Co to jest algebra geometryczna i czego jest uogólnieniem

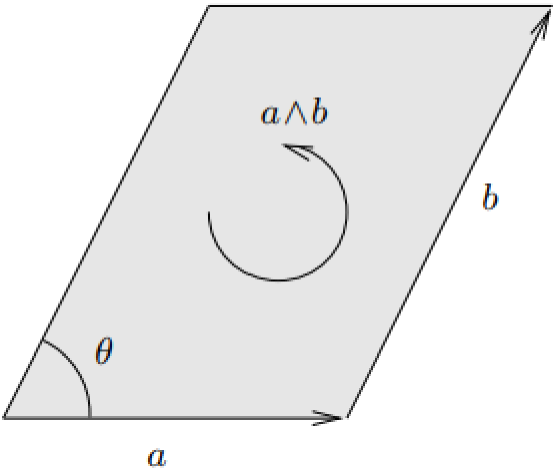
Jakub Banaśkiewicz

LXV Szkoła Matematyki Poglądowej, 27 sierpnia 2022 r.

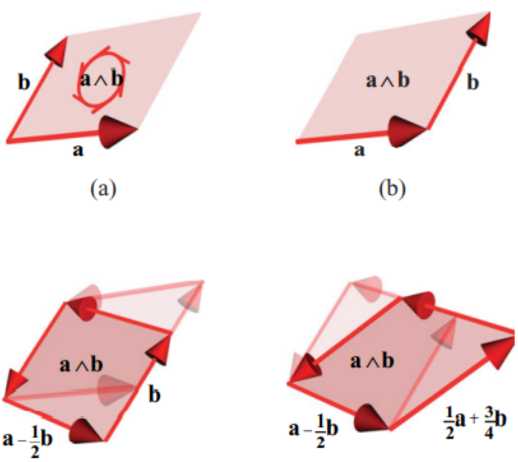
W $\mathbb{R}^2$ mamy

- Wektory $e_1 = (1, 0)$, i $e_2 = (1, 0)$
- Każdy $v \in \mathbb{R}^2$ da się zapisać jako $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$.
- Iloczyn skalarny $v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2$ oraz długość $|v| = \sqrt{v \cdot v}$.
- Mamy $v \cdot w = w \cdot v$ oraz $v \cdot w = |v||w| \cos \theta$, gdzie θ jest kątem pomiędzy v a w.
- Mamy $e_1 \cdot e_1 = 1$, $e_2 \cdot e_2 = 1$, $e_1 \cdot e_2 = 0$.

Biwektory



Biwektory



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Biwektory w $\mathbb{R}^2$

Wprowadzamy operacje produktu zewnętrznego $\wedge$ która dla dwóch wektorów $v, w \in \mathbb{R}^2$ zwraca biwektor $v \wedge w$. Operacja ta spełnia własności

- $v \wedge v = 0$ dla każdego $v \in \mathbb{R}^2$.
- $(\alpha w + \beta u) \wedge v = \alpha w \wedge v + \beta u \wedge v$, dla każdych $w, u, v \in \mathbb{R}^2$

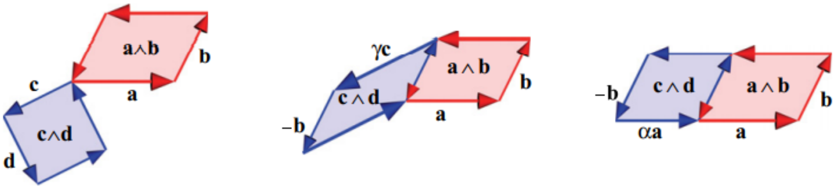
Zobaczmy, że $v \wedge w = -w \wedge v$. Mamy

$$v \wedge w = (v - w) \wedge w = (v - w) \wedge (w + v - w) = v \wedge v - w \wedge v = -w \wedge v.$$

Jeśli $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$ oraz $w = w_1 e_1 + w_2 e_2$ to

$$\begin{aligned} v \wedge w &= (v_1 e_1 + v_2 e_2) \wedge (w_1 e_1 + w_2 e_2) = v_1 w_2 e_1 \wedge e_2 + v_2 w_1 e_2 \wedge e_1 \\ &= (v_1 w_2 - v_2 w_1) e_1 \wedge e_2. \end{aligned}$$

Dodawanie Biwektorów w 2D



(a) (b) (c)

Algebra geometryczna

Rozważamy przestrzeń $\mathcal{G} = \{\alpha + \beta e_1 + \gamma e_2 + \delta e_1 \wedge e_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$. Dodawanie po współrzędnych np.

$$(1 + 2e_1 + e_2 - e_1 \wedge e_2) + (\alpha - e_1 - e_2 + 3e_1 \wedge e_2) = (1 + \alpha + e_1 + 2e_1 \wedge e_2).$$

Przestrzeń G składa się z podprzestrzeni

- $G_0 = \{\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ - skalary,
- $G_1 = \{\beta e_1 + \gamma e_2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$ - wektory,
- $G_2 = \{\delta e_2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$ - biwektory.

Mamy $G = G_0 \oplus G_1 \oplus G_2$.

Mnożenie

W G Wprowadzamy mnożenie spełniające własności

- $A(BC) = (AB)C$, gdzie $A, B, C \in G$.
- $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AB + AC$, gdzie $A, B, C \in G$.
- Mnożenie przez skalary G_0 odbywa się po wpółrzędnych tzn. jeśli $\lambda \in G_0$ i $A = \alpha + \beta e_1 + \gamma e_2 + \delta e_1 \wedge e_2$. to

$$\lambda A = A\lambda = \lambda\alpha + (\lambda\beta)e_1 + (\lambda\gamma)e_2 + (\lambda\delta)e_1 \wedge e_2.$$

- $e_1 e_1 = 1$, $e_2 e_2 = 1, e_1 e_2 = e_1 \wedge e_2, e_1 e_2 = e_2 \wedge e_1$

Powyższe zasady definiują jednoznacznie mnożenie w G.

Mnożenie cd

Rozważmy dwa wektory $v, w \in \mathbb{R}^2$.

$$vw = (v_1 e_1 + v_2 e_2)(w_1 e_1 + w_2 e_2) = v_1 w_1 e_1 e_1 + v_2 w_2 e_2 e_2 + v_1 w_2 e_1 e_2 + v_2 w_1 e_2 e_1$$
$$= v_1 w_1 + v_2 w_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1) e_1 \wedge e_2 = v \cdot w + v \wedge w.$$

Zobaczmy, że jeśli $v^{-1} := \frac{v}{|v|^2}$ to
$vv^{-1} = v \cdot v^{-1} + v \wedge v^{-1} = v \cdot v^{-1} = \frac{1}{|v|^2}(v \cdot v) = 1.$

Liczby zepolone w algebrze Geometrycznej

Czym jest $(e_1 e_2)^2$

$$(e_1 e_2)^2 = e_1 e_2 e_1 e_2 = -e_1 e_2 e_2 e_1 = -1.$$

Czyli $(e_1 e_2)^2$ zachowuje się jak i.

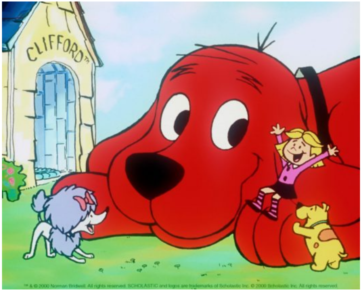
Przyjmimy, że $I = e_1 e_2$. Zatem

$$\{\alpha + \beta I, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = G_0 \oplus G_1$$

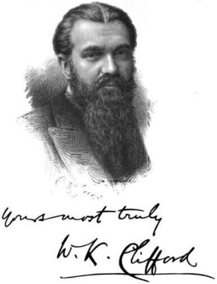
jest izomorficzny do liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

Algebra Clifforda

Clifford Wielki Czerowny Pies



William Kingdon Clifford



Rotacja

Jak I działa na wektorach

- $e_1 I = e_1 e_1 e_2 = e_2$
- $e_2 I = e_2 e_1 e_2 = -e_2 e_2 e_1 = -e_1$
- $I e_1 = e_1 e_2 e_1 = -e_2$

Pomnożenie z prawej wektora strony przez I obraca go o $\frac{\pi}{2}$ stopni przeciwnie do wskazówek zegara a z lewej zgodnie z nimi.
Możemy także rotować wektor o dowolny kąt θ.
- Rotacja przeciwnie do ruchu wskazówek zegara o kąt θ

$$e_1 e^{I\theta} = e_1(\cos(\theta) + \sin(\theta) I) = e_1 \cos(\theta) + \sin(\theta) e_2.$$

- Rotacja zgodnie do ruchu wskazówek zegara o kąt θ

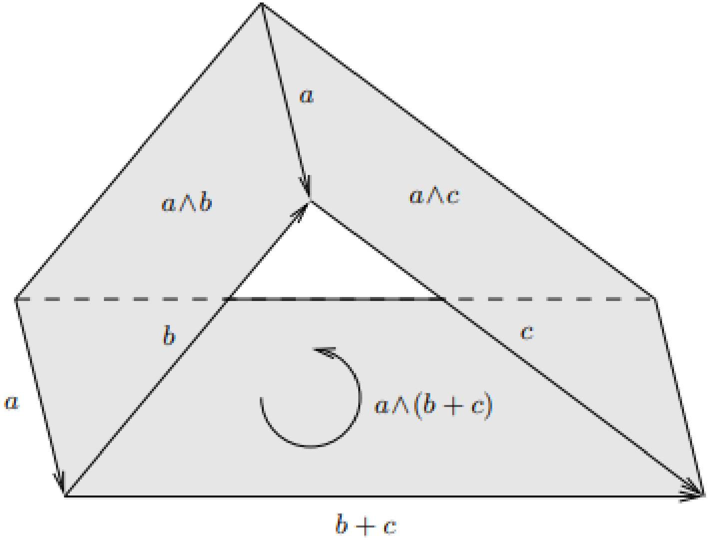
$$e^{I\theta} e_1 = (\cos(\theta) e_1 + I \sin(\theta)) e_1 = e_1 \cos(\theta) - \sin(\theta) e_2.$$

$\mathbb{R}^3$

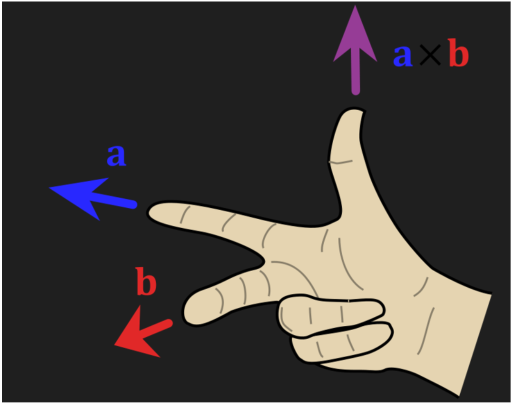
- W $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$.
- Każdy wektor $v \in \mathbb{R}^3$ da się zapisać jako $v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$.
- Mamy iloczyn skalarny
  $v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$.
- Możemy rozważać biwektory $v \wedge w$ dla $w, v \in \mathbb{R}^3$.
- Mamy

$$\begin{aligned} v \wedge w &= (v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) \wedge (w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3) \\ &= (v_1 w_2 - w_1 v_2) e_1 \wedge e_2 + (v_2 w_3 - w_2 v_3) e_2 \wedge e_3 + (v_1 w_3 - w_1 v_3) e_1 \wedge e_3, \end{aligned}$$

Dodawanie biwektorów.



Biwektory vs iloczyn wektorowy.



Trywektory

Analogicznie do biwektorów wprowadzamy produkt zewnętrzny dla trzech wektorów $v, w, u \in \mathbb{R}^3$ (trywektor) spełniający:

- Linowy ze wględu na każdą wpółrzędną

$$(\alpha v^1 + \beta v^2) \wedge w \wedge u = \alpha(v^1 \wedge w \wedge u) + \beta(v^2 \wedge w \wedge u),$$

  i tak dalej.

- Jeśli jeden wektor powtarza się dwa razy to w produkcie to jest on zerowy np. $v \wedge w \wedge w = 0$. Przez to wszyskie trywektory w $\mathbb{R}^2$ są zerowe.

  Można pokazać, że

$$v \wedge w \wedge u = -(w \wedge v \wedge u) = w \wedge u \wedge v.$$

  Każdy wektor trywektor można zapisać jako

$$v \wedge w \wedge u = \det([v|w|u]) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3.$$

Multiwektory

- Skalary $G_0 = \{\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$,
- Wektory $G_1 = \{\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 : \alpha \in \mathbb{R}\}$,
- Biwektory $G_2 = \{\alpha e_1 \wedge e_2 + \beta e_1 \wedge e_3 + \gamma e_2 \wedge e_3 : \alpha \in \mathbb{R}\}$,
- Trywektory $G_3 = \{\alpha e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 : \alpha \in \mathbb{R}\}$,

Algebra w $\mathbb{R}^3$

$G = G_0 \oplus G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$. Dodawanie jest po współrzędnych.

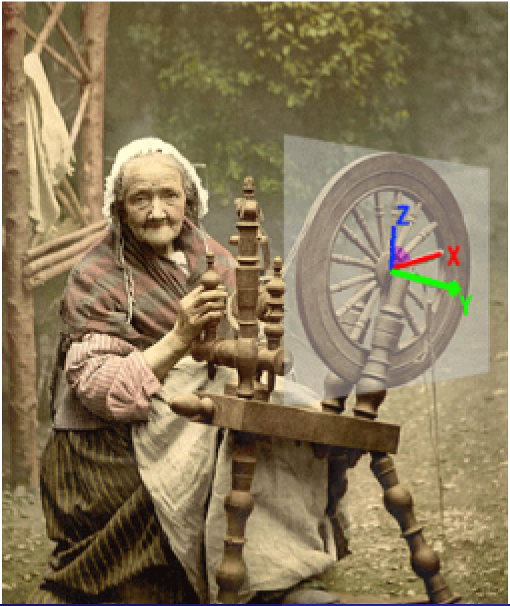
- $A(BC) = (AB)C$, gdzie $A, B, C \in G$.
- $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AB + AC$, gdzie $A, B, C \in G$.
- Mnożenie przez skalary G_0 odbywa się po współrzędnych tzn.
- $e_1 e_1 = 1$, $e_2 e_2 = 1, e_3 e_3 = 1$.
- Jeśli $i \neq j$ to $e_i e_j = e_i \wedge e_j$.
- Jeśli $i \neq j = l$ to $e_i e_j e_l = e_i \wedge e_j \wedge e_l$.

Kwaterniony

Zobaczmy, że

- $I = (e_1 e_2), \ J = (e_1 e_3), \ K = (e_2 e_3)$
- $I^2 = -1, \ J^2 = -1, \ K^2 = -1.$
- $IJ = e_1 e_2 e_1 e_3 = -K,$
- $JK = e_1 e_3 e_2 e_3 = -I,$
- $KI = e_2 e_3 e_1 e_2 = e_3 e_2 e_2 e_1 = e_3 e_1 = -J.$
- Dla Kwaterionów mamy $i^2 = -1, \ j^2 = -1, k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j.$
- Kwaterionny są izomorficzne z $G_0 \oplus G_2$.

Rotacje w $\mathbb{R}^3$



Rotacje w $\mathbb{R}^3$

Chcemy rotować w płaszczyźnie danej przez wektory e_1, e_2. o kąt $\frac{\pi}{2}$
Roważmy biwector $e_1 \wedge e_2$

- Jeśli w jest z płaszczyny e_1, e_2 to $w(e_1 e_2)$ obraca go o $\frac{\pi}{2}$ stopni zgodnie z wskazówkami zegara
- Jeśli $w = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3$ to
  $w(e_1 e_2) = w_1 e_2 - w_2 e_1 - w_3 e_1 e_2 e_3$ źle pojawia się trywektor.

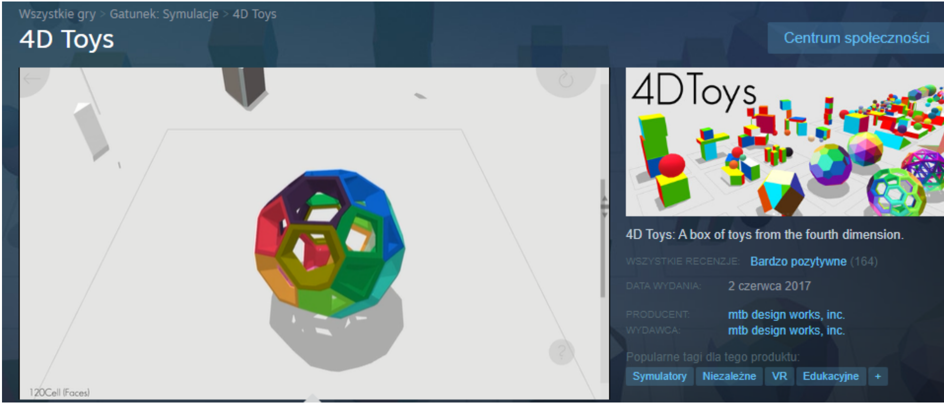
Rotacje w $\mathbb{R}^3$

Rozważmy płaszczyzne daną przez wektory v_1, v_2, i niech $R = v_1 \wedge v_2$. Przyjmimy, że dla wektorów v_1, v_2 mamy że R $R^2 = v_1 \wedge v_2$ mamy, że $R^2 = -1$. Wtedy by dany wektor $w \in \mathbb{R}^3$ zrotować w płaszczyźnie o kąt θ możemy użyć wzoru

$$e^{-\frac{\theta}{2}R} w e^{\frac{\theta}{2}R}.$$

- Możemy rozważać k-multiwektory dla $k \leqslant n$.
- Algebra $e_i^2 = 1$ dla wektorów bazowych.
- $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} = e_1 \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_k$.

Zastosowania



Źródła

- Geometric Algebra for Physicists, Chris Doran, Anthony Lasenby.
- Geometric Algebra for Computer Science, Daniel Fontijne, Stephen Mann.
- Interaktywny artykuł `https://marctenbosch.com/quaternions/`
- YouTube