niech T — homeomorfizm zwartej przestrzeni metrycznej X. Wtedy

$$h(T) = \sup\{h_\mu(T) : \mu \in \mathcal{M}_T(X)\}$$

Chaos deterministyczny

Chaos: duża wrażliwość na dowolnie małe zaburzenie warunków początkowych.

Edward Lorenz (1963): modele prognozowania pogody (niewielka zmiana w jednym z punktów atmosfery może być przyczyną wielkich zmian w innym jej obszarze).

"Efekt motyla": "Nawet ruch skrzydeł motyla w Singapurze może wywołać burzę nad Karoliną Północną w USA".

Znikoma różnica może po dłuższym czasie urosnąć do dowolnie dużych rozmiarów. Model deterministyczny w dłuższej skali czasowej wydaje się zachowywać w sposób losowy.

Chaos Li-Yorke'a

Li, York (1975): chaotyczne odwzorowania odcinka

(X, T) topologiczny układ dynamiczny: (X, ρ) zwarta przestrzeń metryczna, $T\colon X \to X$ odwzorowanie surjektywne i ciągłe.

(X, T) jest chaotyczny w sensie Li-Yorke'a, jeżeli istnieje nieprzeliczalnzy podzbiór $Y \subset X$ taki, że dla każdych $x, y \in Y$:

$$\limsup_{n\to\infty}(T^n(x), T^n(y)) = \delta > 0 \wedge \liminf_{n\to\infty}(T^n(x), T^n(y)) = 0.$$

Blanchard-Glasner-Kolyada-Maas (2001):
dodatnia entropia topologiczna $\Longrightarrow$ chaos Li–Yorke'a

Dziękuję za uwagę!