Michał Szostakiewicz
i
Wojskowa Akademia Techniczna

mają zaszczyt zaprosić Państwa na gawędę pod tytułem:

Fraktale

Od IFSów do Mandelbrota

AMGD VIII.XXVI.MMXXII

Czemu (i czy aby na pewno) “ahistorycznie”?

- IFSy (Iterated Function Systems) to klasa “fraktalnych” zbiorów, których formalna definicja pojawiła się dopiero w 1981 roku w książce Hutchinsona
    - przykładami IFSów są jednak znane i ważne (choćby z punktu widzenia topologii czy teorii mnogości) zbiory takie jak zbiór Cantora (1883/1875) czy trójkąt/dywan Sierpińskiego (1915)
- (prosta) konstrukcja zbioru Mandelbrota (ur. 1924 Warszawa, zm. 2010 Cambridge) została niego opublikowana w 1982 roku
    - kwestia autorstwa tej konstrukcji była przedmiotem sporu, podobno w 1979 roku John Hubbard podczas odwiedzin w IBM pokazał Mandelbrotowi, jak zaprogramować coś co rok później znane było jako zbiór Mandelbrota
    - do definicji zbioru $\mathcal{M}$ używa się pojęcia zbioru Julii, który razem z Fatou, którzy na przełomie XIX i XX wieku rozwijali dział matematyki nazywany dziś dynamiką holomorficzną

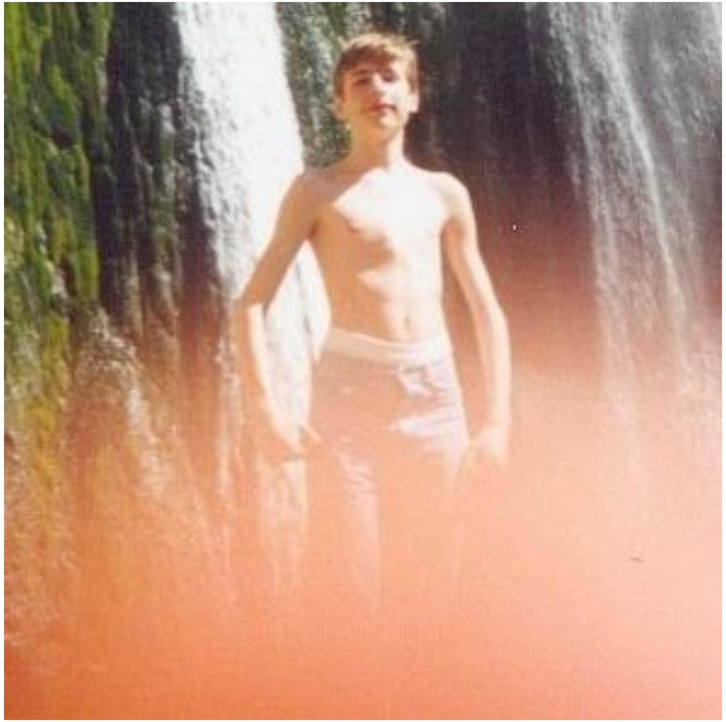
Gaston Julia (i Gustaw Herglotz)

Skąd zatem ten tytuł?

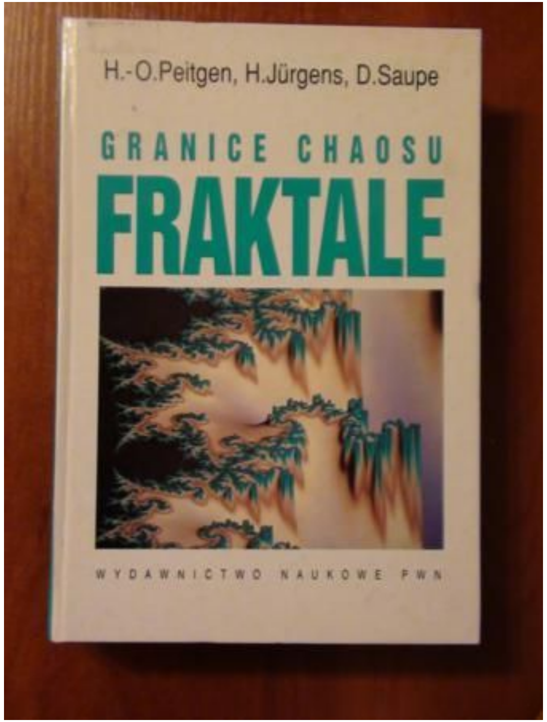
“Kierunek implikacji” w tytule odpowiada ni mniej ni więcej tylko historii… mojej.

“Historia lokalna”

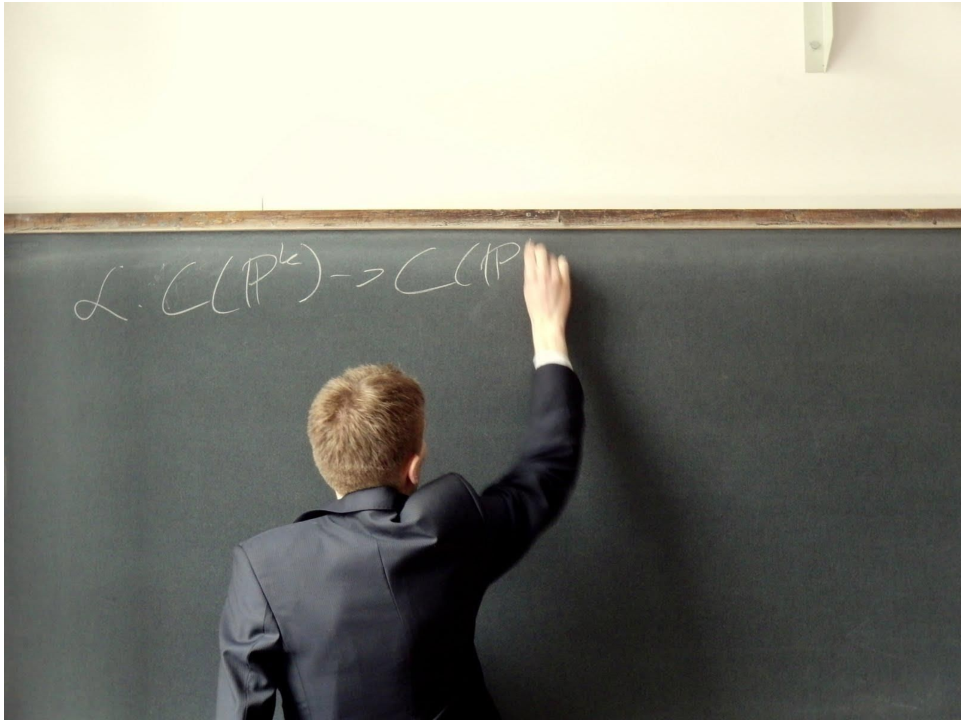
“Historia lokalna”



“Historia lokalna”



“Historia lokalna”



Co to jest fraktal?

Co to jest fraktal?

Słownik języka polskiego PWN*

fraktal «figura geometryczna, której małe fragmenty oglądane w powiększeniu wyglądają tak samo jak cała figura»

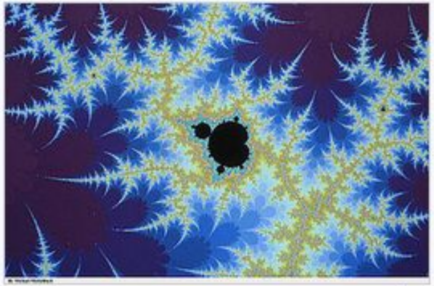
• fraktalny

Co to jest fraktal?

Fraktal [edytuj]

Fraktal (łac. *fractus* – złamany, cząstkowy, ułamkowy) w znaczeniu potocznym oznacza zwykle obiekt samopodobny (tzn. taki, którego części są podobne do całości)[1] albo „nieskończenie złożony" (ukazujący coraz bardziej złożone detale w dowolnie wielkim powiększeniu). Ze względu na olbrzymią różnorodność przykładów matematycy obecnie unikają podawania ścisłej definicji i proponują określać fraktal jako zbiór, który posiada wszystkie poniższe charakterystyki albo przynajmniej ich większość[2]:

- ma nietrywialną strukturę w każdej skali,
- struktura ta nie daje się łatwo opisać w języku tradycyjnej geometrii euklidesowej,
- jest samopodobny, jeśli nie w sensie dokładnym, to przybliżonym lub stochastycznym,
- jego wymiar Hausdorffa jest większy niż jego wymiar topologiczny,
- ma względnie prostą definicję rekurencyjną,
- ma *naturalny* („poszarpany", „kłębiasty" itp.) wygląd.

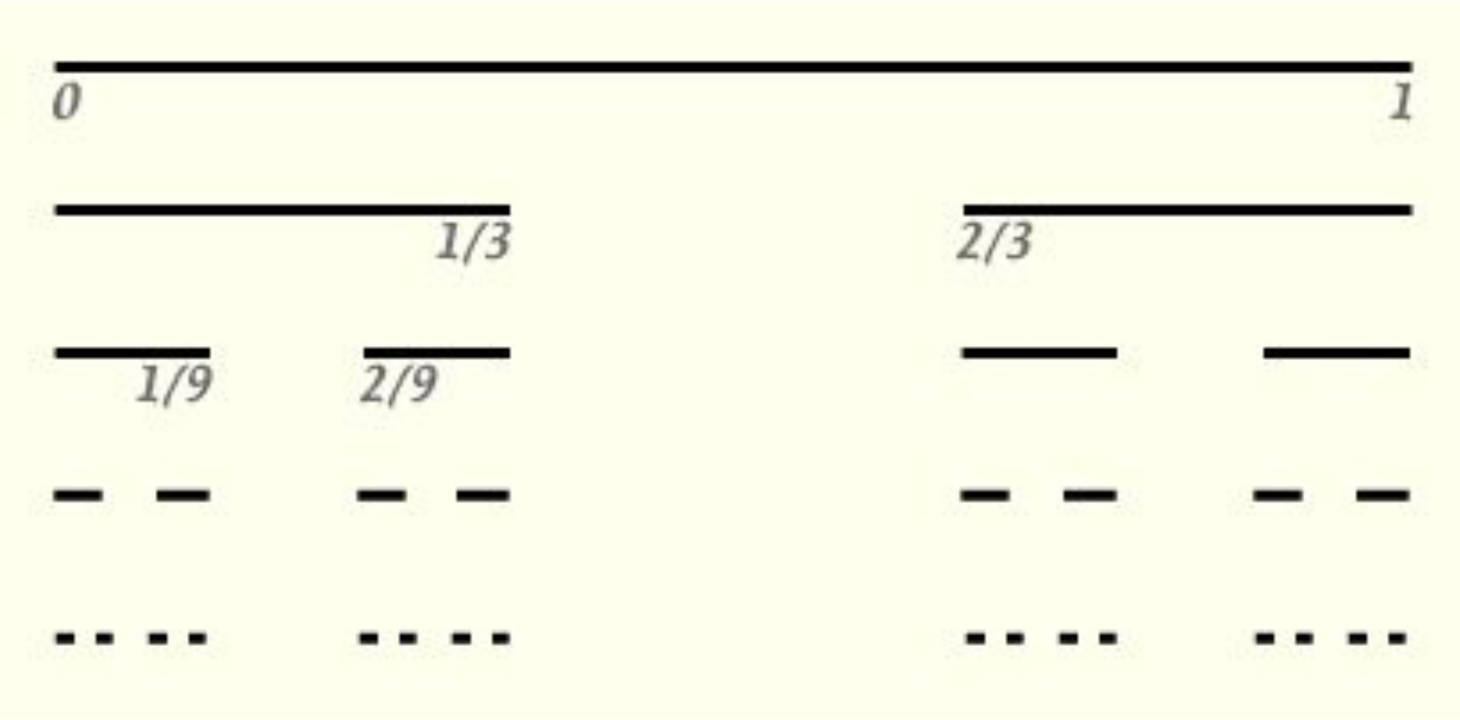


Fraktal

Historia [edytuj | edytuj kod]

Pojęcie fraktala zostało wprowadzone do matematyki przez Benoît Mandelbrota w latach 70. XX wieku.

Przykład pierwszy: zbiór Cantora (i jego wymiary)



Wymiar topologiczny (mały, Mengera-Uryhsona)

Niech X będzie przestrzenią regularną. Mały wymiar indukcyjny przestrzeni X oznaczany symbolem $\operatorname{ind} X$. Mały wymiar indukcyjny jest liczbą całkowitą nie mniejszą od −1 lub nieskończonością. Określa się go za pomocą indukcyjnej definicji, wyrażonej w poniższych czterech warunkach:

(MU1) $\operatorname{ind} X = -1 \iff X = \varnothing$

(MU2) $\operatorname{ind} X \leqslant n$ (dla $n \geqslant 0$), jeśli dla każdego punktu $x \in X$ oraz jego dowolnego otoczenia $V \subseteq X$ istnieje zbiór otwarty $U \subseteq X$ taki, że $x \in U \subseteq V$ oraz $\operatorname{ind} \partial U \leqslant n - 1$

(MU3) $\operatorname{ind} X = n$, gdy $\operatorname{ind} X \leqslant n$ oraz nie zachodzi $\operatorname{ind} X \leqslant n - 1$

(MU4) $\operatorname{ind} X = \infty$, gdy dla żadnego $n = -1, 0, 1, \ldots$ nie jest prawdą, że $\operatorname{ind} X \leqslant n$.

Zbiór Cantora i jego wymiar topologiczny

1. Zbiór Cantora ma (przeliczalną) bazę topologii, złożoną ze “podzbiorów Cantora”, które są zbiorami otwarto-domkniętymi.
2. Wynika z tego, że każdy punkt zbioru Cantora ma “dowolnie małe” otoczenie otwarto-domknięte.
3. Brzegiem zbiorów otwarto-domkniętych jest zbiór pusty.
4. Z tego zaś wynika, że zbiór Cantora ma wymiar topologiczny równy 0!

Wymiar pudełkowy (Kołmogorowa)

Wymiarem pudełkowym d zbioru A nazywamy granicę

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)},$$

gdzie N(ε) to najmniejsza liczba zbiorów o średnicy ε, potrzebna do pokrycia zbioru A

Wymiar pudełkowy zbioru Cantora

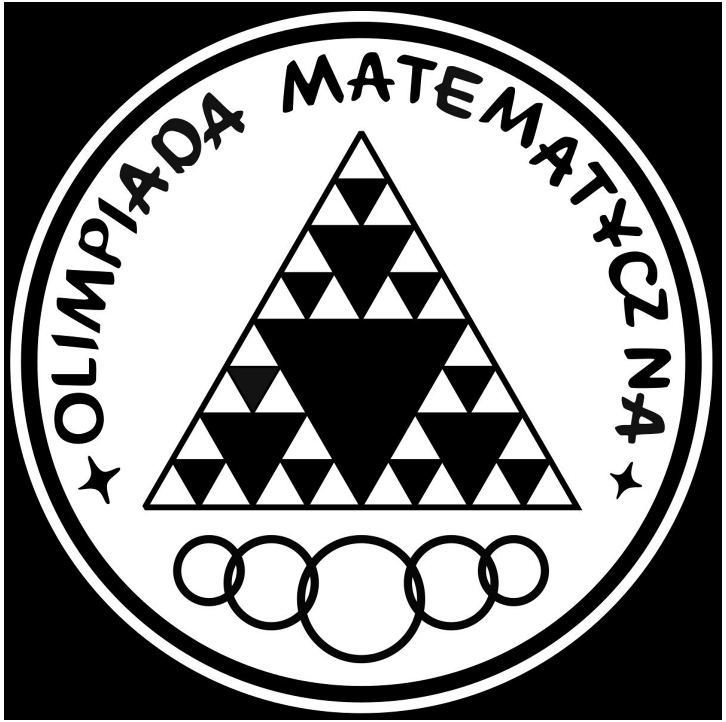
Zbiór Cantora dla dowolnej liczby naturalnej *n* w naturalny sposób rozbija się na 2^n podzbiorów o średnicy $1/3^n$.

Łatwo zatem widać, że jego wymiar pudełkowy wynosi

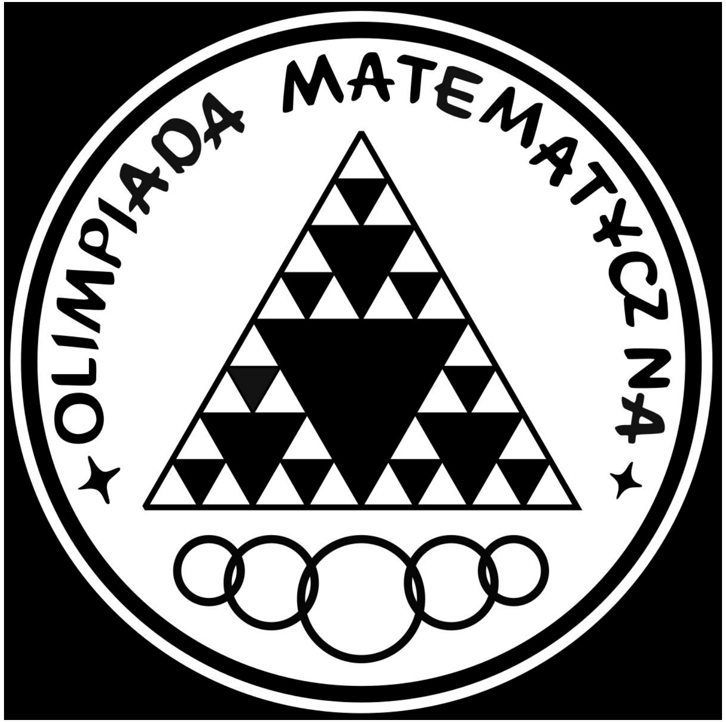
$$d = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log 2^n}{\log\left(1/(\frac{1}{3})^n\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n \log 2}{n \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Oczywiście $0 < d < 1$, więc wymiar pudełkowy jest niecałkowity i większy od wymiaru topologicznego.

Przykład drugi: trójkąt Sierpińskiego



Przykład drugi: trójkąt Sierpińskiego



Wymiar topologiczny jest równy 1

Wymiar pudełkowy to $$d = \frac{\log 3}{\log 2}$$

Oczywiście $1<d<2$.

Przykład trzeci: krzywa Kocha

sidérer comme positif le côté laissé à gauche quand on parcourt le segment dans le sens positif. Pour abréger, nous désignons par Ω cette opération au moyen de laquelle on passe d'un segment rectiligne AB à la ligne polygonale $ACDEB$ déviant de AB vers le côté positif.

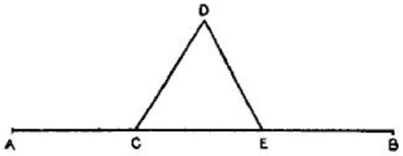


Fig. 1.

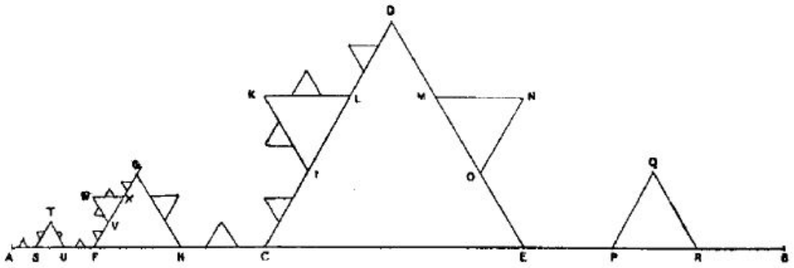


Fig. 2.

Oryginalna konstrukcja Kocha

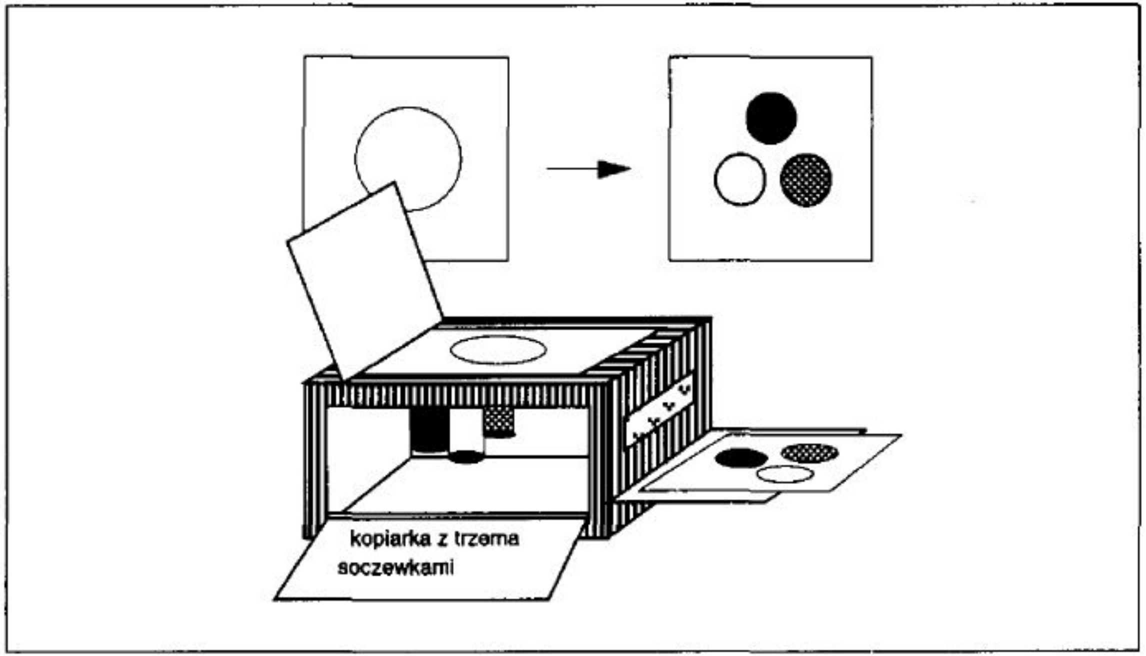
przy próbach dogłębnego zrozumienia pojęć podstawowych (takich jak np. „ciągłość” czy „krzywa”). Zbiór Cantora, dywan Sierpińskiego i gąbka Mengera są szczególnie ważnymi przykładami dzięki ich głębokim korzeniom i podstawowej roli, jaką odegrały w rozwoju wczesnej topologii.

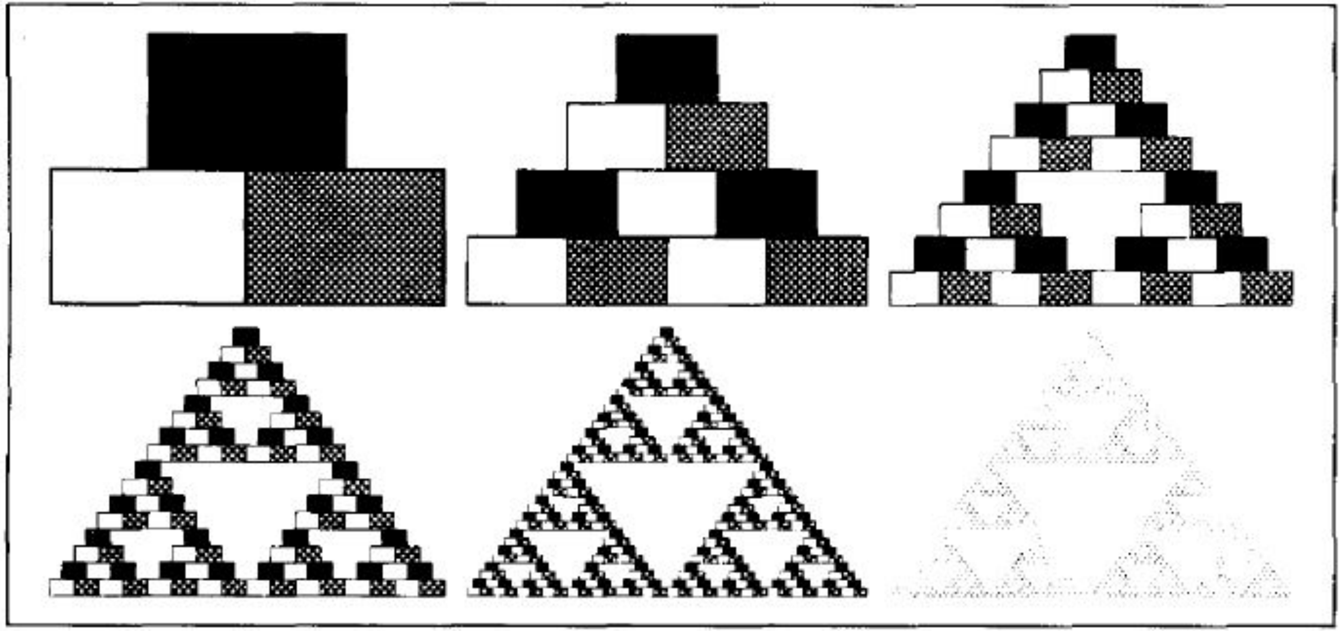
Wynaturzenie czy typowość?

Nawet w kręgach matematyków ich głębokie znaczenie się nieco zatraciło — nie były one postrzegane jako kształty typowe, a raczej jako kształty przejawiające odchylenia od normalnych struktur. Mandelbrot udowodnił później, że te „wczesne” matematyczne fraktale mają wiele cech wspólnych z kształtami, które można znaleźć w naturze. Stąd wziął się tytuł jego książki, opublikowanej w 1982 r., *The Fractal Geometry of Nature* (*Fraktalna geometria natury*).[1] Możemy zatem powiedzieć, że Mandelbrot odwrócił oficjalną interpretację i ocenę tych fantastycznych obiektów do góry nogami. W rzeczywistości zrobił on o wiele więcej. Takie struktury jak zbiór Cantora istniały już wcześniej. Ale to Mandelbrot stworzył język, który umożliwił integrację wszy-

Pierwsze uogólnienie: od Cantora i Sierpińskiego do IFSów

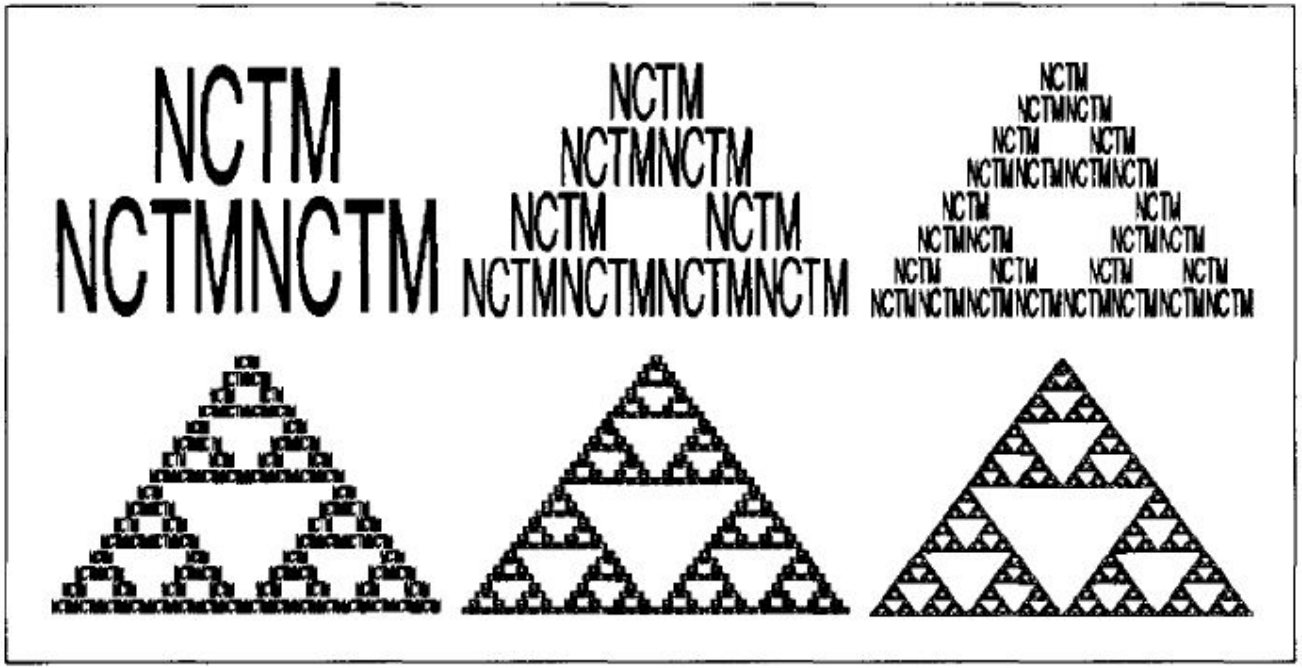
Kopiarka wielokrotnie redukująca





Prostokąt pod działaniem KWR

Działanie KWR na skrót „NCTM” oraz na inne kształty



Czas na prawdziwą matematykę!!!

Metryka Hausdorffa dla miłośników definicji

Definicja [edytuj | edytuj kod]

Niech (X, d) będzie dowolną przestrzenią metryczną zupełną, a $H(X)$ przestrzenią, której elementami są zwarte i niepuste podzbiory przestrzeni X. Niech A i B będą elementami przestrzeni $H(X)$, a x, y elementami przestrzeni X, przy czym $x \in A, y \in B$. Wyrażenia:

$$\delta(x, B) = \inf\{d(x, y) \colon y \in B\}$$
$$\delta(y, A) = \inf\{d(x, y) \colon x \in A\}$$

oznaczają odpowiednio odstęp punktu x od zbioru B i odstęp punktu y od zbioru A. Z kolei wyrażenia:

$$\delta(A, B) = \sup\{\delta(x, B) \colon x \in A\}$$
$$\delta(B, A) = \sup\{\delta(y, A) \colon y \in B\}$$

oznaczają odpowiednio odstęp zbioru A od zbioru B i odstęp zbioru B od zbioru A.

Metryką Hausdorffa nazywamy funkcję $h \colon H(X) \times H(X) \to [0; \infty)$ określoną wzorem[1][2][3]:

$$h(A, B) = \max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\}$$

Metryka Hausdorffa dla ludzi (?)

- Alternatywnie, metrykę Hausdorffa można zdefiniować w języku ϵ-otoczeń. Dla danego zbioru A i $\epsilon > 0$ oznaczamy $B(x, \epsilon)$ kulę o środku x i promieniu ϵ oraz określamy

  $$A_\epsilon = \bigcup_{x \in A} B(x, \epsilon).$$

  Wówczas metrykę Hausdorffa możemy przedstawić w postaci wyrażenia:

  $$h(A, B) = \inf\{\epsilon : B \subset A_\epsilon \text{ oraz } A \subset B_\epsilon\}.$$

Ważna własność metryki Hausdorffa

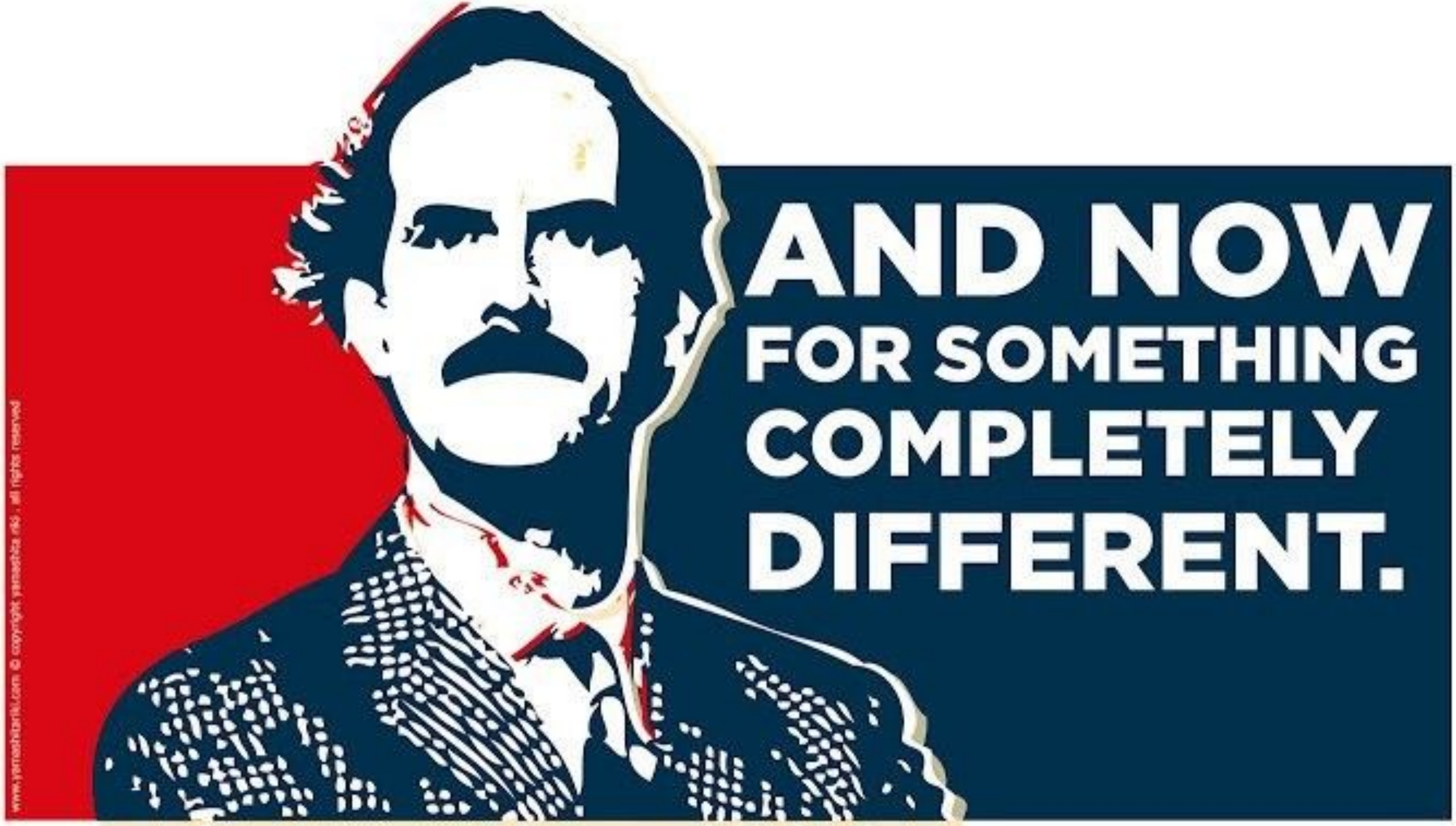
- Przestrzeń $(H(X),\, h)$, z wprowadzoną metryką Hausdorffa h jest przestrzenią metryczną zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zupełna[1][2][4].

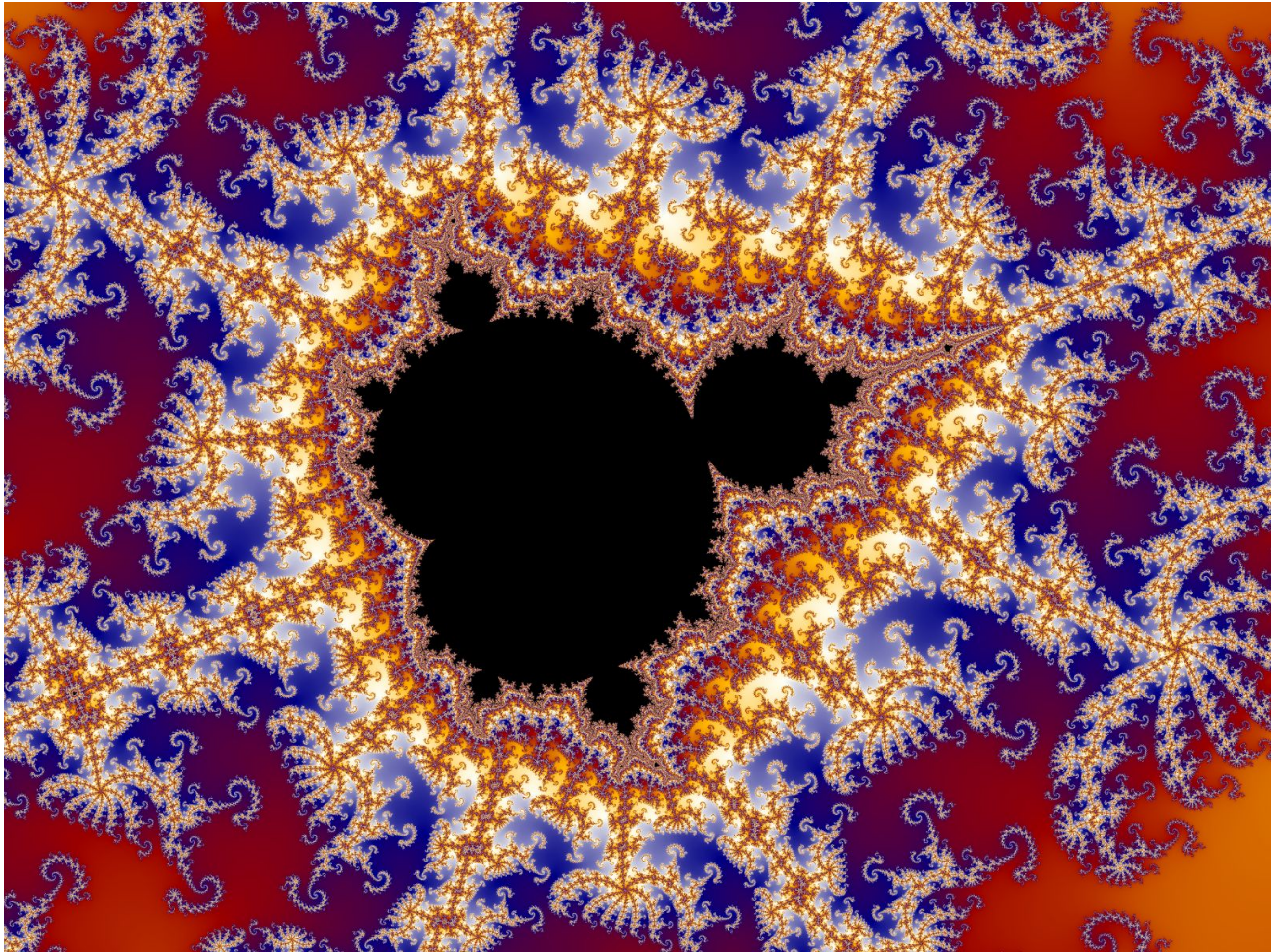
Operator Hutchinsona

- Dla dowolnej przestrzeni *X* i zbioru przekształceń f_i definiujemy operator H na zwartych podzbiorach przestrzeni X

$$H(S) = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(S).$$

- Okazuje się, że jeśli przekształcenia f są zwężające, to operator H też jest zwężający!
- Z tw. Banacha o punkcie stałym, H ma dokładnie jeden punkt stały!
- Ten operator można **uogólniać**.
  Przykładowo, zamiast podzbiorów X możemy go stosować na przestrzeni obrazów i dojść w ten sposób np. do kompresji fraktalnej.


AND NOW
FOR SOMETHING
COMPLETELY
DIFFERENT.




iteration of $z^2 + c$
complex numbers
What the hell is this?

Dynamika zespolona

Tak jak wspomniano, na przełomie XIX i XX wieku, Pierre Fatou i Gaston Julia stworzyli podstawy dziedziny matematyki, którą dziś nazywamy dynamiką zespoloną.

Motywacje do jej rozwijania znajdziemy m.in. w analizie numerycznej (metody iteracyjne, np. metoda Netwona), ale dziś jest to już zupełnie niezależna działka aktywności matematycznej, będąca częścią jej gałęzi, określanej jako *układy dynamiczne*.

Układy dynamiczne

Niech $T: X \to X$ będzie endomorfizmem przestrzeni X.

Iteracje T^n dla n naturalnych tworzą półgrupę z operatorem składania przekształceń $\circ$.
Jeśli T jest odwracalne, to możemy rozważać grupę T^i dla dowolnych i całkowitych.

Szczególnie będą nas interesowały *orbity* punktów $x \in X$, czyli ciągi punktów $T^n(x)$ oraz ich własności (przede wszystkim zbieżność).

Przykład (bardzo) prosty i (bardzo) ważny

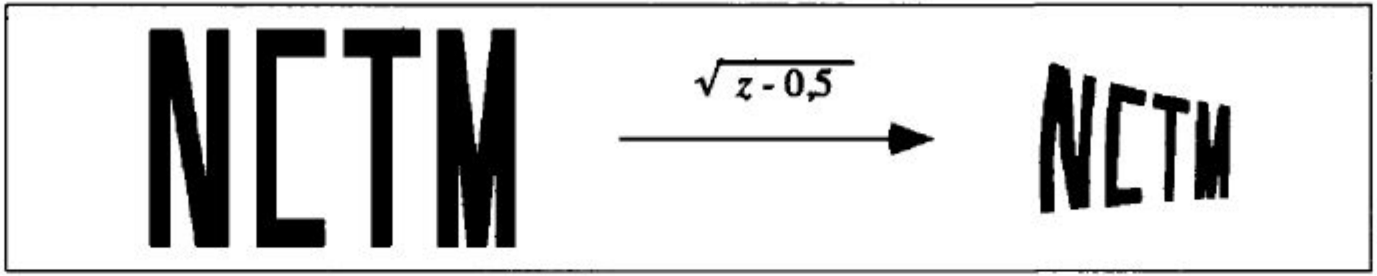
$$f(z)=z^2$$

A co jeśli zaburzymy nieco funkcję f?

A co z wymiarami?

A gdzie IFSy?

Przekształcenie nieliniowe



Jak to jeszcze dalej uogólnić?

Sfera Riemanna -> Przestrzeń rzutowa CP1 -> CPk