Tetracje

Karol Gryszka

Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagigoczny w Krakowie

LXV SMP, 27 sierpnia 2022

Zadanie

Która liczba jest większa?

Zadanie

Która liczba jest większa?

$$2 + 10 + 8 + 14 + 7 \qquad \text{czy} \qquad 4 + 9 + 7 + 10 + 2?$$

Zadanie

Która liczba jest większa?

$$2 + 10 + 8 + 14 + 7 \qquad \text{czy} \qquad 4 + 9 + 7 + 10 + 2?$$

Można liczby do siebie dodać, ale można też... odejmować:

$$2 - 4 \qquad 10 - 9 \qquad 8 - 7 \qquad 14 - 10 \qquad 7 - 2.$$

Zadanie

Która liczba jest większa?

Zadanie

Która liczba jest większa?

$$2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 14 \cdot 7 \qquad \text{czy} \qquad 4 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 2?$$

Zadanie

Która liczba jest większa?

$$2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 14 \cdot 7 \qquad \text{czy} \qquad 4 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 2?$$

Można liczby mnożyć, ale można też... dzielić:

$$\frac{2}{4} \qquad \frac{10}{9} \qquad \frac{8}{7} \qquad \frac{14}{10} \qquad \frac{7}{2}.$$

Zadanie

Która liczba jest większa?

Zadanie

Która liczba jest większa?

$$2^{10^{8^{14^{7}}}} \qquad \text{czy} \qquad 4^{9^{7^{10^{2}}}}\ ?$$

Zadanie

Która liczba jest większa?

$$2^{10^{8^{14^{7}}}} \qquad \text{czy} \qquad 4^{9^{7^{10^{2}}}}\ ?$$

Można policzyć...

Zadanie

Która liczba jest większa?

$$2^{10^{8^{14^7}}} \qquad \text{czy} \qquad 4^{9^{7^{10^2}}}\ ?$$

Można policzyć... w wolframie:

$$10^{10^{10^{10^{7.97\ldots}}}} \qquad 10^{10^{10^{84.489\ldots}}}$$

Zadanie

Która liczba jest większa?

$$2^{10^{8^{14^{7}}}} \qquad \text{czy} \qquad 4^{9^{7^{10^{2}}}}?$$

Można policzyć... w wolframie:

$$10^{10^{10^{10^{7.97\ldots}}}} \qquad 10^{10^{10^{84.489\ldots}}}$$

Ale można też logarytmować.

Zadanie

Która liczba jest większa?

$$2^{10^{8^{14^7}}} \qquad \text{czy} \qquad 4^{9^{7^{10^2}}}\ ?$$

Można policzyć... w wolframie:

$$10^{10^{10^{10^{7.97\ldots}}}} \qquad 10^{10^{10^{84.489\ldots}}}$$

Ale można też logarytmować. Prawda?

Zadanie

Która z podanych liczb jest największa?

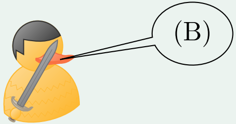
$$(A)\ \left.9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9^9}}}}}\right\}\times 19, \qquad (B)\ \left.7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7^7}}}}}\right\}\times 21, \qquad (C)\ \left.9!^{9!^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9!^{9!}}}}}}\right\}\times 16.$$

Zadanie

Która z podanych liczb jest największa?

$$(A)\ \left.9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9^9}}}}}\right\}\times 19, \qquad (B)\ \left.7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7^7}}}}}\right\}\times 21, \qquad (C)\ \left.9!^{9!^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9!^{9!}}}}}}\right\}\times 16.$$

Odpowiedź:

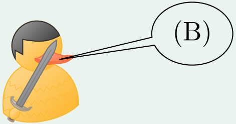


Zadanie

Która z podanych liczb jest największa?

$$(A)\ \ \left.9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9^9}}}}}\right\}\times 19, \qquad (B)\ \ \left.7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7^7}}}}}\right\}\times 21, \qquad (C)\ \ \left.9!^{9!^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9!^{9!}}}}}}\right\}\times 16.$$

Odpowiedź:



Zaskoczeni?

Czym są tetracje?

Tetracja to uogólnienie potęgowania. Ale zacznijmy od początku:

1. Pierwsza standardowa operacja to dodawanie:

$$x + n = x + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\times n},$$

Czym są tetracje?

Tetracja to uogólnienie potęgowania. Ale zacznijmy od początku:

1. Pierwsza standardowa operacja to dodawanie:

$$x + n = x + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\times n},$$

2. Druga standardowa operacja to mnożenie:

$$x \cdot n = \underbrace{x + \cdots + x}_{\times n},$$

Czym są tetracje?

Tetracja to uogólnienie potęgowania. Ale zacznijmy od początku:

1. Pierwsza standardowa operacja to dodawanie:

$$x + n = x + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\times n},$$

2. Druga standardowa operacja to mnożenie:

$$x \cdot n = \underbrace{x + \cdots + x}_{\times n},$$

3. Trzecia standardowa operacja to potęgowanie:

$$x^n = \underbrace{x \cdots x}_{\times n},$$

Czym są tetracje?

Tetracja to uogólnienie potęgowania. Ale zacznijmy od początku:

1. Pierwsza standardowa operacja to dodawanie:
$$x + n = x + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\times n},$$
2. Druga standardowa operacja to mnożenie:
$$x \cdot n = \underbrace{x + \cdots + x}_{\times n},$$
3. Trzecia standardowa operacja to potęgowanie:
$$x^n = \underbrace{x \cdots x}_{\times n},$$
4. Czwarta standardowa operacja to...

Czym są tetracje?

Tetracja to uogólnienie potęgowania. Ale zacznijmy od początku:

1. Pierwsza standardowa operacja to dodawanie:
$$x + n = x + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\times n},$$
2. Druga standardowa operacja to mnożenie:
$$x \cdot n = \underbrace{x + \cdots + x}_{\times n},$$
3. Trzecia standardowa operacja to potęgowanie:
$$x^n = \underbrace{x \cdots x}_{\times n},$$
4. Czwarta standardowa operacja to...

Czym są tetracje?

Tetracja to uogólnienie potęgowania. Ale zacznijmy od początku:

1. Pierwsza standardowa operacja to dodawanie:
$$x + n = x + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\times n},$$
2. Druga standardowa operacja to mnożenie:
$$x \cdot n = \underbrace{x + \cdots + x}_{\times n},$$
3. Trzecia standardowa operacja to potęgowanie:
$$x^n = \underbrace{x \cdots x}_{\times n},$$
4. Czwarta standardowa operacja to... tetracja:
$${}^{n}x = x \uparrow\uparrow n = \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x^{x}}}}}}}_{\times n}$$

Formalna definicja tetracji

$$x \uparrow\uparrow n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ x^{x \uparrow\uparrow (n-1)}, & n > 0. \end{cases}$$

Formalna definicja tetracji

$$x \uparrow\uparrow n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ x^{x \uparrow\uparrow (n-1)}, & n > 0. \end{cases}$$

Uwaga!

Tetracje uogólnia się na przypadek, gdy n jest liczbą niecałkowitą(!) (nie w tym wykładzie)

Króciutko o pentacjach

Pentacje to uogólnienia...

Króciutko o pentacjach

Pentacje to uogólnienia...tetracji:

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\ldots \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow a) \ldots))}_{b \text{ wystąpień liczby } a}$$

Na przykład:

Króciutko o pentacjach

Pentacje to uogólnienia...tetracji:

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\ldots \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow a) \ldots))}_{b \text{ wystąpień liczby } a}$$

Na przykład:

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2))) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{2\uparrow\uparrow 4 \text{ dwójek}} = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{65536 \text{ dwójek}}$$

Króciutko o pentacjach

Pentacje to uogólnienia...tetracji:

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\ldots \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow a) \ldots))}_{b \text{ wystąpień liczby } a}$$

Na przykład:

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2))) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{2\uparrow\uparrow 4 \text{ dwójek}} = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{65536 \text{ dwójek}}$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 5 =$$

Króciutko o pentacjach

Pentacje to uogólnienia...tetracji:

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\ldots \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow a) \ldots))}_{b \text{ wystąpień liczby } a}$$

Na przykład:

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2))) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{2\uparrow\uparrow 4 \text{ dwójek}} = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{65536 \text{ dwójek}}$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 5 = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{\underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{65536 \text{ dwójek}}}$$

Króciutko o pentacjach

Pentacje to uogólnienia...tetracji:

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\ldots \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow a)\ldots))}_{b \text{ wystąpień liczby } a}$$

Na przykład:

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2))) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{2\uparrow\uparrow 4 \text{ dwójek}} = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{65536 \text{ dwójek}}$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 5 = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{\underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{65536 \text{ dwójek}}} \qquad 2 \uparrow\uparrow\uparrow 6 =$$

Króciutko o pentacjach

Pentacje to uogólnienia...tetracji:

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\ldots \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow a)\ldots))}_{b \text{ wystąpień liczby } a}$$

Na przykład:

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2))) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{2\uparrow\uparrow 4 \text{ dwójek}} = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{65536 \text{ dwójek}}$$

$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 5 = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{\underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{65536 \text{ dwójek}}} \qquad 2 \uparrow\uparrow\uparrow 6 = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{\underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{\underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{65536 \text{ dwójek}}}}$$

Wracamy do zadania...

Która z podanych liczb jest największa?

$$\left.9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9^9}}}}}\right\}\times 19, \qquad \left.7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7^7}}}}}\right\}\times 21, \qquad \left.9!^{9!^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9!^{9!}}}}}}\right\}\times 16.$$

Garść oznaczeń

Niech $n \in \mathbb{N}, n > 0$ oraz $a, b > 1$. Definiujemy następujące operacje:

Garść oznaczeń

Niech $n \in \mathbb{N}, n > 0$ oraz $a, b > 1$. Definiujemy następujące operacje:

$$a \uparrow b = a^b,$$
$$E_n(a,b) = (a\uparrow)^n b = \begin{cases} b, & n = 0, \\ a \uparrow (a\uparrow)^{n-1} b, & n > 0. \end{cases}$$

Garść oznaczeń

Niech $n \in \mathbb{N}, n > 0$ oraz $a, b > 1$. Definiujemy następujące operacje:

$$a \uparrow b = a^b,$$
$$E_n(a,b) = (a\uparrow)^n b = \begin{cases} b, & n = 0, \\ a \uparrow (a\uparrow)^{n-1} b, & n > 0. \end{cases}$$

W szczególności

$$E_{n-1}(a,a) = (a\uparrow)^{n-1} a = a \uparrow\uparrow n.$$

Garść oznaczeń

Niech $n \in \mathbb{N}, n > 0$ oraz $a, b > 1$. Definiujemy następujące operacje:

$$a \uparrow b = a^b,$$
$$E_n(a,b) = (a \uparrow)^n b = \begin{cases} b, & n = 0, \\ a \uparrow (a \uparrow)^{n-1} b, & n > 0. \end{cases}$$

W szczególności

$$E_{n-1}(a,a) = (a \uparrow)^{n-1} a = a \uparrow\uparrow n.$$

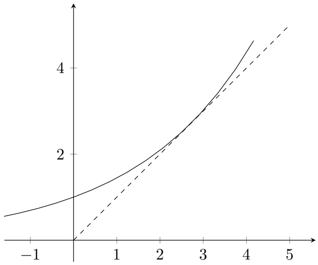
Używamy notacji typu potęgowanie do upraszczania długich łańcuchów strzałek, na przyład:

$$a \uparrow a \uparrow a \uparrow b \uparrow b \uparrow c = (a \uparrow)^3 (b \uparrow)^2 c.$$

Obszar badawczy I

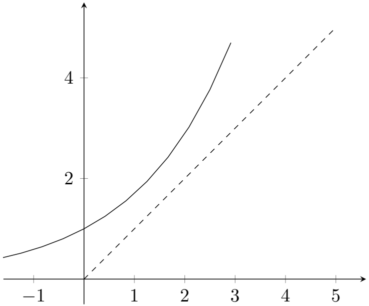
Przypomnimy własności funkcji $x \mapsto z^x$ gdzie $z > 1$ jest ustalone oraz $x > 0$.

- Jest to funkcja rosnąca dla dowolnego $z > 1$.
- Jeśli $z = e^{1/e}$, to wykres funkcji jest styczny do prostej $y = x$ w punkcie $x = e$ (Rysunek 1).
- Jeśli $z > e^{1/e}$, to funkcja $x \mapsto z^x$ spełnia własność $z^x > x$ (Rysunek 2).



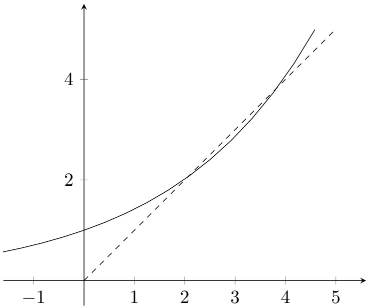
Rysunek 1: Przypadek $z = e^{1/e}$.

Obszar badawczy II



Rysunek 2: Przypadek $z > e^{1/e}$.

Obszar badawczy III



Rysunek 3: Przypadek $z < e^{1/e}$.

Obszar badawczy IV

Te obserwacje oznaczają, że jeśli $a > e^{1/e}$, to ciąg $(E_n(a,x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący (a nawet $E_n(a,x) \to +\infty$).
Niech $1 < z \leqslant e^{1/e}$. Wykres $x \mapsto z^x$ przecina wykres funkcji identycznościowej w co najwyżej dwóch punktach (Rysunek 1 i Rysunek 3). Niech $y(z)$ oznacza większą z liczb x takich, że $z^x = x$.
Jeśli $x > y(z)$, to $z^x > x$. Wtedy, ciąg $(E_n(a,x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący dla $1 < a \leqslant e^{1/e}$ i $x > y(a)$.
Powyższe rozważania prowadzą do opisania nastepującego obszaru „rozbieżności iterowanego potęgowania”:

$$D = \{(a,x) \in \mathbb{R}^2 \mid a > e^{1/e} \text{ lub } 1 < a \leqslant e^{1/e} \text{ i } x > y(a)\}.$$

W szczególności:

$$(a,x) \in D \implies E_n(a,x) \nearrow +\infty.$$

Jeszcze jedna motywacja, dygresja i ciekawostka...

Jeszcze jedna motywacja, dygresja i ciekawostka...

Przykład 1.

Znaleźć takie b, że $b^{b^{b^{\cdots}}} = 4$.

Jeszcze jedna motywacja, dygresja i ciekawostka...

Przykład 1.

Znaleźć takie b, że $b^{b^{b^{\cdots}}} = 4$.

Rozwiązanie: Niech $x = b^{b^{b^{\cdots}}}$. Wtedy $x = 4$, czyli $x = b^x = b^4 = 4$; $b = \sqrt{2}$.

Jeszcze jedna motywacja, dygresja i ciekawostka...

Przykład 1.

Znaleźć takie b, że $b^{b^{b^{\cdots}}} = 4$.

Rozwiązanie: Niech $x = b^{b^{b^{\cdots}}}$. Wtedy $x = 4$, czyli $x = b^x = b^4 = 4$; $b = \sqrt{2}$.

Przykład 2.

Znaleźć takie a, że $a^{a^{a^{\cdots}}} = 2$.

Jeszcze jedna motywacja, dygresja i ciekawostka...

Przykład 1.

Znaleźć takie b, że $b^{b^{b^{\cdots}}} = 4$.

Rozwiązanie: Niech $x = b^{b^{b^{\cdots}}}$. Wtedy $x = 4$, czyli $x = b^x = b^4 = 4$; $b = \sqrt{2}$.

Przykład 2.

Znaleźć takie a, że $a^{a^{a^{\cdots}}} = 2$.

Rozwiązanie: Niech $x = a^{a^{a^{\cdots}}}$. Wtedy $x = 2$, czyli $x = a^x = a^2 = 2$; $a = \sqrt{2}$.

Jeszcze jedna motywacja, dygresja i ciekawostka...

Przykład 1.

Znaleźć takie b, że $b^{b^{b^{\cdots}}} = 4$.

Rozwiązanie: Niech $x = b^{b^{b^{\cdots}}}$. Wtedy $x = 4$, czyli $x = b^x = b^4 = 4$; $b = \sqrt{2}$.

Przykład 2.

Znaleźć takie a, że $a^{a^{a^{\cdots}}} = 2$.

Rozwiązanie: Niech $x = a^{a^{a^{\cdots}}}$. Wtedy $x = 2$, czyli $x = a^x = a^2 = 2$; $a = \sqrt{2}$. W szczególności $a = b$.

Jeszcze jedna motywacja, dygresja i ciekawostka...

Przykład 1.

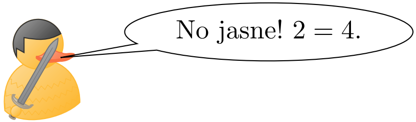
Znaleźć takie b, że $b^{b^{b^{\cdots}}} = 4$.

Rozwiązanie: Niech $x = b^{b^{b^{\cdots}}}$. Wtedy $x = 4$, czyli $x = b^x = b^4 = 4$; $b = \sqrt{2}$.

Przykład 2.

Znaleźć takie a, że $a^{a^{a^{\cdots}}} = 2$.

Rozwiązanie: Niech $x = a^{a^{a^{\cdots}}}$. Wtedy $x = 2$, czyli $x = a^x = a^2 = 2$; $a = \sqrt{2}$. W szczególności $a = b$.



Jeszcze jedna motywacja, dygresja i ciekawostka...

Twierdzenie (Euler (1778), Anderson (2004), Knoebel (1981)

Niech $a_n = a \uparrow\uparrow n$ i $f(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Wtedy $f(a)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in [e^{-e}, e^{1/e}]$, $f\colon a \mapsto f(a)$ jes rosnąca na $[e^{-e}, e^{1/e}]$ oraz $f(e^{-e}) = \frac{1}{e}$, $f(e^{1/e}) = e$. W szczególności, $f(a) = \frac{W(-\ln a)}{-\ln a}$.

Wracamy do zadania... (znowu)?

Która z podanych liczb jest największa?

$$\left.9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9^9}}}}}\right\}\times 19, \qquad \left.7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7^7}}}}}\right\}\times 21, \qquad \left.9!^{9!^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9!^{9!}}}}}}\right\}\times 16.$$

Wracamy do zadania... (znowu)?

Która z podanych liczb jest największa?

$$9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9^9}}}}}\left.\vphantom{9^{9^{9^9}}}\right\}\times 19, \qquad 7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7^7}}}}}\left.\vphantom{7^{7^{7^7}}}\right\}\times 21, \qquad 9!^{9!^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9!^{9!}}}}}}\left.\vphantom{9!^{9!^{9!^{9!}}}}\right\}\times 16.$$

Twierdzenie

Załóżmy, że $E_n(a,x)$ i $E_n(b,y)$ są określone dla pewnych $a,b>1$, $x,y>1$ oraz dla wszystkich $n\geqslant 1$. Załóżmy, że $(a,x)\in D$. Jeśli

$$y>2x\log_b a$$

oraz

$$x>\log_a(2\log_b a),$$

to

$$E_n(b,y)>E_n(a,x)$$

dla wszystkich $n\geqslant 1$.

Wracamy do zadania... (znowu)?

Która z podanych liczb jest największa?

$$9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9^9}}}}}\Bigg\}\times 19, \qquad 7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7^7}}}}}\Bigg\}\times 21, \qquad 9!^{9!^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9!^{9!}}}}}}\Bigg\}\times 16.$$

Wracamy do zadania... (znowu)?

Która z podanych liczb jest największa?

$$\left.9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9^9}}}}}\right\}\times 19, \qquad \left.7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7^7}}}}}\right\}\times 21, \qquad \left.9!^{9!^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9!^{9!}}}}}}\right\}\times 16.$$

Twierdzenie

Załóżmy, że $E_n(a,x)$ i $E_n(b,y)$ są określone dla pewnych $a,b>1$, $x,y>1$ oraz dla wszystkich $n \geqslant 1$. Załóżmy, że $(a,x) \in D$. Jeśli $y > 2x\log_b a$ oraz $x > \log_a(2\log_b a)$, to $E_n(b,y) > E_n(a,x)$ dla wszystkich $n \geqslant 1$.

Wracamy do zadania... (znowu)?

Która z podanych liczb jest największa?

$$\left.9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9^9}}}}}\right\}\times 19, \qquad \left.7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7^7}}}}}\right\}\times 21, \qquad \left.9!^{9!^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9!^{9!}}}}}}\right\}\times 16.$$

Twierdzenie

Załóżmy, że $E_n(a,x)$ i $E_n(b,y)$ są określone dla pewnych $a,b>1$, $x,y>1$ oraz dla wszystkich $n \geqslant 1$. Załóżmy, że $(a,x) \in D$. Jeśli $y > 2x \log_b a$ oraz $x > \log_a(2\log_b a)$, to $E_n(b,y) > E_n(a,x)$ dla wszystkich $n \geqslant 1$.

Porównamy pierwszą i trzecią liczbę. Przyjmujemy $n = 16-1 = 15$, $y = 9 \uparrow\uparrow 4$, $x = 9!$, $a = 9!$ oraz $b = 9$. Łatawo sprawdzić, że wszystkie założenia są spełnione, więc $9 \uparrow\uparrow 19 > 9! \uparrow\uparrow 16$.

Wracamy do zadania... (znowu)?

Która z podanych liczb jest największa?

$$9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9^9}}}}}\Bigg\}\times 19,\qquad 7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7^7}}}}}\Bigg\}\times 21,\qquad 9!^{9!^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9!^{9!}}}}}}\Bigg\}\times 16.$$

Twierdzenie

Załóżmy, że $E_n(a,x)$ i $E_n(b,y)$ są określone dla pewnych $a,b>1$, $x,y>1$ oraz dla wszystkich $n\geqslant 1$. Załóżmy, że $(a,x)\in D$. Jeśli $y>2x\log_b a$ oraz $x>\log_a(2\log_b a)$, to $E_n(b,y)>E_n(a,x)$ dla wszystkich $n\geqslant 1$.

Porównamy pierwszą i trzecią liczbę. Przyjmujemy $n=16-1=15$, $y=9\uparrow\uparrow 4$, $x=9!$, $a=9!$ oraz $b=9$. Łatawo sprawdzić, że wszystkie założenia są spełnione, więc $9\uparrow\uparrow 19>9!\uparrow\uparrow 16$. Można pokazać więcej, mianowicie:

$$9!\uparrow\uparrow n<9\uparrow\uparrow(n+1)<9!\uparrow\uparrow(n+1)$$

dla wszystkich $n\geqslant 1$.

Komentarz do założeń

Twierdzenie

Załóżmy, że $E_n(a, x)$ i $E_n(b, y)$ są określone dla pewnych $a, b > 1$, $x, y > 1$ oraz dla wszystkich $n \geqslant 1$. Załóżmy, że $(a, x) \in D$. Jeśli $y > 2x \log_b a$ oraz $x > \log_a(2 \log_b a)$, to $E_n(b, y) > E_n(a, x)$ dla wszystkich $n \geqslant 1$.

Co, gdy wszystkie wyrazy są całkowite?

Jeśli $a > b \geqslant 2$ są liczbami całkowitymi, to warunek

$$\log_a(2 \log_b a) \leqslant 1$$

nie zachodzi jedynie dla $a = 3$ and $b = 2$. W tym przypadku mamy

$$x > 1.050151 > \log_3(2 \log_2 3) > 1.05015.$$

W szczególności zatem, jeśli wszystkie wyrazy wież potęgowych są całkowite, to wystarczy sprawdzać warunek $y > 2x \log_b a$.

Uogólnienie na różne wyrazy

Niech $n \geqslant 1$, $a_1, \ldots, a_n > 1$, $b_1, \ldots, b_n > 1$, $x > 1$, $y > 1$ i oznaczmy

$$A_n(x) = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \cdots \uparrow a_n \uparrow x, \qquad B_n(y) = b_1 \uparrow b_2 \uparrow \cdots \uparrow b_n \uparrow y.$$

Uogólnienie na różne wyrazy

Niech $n \geqslant 1$, $a_1, \ldots, a_n > 1$, $b_1, \ldots, b_n > 1$, $x > 1$, $y > 1$ i oznaczmy

$$A_n(x) = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \cdots \uparrow a_n \uparrow x, \qquad B_n(y) = b_1 \uparrow b_2 \uparrow \cdots \uparrow b_n \uparrow y.$$

Twierdzenie

Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $A_n(x)$ i $B_n(y)$ są określone jak wyżej oraz zdefiniujmy

$$a := \max\{a_i \mid i = 1, \ldots, n\},$$
$$b := \min\{b_i \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

Jeśli $(a, x) \in D$, $y > 2x \log_b a$ i $x > \log_a(2 \log_b a)$, to $B_n(y) > A_n(x)$.

Przykład

$$(6 \uparrow 8 \uparrow 7 \uparrow)^7 8 \quad ? \quad (2 \uparrow 3 \uparrow 5 \uparrow 4 \uparrow 2 \uparrow)^4 \uparrow 2 \uparrow 49.$$

Przykład

$$(6 \uparrow 8 \uparrow 7 \uparrow)^7 8 \quad ? \quad (2 \uparrow 3 \uparrow 5 \uparrow 4 \uparrow 2 \uparrow)^4 \uparrow 2 \uparrow 49.$$

$$(6 \uparrow 8 \uparrow 7 \uparrow)^7 8 < (2 \uparrow 3 \uparrow 5 \uparrow 4 \uparrow 2 \uparrow)^4 \uparrow 2 \uparrow 49.$$

Przykład

$$(6\uparrow 8\uparrow 7\uparrow)^7 8 \quad ? \quad (2\uparrow 3\uparrow 5\uparrow 4\uparrow 2\uparrow)^4 \uparrow 2\uparrow 49.$$

$$(6\uparrow 8\uparrow 7\uparrow)^7 8 < (2\uparrow 3\uparrow 5\uparrow 4\uparrow 2\uparrow)^4 \uparrow 2\uparrow 49.$$

Wynika to z nierówności

$$49 > 48 = 8\cdot 2\cdot \log_2 8 \quad \text{i} \quad 8 > \log_8(2\log_2 8)$$

oraz

$$(8\uparrow)^{21} 8 < (2\uparrow)^{21} 49.$$

Inne uogólnienie - wieże okresowe

Niech $a_1 > 1, \ldots, a_k > 1$ będą liczbami rzeczywistymi. Definiujemy okresowe wieże potęgowe:

$$EP_n(a_1, \ldots, a_k) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ a_1 \uparrow \cdots \uparrow a_k \uparrow EP_{n-1}(a_1, \ldots, a_k), & n \geqslant 1. \end{cases}$$

Inne uogólnienie - wieże okresowe

Niech $a_1 > 1, \ldots, a_k > 1$ będą liczbami rzeczywistymi. Definiujemy okresowe wieże potęgowe:

$$EP_n(a_1, \ldots, a_k) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ a_1 \uparrow \cdots \uparrow a_k \uparrow EP_{n-1}(a_1, \ldots, a_k), & n \geqslant 1. \end{cases}$$

Twierdzenie

Niech $1 < a < b$. Jeśli $EP_1(a,b) > EP_1(b,a)$ (lub prościej, $a^b > b^a$), to $EP_n(a,b) > EP_n(b,a)$ dla wszystkich $n \geqslant 1$.

Inne uogólnienie - wieże okresowe

Niech $a_1 > 1, \dots, a_k > 1$ będą liczbami rzeczywistymi. Definiujemy okresowe wieże potęgowe:

$$EP_n(a_1, \dots, a_k) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ a_1 \uparrow \cdots \uparrow a_k \uparrow EP_{n-1}(a_1, \dots, a_k), & n \geqslant 1. \end{cases}$$

Twierdzenie

Niech $1 < a < b$. Jeśli $EP_1(a,b) > EP_1(b,a)$ (lub prościej, $a^b > b^a$), to $EP_n(a,b) > EP_n(b,a)$ dla wszystkich $n \geqslant 1$.

Przykład

Dla wszystkich n,

$$EP_n(e,\pi) > EP_n(\pi,e).$$

Wynika z nierówności:

$$e^\pi > \pi^e.$$

Inne przykłady

Poniższe nierówności gwarantują, że odpowiednie wieże potęgowe spełniają takie same nierówności:

$$\varphi \uparrow e \uparrow \pi > \varphi \uparrow \pi \uparrow e,$$
$$e \uparrow \pi \uparrow \varphi > \pi \uparrow e \uparrow \varphi,$$
$$\varphi \uparrow \pi \uparrow e > \pi \uparrow \varphi \uparrow e,$$
$$\varphi \uparrow e \uparrow \pi > e \uparrow \varphi \uparrow \pi$$

Inne przykłady

Poniższe nierówności gwarantują, że odpowiednie wieże potęgowe spełniają takie same nierówności:

$$\begin{aligned}
\varphi \uparrow e \uparrow \pi > \varphi \uparrow \pi \uparrow e,\\
e \uparrow \pi \uparrow \varphi > \pi \uparrow e \uparrow \varphi,\\
\varphi \uparrow \pi \uparrow e > \pi \uparrow \varphi \uparrow e,\\
\varphi \uparrow e \uparrow \pi > e \uparrow \varphi \uparrow \pi
\end{aligned}$$

Na przykład:

$$\varphi \uparrow e \uparrow \pi \uparrow \varphi \uparrow e \uparrow \pi > \varphi \uparrow \pi \uparrow e \uparrow \varphi \uparrow \pi \uparrow e,$$

$$\varphi \uparrow e \uparrow \pi \uparrow \varphi \uparrow e \uparrow \pi \uparrow \varphi \uparrow e \uparrow \pi > \varphi \uparrow \pi \uparrow e \uparrow \varphi \uparrow \pi \uparrow e \uparrow \varphi \uparrow \pi \uparrow e$$

Różne wysokości - prosty test

Twierdzenie

Niech $n, m \geqslant 1$ i $k \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą

- Jeśli $n \leqslant m^{m-1}$, to $n \uparrow\uparrow k \leqslant m \uparrow\uparrow (k+1)$.

Różne wysokości - prosty test

Twierdzenie

Niech $n, m \geqslant 1$ i $k \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą

- Jeśli $n \leqslant m^{m-1}$, to $n \uparrow\uparrow k \leqslant m \uparrow\uparrow (k+1)$.

Przykład 1

Dla dowolnego $k \geqslant 2$ mamy

$$\pi \uparrow\uparrow k < e \uparrow\uparrow (k+1).$$

Wynika to z nierówności $\pi < 4.096 = 2.56^{1.5} < e^{e-1}$.

Różne wysokości - prosty test

Twierdzenie

Niech $n, m \geqslant 1$ i $k \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą

- Jeśli $n \leqslant m^{m-1}$, to $n \uparrow\uparrow k \leqslant m \uparrow\uparrow (k+1)$.

Przykład 1

Dla dowolnego $k \geqslant 2$ mamy

$$\pi \uparrow\uparrow k < e \uparrow\uparrow (k+1).$$

Wynika to z nierówności $\pi < 4.096 = 2.56^{1.5} < e^{e-1}$.

Przyład 2

Zachodzi

$$9^{9^{9^{9^{9^{9}}}}} < 3^{3^{3^{3^{3^{3^{3}}}}}}.$$

Wyścig wież

Twierdzenie

Załóżmy, że $e^{\frac{1}{e}} < a < b$. Wtedy istnieje dodatnia liczba całkowita k zależna od a i b taka, że dla dowolnego $n > 0$,

$$b \uparrow\uparrow n < a \uparrow\uparrow (n + k).$$

Wyścig wież

Twierdzenie

Załóżmy, że $e^{\frac{1}{e}} < a < b$. Wtedy istnieje dodatnia liczba całkowita k zależna od a i b taka, że dla dowolnego $n > 0$,

$$b \uparrow\uparrow n < a \uparrow\uparrow (n + k).$$

Przykład

Rozważmy dwie liczby naturalne: jedna z nich będzie mała: $a = 2$, druga trochę większa: $b = G$ (liczba Grahama).

Wyścig wież

Twierdzenie

Załóżmy, że $e^{\frac{1}{e}} < a < b$. Wtedy istnieje dodatnia liczba całkowita k zależna od a i b taka, że dla dowolnego $n > 0$,

$$b \uparrow\uparrow n < a \uparrow\uparrow (n + k).$$

Przykład

Rozważmy dwie liczby naturalne: jedna z nich będzie mała: $a = 2$, druga trochę większa: $b = G$ (liczba Grahama). Zgodnie z Twierdzeniem istnieje $k > 0$ takie, że:

$$G < 2 \uparrow\uparrow k,$$
$$G^G < 2^{2\uparrow\uparrow k},$$
$$G^{G^G} < 2^{2^{2\uparrow\uparrow k}} \quad \text{itd.}$$

Normalizacja wież

Lemat

Załóżmy, że $a, b > e^{1/e}$ i $n > 0$. Istnieje $k \geqslant 0$ i $c \in [1, b)$ (lub $c \in (1, b]$) takie, że

$$a \uparrow\uparrow n = (b \uparrow)^k c.$$

Normalizacja wież

Lemat

Załóżmy, że $a, b > e^{1/e}$ i $n > 0$. Istnieje $k \geqslant 0$ i $c \in [1, b)$ (lub $c \in (1, b]$) takie, że

$$a \uparrow\uparrow n = (b \uparrow)^k c.$$

Przykład

$$9 \uparrow\uparrow 2 \approx 10 \uparrow 8.5881825849 53923,$$

$$9 \uparrow\uparrow 3 \approx 10 \uparrow 10 \uparrow 8.567841344487361, \qquad 9 \uparrow\uparrow 4 \approx 10 \uparrow 10 \uparrow 10 \uparrow 8.5678134463465.$$

Normalizacja wież

Lemat

Załóżmy, że $a, b > e^{1/e}$ i $n > 0$. Istnieje $k \geqslant 0$ i $c \in [1, b)$ (lub $c \in (1, b]$) takie, że

$$a \uparrow\uparrow n = (b \uparrow)^k c.$$

Przykład

$$9 \uparrow\uparrow 2 \approx 10 \uparrow 8.5881825849539 23,$$

$$9 \uparrow\uparrow 3 \approx 10 \uparrow 10 \uparrow 8.567841344487361, \qquad 9 \uparrow\uparrow 4 \approx 10 \uparrow 10 \uparrow 10 \uparrow 8.5678134463465.$$

Powyższy przykład (oraz wsparcie Wolframa) sugeruje, że następujące równości są prawdziwe dla odpowiednio dużych n:

$$2 \uparrow\uparrow n \approx (10 \uparrow)^{n-3} 4.295,$$
$$9 \uparrow\uparrow n \approx (10 \uparrow)^{n-1} 8.568,$$
$$9! \uparrow\uparrow n \approx (10 \uparrow)^{n} 6.305,$$

Formalizacja

Twierdzenie (o normalizacji wież)

Załóżmy, że $a, b > e^{1/e}$ oraz $a \neq b$. Istnieją $N \geqslant 0$, $k \in \mathbb{Z}$ oraz ciąg zbieżny $(c_n)_{n \geqslant N}$ o wyrazach $1 < c_n < b$ i taki, że

$$a \uparrow\uparrow n = (b \uparrow)^{n+k} c_n$$

dla wszystkich $n \geqslant N$. Ponadto,

- jeśli $a > b$, to $(c_n)_{n \geqslant N}$ jest rosnący i $\lim_{n \to +\infty} c_n = c \in (1, b]$,
- jeśli $a < b$, to $(c_n)_{n \geqslant N}$ jest malejący i $\lim_{n \to +\infty} c_n = c \in [1, b)$.

Przyładowe zastosowanie

Nierówności

Ponieważ

$$
\begin{aligned}
2 \uparrow\uparrow n &\approx (10\uparrow)^{n-3} 4.295, \\
9 \uparrow\uparrow n &\approx (10\uparrow)^{n-1} 8.568, \\
9! \uparrow\uparrow n &\approx (10\uparrow)^{n} 6.305,
\end{aligned}
$$

dla dostatecznie dużych n (właściwie to dla $n \geqslant 1$), przeto

$$2 \uparrow\uparrow (n+3) < 9! \uparrow\uparrow n < 9 \uparrow\uparrow (n+1) < 2 \uparrow\uparrow (n+4)$$

i podane szacowania (wysokości wież) są optymalne.

Literatura

- K. Gryszka, *How to compare power towers?*, Lith Math J **62**, 192–206 (2022). (dostępne za darmo na RG)
- R. A. Knoebel, *Exponentials reiterated*, Amer. Math. Monthly, **88** (4): 235–252, 1981.
- D. J. Velleman, *Exponential vs. factorial*, Amer. Math. Monthly, **113**(8): 689–704, 2006.