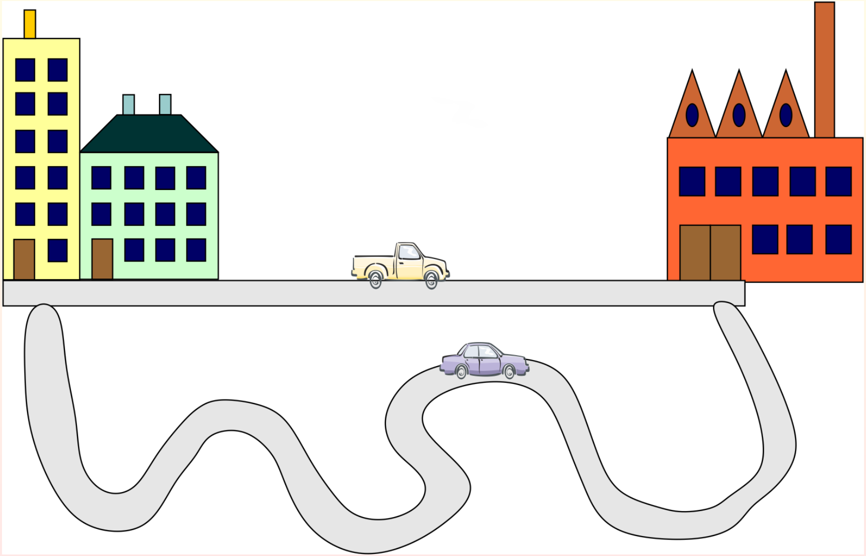
Czy uczenie się powoduje chaos komunikacyjny?

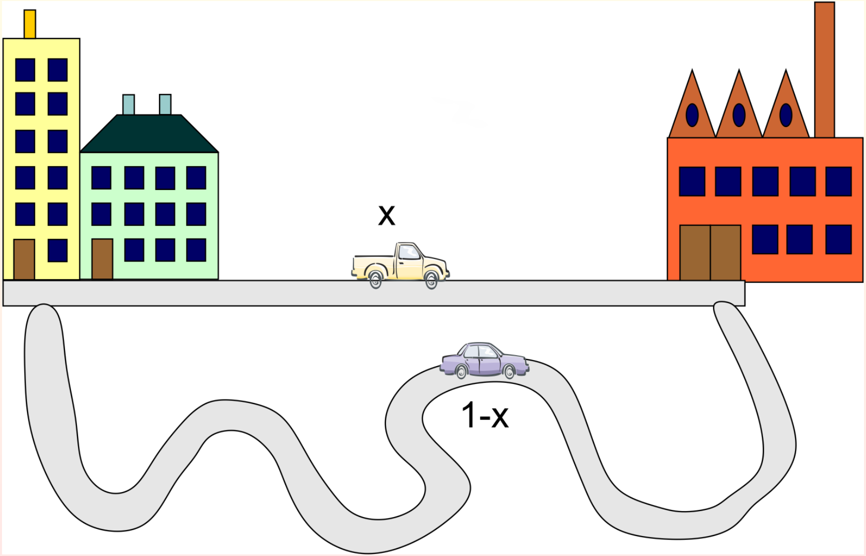
Grzegorz Kosiorowski

26 sierpnia 2022

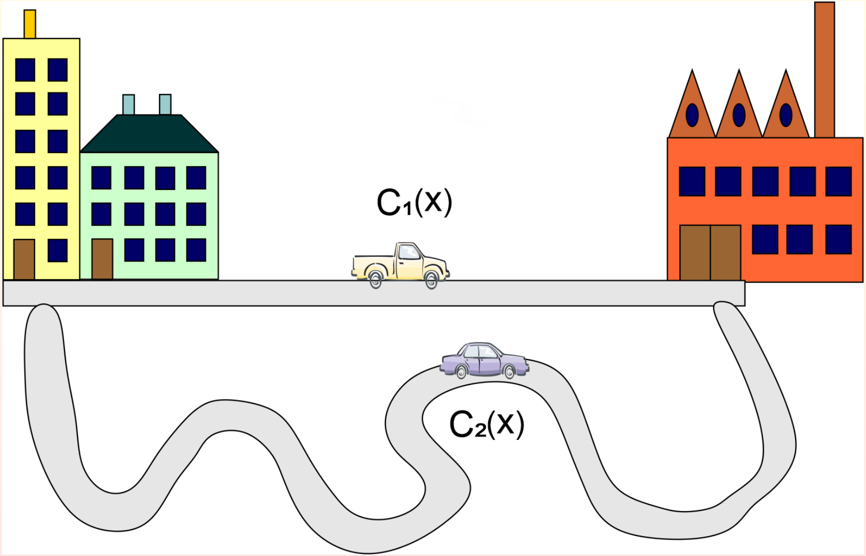
Poglądowo



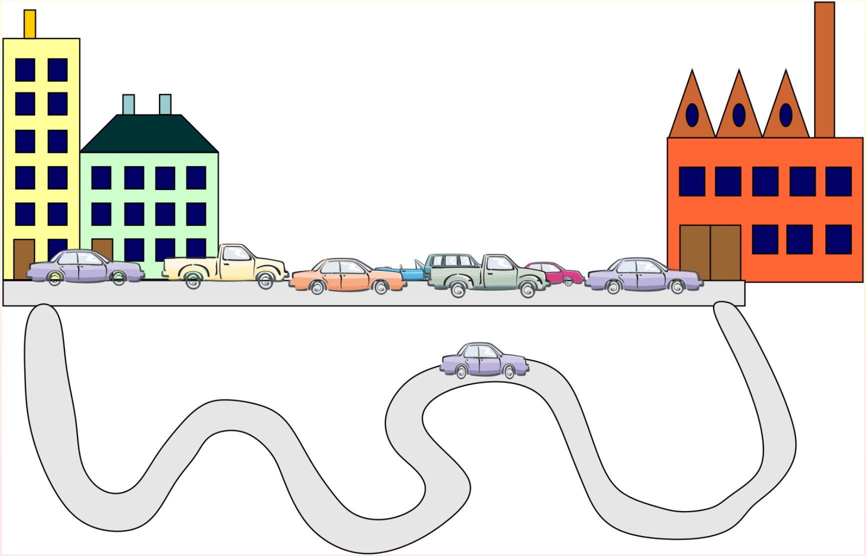
Poglądowo



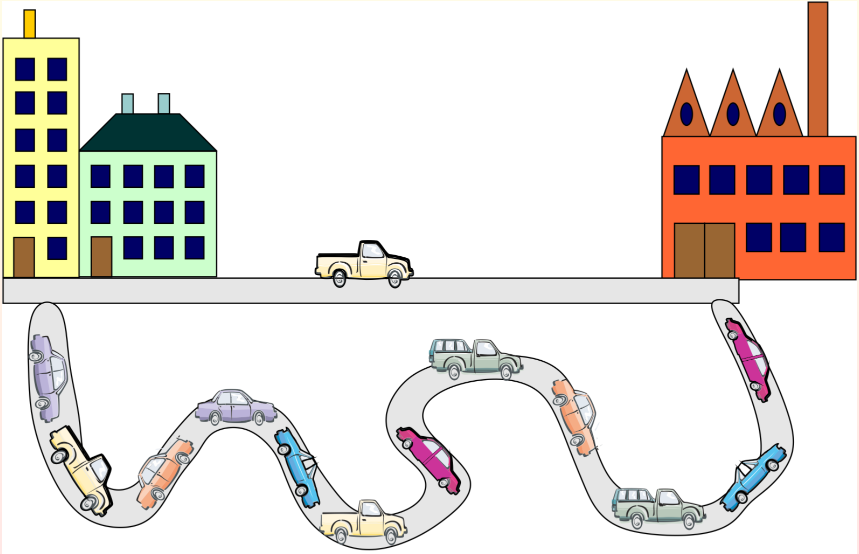
Poglądowo



Poglądowo



Poglądowo



Gry

Gra to model matematyczny sytuacji, w której działania wielu uczestników mają wpływ na efekty działań każdego z nich. Składa się z:

Gry

Gra to model matematyczny sytuacji, w której działania wielu uczestników mają wpływ na efekty działań każdego z nich. Składa się z:

- Uczestników, czyli *graczy* - u nas bardzo wielu („prawie" continuum lub dwóch). U nas: symetryczni.

Gra to model matematyczny sytuacji, w której działania wielu uczestników mają wpływ na efekty działań każdego z nich. Składa się z:

- Uczestników, czyli *graczy* - u nas bardzo wielu („prawie" continuum lub dwóch). U nas: symetryczni.
- Strategii, czyli możliwych działań uczestników (u nas: dwie). Przy continuum graczy - czyste, przy dwóch - mieszane.

Gry

Gra to model matematyczny sytuacji, w której działania wielu uczestników mają wpływ na efekty działań każdego z nich. Składa się z:

- Uczestników, czyli *graczy* - u nas bardzo wielu („prawie" continuum lub dwóch). U nas: symetryczni.
- Strategii, czyli możliwych działań uczestników (u nas: dwie). Przy continuum graczy - czyste, przy dwóch - mieszane.
- Funkcji wypłaty (u nas: kosztu), przypisującej graczom pewne korzyści (straty), w zależności od wszystkich wybranych strategii.

Gry

Gra to model matematyczny sytuacji, w której działania wielu uczestników mają wpływ na efekty działań każdego z nich. Składa się z:

- Uczestników, czyli *graczy* - u nas bardzo wielu („prawie" continuum lub dwóch). U nas: symetryczni.
- Strategii, czyli możliwych działań uczestników (u nas: dwie). Przy continuum graczy - czyste, przy dwóch - mieszane.
- Funkcji wypłaty (u nas: kosztu), przypisującej graczom pewne korzyści (straty), w zależności od wszystkich wybranych strategii.
- Założenia, że uczestnicy preferują jak najniższy koszt swoich działań.

Gry zagęszczeniowe

Gry zagęszczeniowe charakteryzują się tym, że koszty używania strategii rosną wraz z ilością jej użytkowników. Modele na nich oparte wyjaśniają zachowania graczy lub pomagają nimi sterować.

Gry zagęszczeniowe

Gry zagęszczeniowe charakteryzują się tym, że koszty używania strategii rosną wraz z ilością jej użytkowników. Modele na nich oparte wyjaśniają zachowania graczy lub pomagają nimi sterować.

- Transport

Gry zagęszczeniowe

Gry zagęszczeniowe charakteryzują się tym, że koszty używania strategii rosną wraz z ilością jej użytkowników. Modele na nich oparte wyjaśniają zachowania graczy lub pomagają nimi sterować.

- Transport
- Rynek (np. giełda)

Gry zagęszczeniowe

Gry zagęszczeniowe charakteryzują się tym, że koszty używania strategii rosną wraz z ilością jej użytkowników. Modele na nich oparte wyjaśniają zachowania graczy lub pomagają nimi sterować.

- Transport
- Rynek (np. giełda)
- Biologiczne gry populacyjne (konkrencja o zasoby)

Gry zagęszczeniowe

Gry zagęszczeniowe charakteryzują się tym, że koszty używania strategii rosną wraz z ilością jej użytkowników. Modele na nich oparte wyjaśniają zachowania graczy lub pomagają nimi sterować.

- Transport
- Rynek (np. giełda)
- Biologiczne gry populacyjne (konkrencja o zasoby)
- Informatyka (przypisywanie procesom odpowiednich zasobów)

Gry zagęszczeniowe

Gry zagęszczeniowe charakteryzują się tym, że koszty używania strategii rosną wraz z ilością jej użytkowników. Modele na nich oparte wyjaśniają zachowania graczy lub pomagają nimi sterować.

- Transport
- Rynek (np. giełda)
- Biologiczne gry populacyjne (konkrencja o zasoby)
- Informatyka (przypisywanie procesom odpowiednich zasobów)
- Telefonia komórkowa (wykorzystanie przekaźników), sieci bezprzewodowe (wykorzystanie routerów)

Gry - rozwiązania

Zazwyczaj jako rozwiązanie traktowany jest stan równowagi.

Zazwyczaj jako rozwiązanie traktowany jest stan równowagi.

Równowaga

Równowagą (dla continuum, strategią ewolucyjnie stabilną) dla rozważanej gry nazywamy taką proporcję x graczy wybierających pierwszą strategię, że jednemu graczowi (małej grupie graczy), nie opłaca się zmieniać strategii, o ile inni swojej strategii nie zmienią.

$$c_1(x+\varepsilon) \geq c_2(x); c_2(x+\varepsilon) \geq c_1(x).$$

Przykład

Załóżmy, że jeśli ułamek populacji $x \in [0, 1]$ wybiera strategię pierwszą, to koszt pierwszej strategii wynosi:

$$c_1(x) = \alpha x,$$

a koszt drugiej

$$c_2(x) = \beta(1 - x).$$

Przykład

Załóżmy, że jeśli ułamek populacji $x \in [0,1]$ wybiera strategię pierwszą, to koszt pierwszej strategii wynosi:

$$c_1(x) = \alpha x,$$

a koszt drugiej

$$c_2(x) = \beta(1-x).$$

Dla $b = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ koszty są takie same: $c_1(b) = c_2(b) = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

Przykład

Założmy, że jeśli ułamek populacji $x \in [0, 1]$ wybiera strategię pierwszą, to koszt pierwszej strategii wynosi:

$$c_1(x) = \alpha x,$$

a koszt drugiej

$$c_2(x) = \beta(1 - x).$$

Dla $b = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ koszty są takie same: $c_1(b) = c_2(b) = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.
Dla małych ε, $c_1(b+\varepsilon) > c_2(b)$ i $c_2(b+\varepsilon) > c_1(b)$, więc b jest równowagą (jedyną) tej gry.

Równowaga nie musi być jedyna, może być trudna do obliczenia lub nieoptymalna (dylemat więźnia).

Gry - problemy z równowagami

Równowaga nie musi być jedyna, może być trudna do obliczenia lub nieoptymalna (dylemat więźnia).
Dlaczego równowaga jest rozwiązaniem?

Równowaga nie musi być jedyna, może być trudna do obliczenia lub nieoptymalna (dylemat więźnia).
Dlaczego równowaga jest rozwiązaniem?

- Założenie o superracjonalności: wszyscy znają wszystkie zasady gry (w szczególności koszty/wypłaty), zgadzają się z jej celami, wiedzą o innych graczach wszystko i są w stanie idealnie realizować zaplanowane strategie

Równowaga nie musi być jedyna, może być trudna do obliczenia lub nieoptymalna (dylemat więźnia).
Dlaczego równowaga jest rozwiązaniem?

- Założenie o superracjonalności: wszyscy znają wszystkie zasady gry (w szczególności koszty/wypłaty), zgadzają się z jej celami, wiedzą o innych graczach wszystko i są w stanie idealnie realizować zaplanowane strategie
- Nieracjonalni gracze wiedzą o równowadze z doświadczenia. NAUCZYLI SIĘ, rozgrywając grę wielokrotnie (konwencje).

Gry - problemy z równowagami

Równowaga nie musi być jedyna, może być trudna do obliczenia lub nieoptymalna (dylemat więźnia).
Dlaczego równowaga jest rozwiązaniem?

- Założenie o superracjonalności: wszyscy znają wszystkie zasady gry (w szczególności koszty/wypłaty), zgadzają się z jej celami, wiedzą o innych graczach wszystko i są w stanie idealnie realizować zaplanowane strategie
- Nieracjonalni gracze wiedzą o równowadze z doświadczenia. NAUCZYLI SIĘ, rozgrywając grę wielokrotnie (konwencje).
- Ale czy na pewno musimy dojść w ten sposób do równowagi? Jeśli nawet, to jak długo to zajmie? I co w tym czasie?

Równowaga nie musi być jedyna, może być trudna do obliczenia lub nieoptymalna (dylemat więźnia).
Dlaczego równowaga jest rozwiązaniem?

- Założenie o superracjonalności: wszyscy znają wszystkie zasady gry (w szczególności koszty/wypłaty), zgadzają się z jej celami, wiedzą o innych graczach wszystko i są w stanie idealnie realizować zaplanowane strategie
- Nieracjonalni gracze wiedzą o równowadze z doświadczenia. NAUCZYLI SIĘ, rozgrywając grę wielokrotnie (konwencje).
- Ale czy na pewno musimy dojść w ten sposób do równowagi? Jeśli nawet, to jak długo to zajmie? I co w tym czasie?
- Pierwsze uogólnienie: ewolucyjna (algorytmiczna) teoria gier - dynamika uczenia się.

Gra iterowana

Założenia o racjonalności możemy się pozbyć za pomocą wprowadzenia dynamiki.

Gra iterowana

Założenia o racjonalności możemy się pozbyć za pomocą wprowadzenia dynamiki.

- Mamy dany jakiś stan początkowy $x_0 \in (0, 1)$ - wynik pierwszego rozegrania gry.

Gra iterowana

Założenia o racjonalności możemy się pozbyć za pomocą wprowadzenia dynamiki.

- Mamy dany jakiś stan początkowy $x_0 \in (0, 1)$ - wynik pierwszego rozegrania gry.
- Mamy daną funkcję $f : [0, 1] \to [0, 1]$ (odpowiednio regularną) definiującą przejście z jednego stanu do następnego ($f(x_n) = x_{n+1}$), która pokazuje nam wynik kolejnej, takiej samej gry.

Gra iterowana

Założenia o racjonalności możemy się pozbyć za pomocą wprowadzenia dynamiki.

- Mamy dany jakiś stan początkowy $x_0 \in (0,1)$ - wynik pierwszego rozegrania gry.
- Mamy daną funkcję $f : [0,1] \to [0,1]$ (odpowiednio regularną) definiującą przejście z jednego stanu do następnego ($f(x_n) = x_{n+1}$), która pokazuje nam wynik kolejnej, takiej samej gry.
- Funkcja f powinna modelować uczenie się graczy pomiędzy kolejnymi iteracjami.

Założenia o racjonalności możemy się pozbyć za pomocą wprowadzenia dynamiki.

- Mamy dany jakiś stan początkowy $x_0 \in (0, 1)$ - wynik pierwszego rozegrania gry.
- Mamy daną funkcję $f : [0, 1] \to [0, 1]$ (odpowiednio regularną) definiującą przejście z jednego stanu do następnego ($f(x_n) = x_{n+1}$), która pokazuje nam wynik kolejnej, takiej samej gry.
- Funkcja f powinna modelować uczenie się graczy pomiędzy kolejnymi iteracjami.
- Możemy wykorzystać teorię układów dynamicznych, by dowiedzieć się, czy (i jak) faktycznie układ dąży do równowagi.

Przykładowe dynamiki gry

Jest wiele możliwości generowania dynamiki uczenia się (czyli funkcji f) dla gier iterowanych.

Przykładowe dynamiki gry

Jest wiele możliwości generowania dynamiki uczenia się (czyli funkcji f) dla gier iterowanych.

- Dynamika najlepszej odpowiedzi (*best response*): każdy wybiera strategię, która dałaby mu najlepszy wynik w ostatniej iteracji.

Przykładowe dynamiki gry

Jest wiele możliwości generowania dynamiki uczenia się (czyli funkcji f) dla gier iterowanych.

- Dynamika najlepszej odpowiedzi (*best response*): każdy wybiera strategię, która dałaby mu najlepszy wynik w ostatniej iteracji.
- Rezultat: mało ciekawa oscylacja. Nieefektywne jako sterowanie, nierealistyczne jako model zachowania.

Przykładowe dynamiki gry

Jest wiele możliwości generowania dynamiki uczenia się (czyli funkcji f) dla gier iterowanych.

- Dynamika najlepszej odpowiedzi (*best response*): każdy wybiera strategię, która dałaby mu najlepszy wynik w ostatniej iteracji.
- Rezultat: mało ciekawa oscylacja. Nieefektywne jako sterowanie, nierealistyczne jako model zachowania.
- Małe uogólnienie: dynamika minimalizująca „żal" (*regret*) z wyboru danej strategii w czasie całej historii gry, czyli wyrażenie $\sum_{j \leq n} [c_1(x_j) \cdot x + c_2(x_j) \cdot (1 - x)]$.

Przykładowe dynamiki gry

Jest wiele możliwości generowania dynamiki uczenia się (czyli funkcji f) dla gier iterowanych.

- Dynamika najlepszej odpowiedzi (*best response*): każdy wybiera strategię, która dałaby mu najlepszy wynik w ostatniej iteracji.
- Rezultat: mało ciekawa oscylacja. Nieefektywne jako sterowanie, nierealistyczne jako model zachowania.
- Małe uogólnienie: dynamika minimalizująca „żal” (*regret*) z wyboru danej strategii w czasie całej historii gry, czyli wyrażenie $\sum_{j\leq n}[c_1(x_j)\cdot x + c_2(x_j)\cdot(1-x)]$.
- Ta dynamika znana jest jako Follow-The-Leader (FTL).

Dynamika FTL

$$x_{n+1} = argmin_{x\in(0,1)} \sum_{j\leq n} \left[c_1(x_j)\cdot x + c_2(x_j)\cdot(1-x)\right]$$

Dynamika FTL

$$x_{n+1} = argmin_{x \in (0,1)} \sum_{j \leq n} \left[c_1(x_j) \cdot x + c_2(x_j) \cdot (1 - x) \right]$$

Rezultat: niestety, równie nieciekawy. Czy to koniec?

Dynamika FTL

$$x_{n+1} = argmin_{x \in (0,1)} \sum_{j \leq n} \left[c_1(x_j) \cdot x + c_2(x_j) \cdot (1 - x) \right]$$

Rezultat: niestety, równie nieciekawy. Czy to koniec? Nie! Ludzie się tak nie uczą!

Dynamika FTL

$$x_{n+1} = argmin_{x \in (0,1)} \sum_{j \leq n} \left[c_1(x_j) \cdot x + c_2(x_j) \cdot (1 - x) \right]$$

Rezultat: niestety, równie nieciekawy. Czy to koniec? Nie! Ludzie się tak nie uczą!
I.Yaniv *Receiving other people's advice: Influence and benefit* (2004): ludzie zmieniają swoje zachowanie stopniowo, poprzez kompromis między pierwotnym podejściem, a lepszym rozwiązaniem, o którym się dowiadują.

FTRL

Algorytm *Followed-The-Regularized-Leader* opiera się na następującej optymalizacji

$$x_{n+1} = argmin_{x\in(0,1)}\left[\varepsilon \cdot \sum_{j\leq n}\left(c_1(x_j)\cdot x + c_2(x_j)\cdot(1-x)\right) + r(x)\right].$$

Algorytm *Followed-The-Regularized-Leader* opiera się na następującej optymalizacji

$$x_{n+1} = argmin_{x\in(0,1)}\left[\varepsilon \cdot \sum_{j\leq n}\left(c_1(x_j)\cdot x + c_2(x_j)\cdot(1-x)\right) + r(x)\right].$$

r jest tak zwanym *regularyzatorem*:

FTRL

Algorytm *Followed-The-Regularized-Leader* opiera się na następującej optymalizacji

$$x_{n+1} = argmin_{x \in (0,1)} \left[\varepsilon \cdot \sum_{j \leq n} \left(c_1(x_j) \cdot x + c_2(x_j) \cdot (1-x) \right) + r(x) \right].$$

r jest tak zwanym *regularyzatorem*:

- Regularyzator wyraża preferencje grupy „a priori”, bez uczenia się ($\varepsilon = 0$).

FTRL

Algorytm *Followed-The-Regularized-Leader* opiera się na następującej optymalizacji

$$x_{n+1} = argmin_{x \in (0,1)} \left[\varepsilon \cdot \sum_{j \leq n} \left(c_1(x_j) \cdot x + c_2(x_j) \cdot (1 - x) \right) + r(x) \right].$$

r jest tak zwanym *regularyzatorem*:

- Regularyzator wyraża preferencje grupy „a priori”, bez uczenia się ($\varepsilon = 0$).
- Regularyzator „zniechęca” do rozwiązań skrajnych i nagłych skoków (modelowanie, optymalizacja).

Algorytm *Followed-The-Regularized-Leader* opiera się na następującej optymalizacji

$$x_{n+1} = argmin_{x\in(0,1)}\left[\varepsilon \cdot \sum_{j\leq n} \left(c_1(x_j)\cdot x + c_2(x_j)\cdot(1-x)\right) + r(x)\right].$$

r jest tak zwanym *regularyzatorem*:

- Regularyzator wyraża preferencje grupy „a priori”, bez uczenia się ($\varepsilon = 0$).
- Regularyzator „zniechęca” do rozwiązań skrajnych i nagłych skoków (modelowanie, optymalizacja).
- Nasze założenia: $r(1-x) = r(x)$, $r''(x) > 0$, $\lim_{x\to 1^-} r'(x) = \infty$.

FTRL

Algorytm *Followed-The-Regularized-Leader* opiera się na następującej optymalizacji

$$x_{n+1} = argmin_{x\in(0,1)}\left[\varepsilon \cdot \sum_{j\leq n}\left(c_1(x_j)\cdot x + c_2(x_j)\cdot(1-x)\right) + r(x)\right].$$

r jest tak zwanym *regularyzatorem*:

- Regularyzator wyraża preferencje grupy „a priori”, bez uczenia się ($\varepsilon = 0$).
- Regularyzator „zniechęca” do rozwiązań skrajnych i nagłych skoków (modelowanie, optymalizacja).
- Nasze założenia: $r(1-x) = r(x)$, $r''(x) > 0$, $\lim_{x\to 1^-} r'(x) = \infty$.
- ε ustala prędkość uczenia się.

$$x_{n+1} = argmin_{x\in(0,1)}\left[\varepsilon \cdot \sum_{j\leq n}\left(c_1(x_j)\cdot x + c_2(x_j)\cdot(1-x)\right) + r(x)\right].$$

$$r(x) = x\log x + (1-x)\log(1-x)$$

MWU

$$x_{n+1} = argmin_{x \in (0,1)} \left[\varepsilon \cdot \sum_{j \leq n} \left(c_1(x_j) \cdot x + c_2(x_j) \cdot (1-x) \right) + r(x) \right].$$

$$r(x) = x \log x + (1-x) \log(1-x)$$

- Przykładowy regularyzator: entropia Shannona rozkładu prawdopodobieństwa $(x, 1-x)$.

MWU

$$x_{n+1} = argmin_{x \in (0,1)} \left[\varepsilon \cdot \sum_{j \leq n} \left(c_1(x_j) \cdot x + c_2(x_j) \cdot (1-x) \right) + r(x) \right].$$

$$r(x) = x \log x + (1-x) \log(1-x)$$

- Przykładowy regularyzator: entropia Shannona rozkładu prawdopodobieństwa $(x, 1-x)$.
- W tej wersji FTRL jest znany jako *Multiplicative Weight Update* (MWU).

MWU

$$x_{n+1} = argmin_{x\in(0,1)}\left[\varepsilon \cdot \sum_{j\le n} \left(c_1(x_j)\cdot x + c_2(x_j)\cdot(1-x)\right) + r(x)\right].$$

$$r(x) = x\log x + (1-x)\log(1-x)$$

- Przykładowy regularyzator: entropia Shannona rozkładu prawdopodobieństwa $(x, 1-x)$.
- W tej wersji FTRL jest znany jako *Multiplicative Weight Update* (MWU).
- Pierwsza część optymalizowanego wyrażenia odpowiada za adaptację, druga - za utratę pamięci i eksplorację możliwości.

$$x_{n+1} = argmin_{x\in(0,1)}\left[\varepsilon \cdot \sum_{j\leq n} \left(c_1(x_j)\cdot x + c_2(x_j)\cdot(1-x)\right) + r(x)\right].$$

$$r(x) = x\log x + (1-x)\log(1-x)$$

- Przykładowy regularyzator: entropia Shannona rozkładu prawdopodobieństwa $(x, 1-x)$.
- W tej wersji FTRL jest znany jako *Multiplicative Weight Update* (MWU).
- Pierwsza część optymalizowanego wyrażenia odpowiada za adaptację, druga - za utratę pamięci i eksplorację możliwości.
- Minimalizacja samego regularyzatora daje $x_0 = \frac{1}{2}$.

Jak powstaje dynamika dla Poglądowa?

$$c_1(x) = \alpha x,$$
$$c_2(x) = \beta(1 - x).$$

Jak powstaje dynamika dla Poglądowa?

$$c_1(x) = \alpha x,$$

$$c_2(x) = \beta(1 - x).$$

$$x_n = argmin_{x \in (0,1)} \Big[\varepsilon \cdot \sum_{j \leq n-1} \big(\alpha x_j \cdot x + \beta(1 - x_j) \cdot (1 - x)\big) + r(x)\Big].$$

Jak powstaje dynamika dla Poglądowa?

$$c_1(x) = \alpha x,$$
$$c_2(x) = \beta(1 - x).$$

$$x_n = argmin_{x \in (0,1)} \Big[\varepsilon \cdot \sum_{j \leq n-1} \big(\alpha x_j \cdot x + \beta(1 - x_j) \cdot (1 - x) \big) + r(x) \Big].$$

Optymalizacja:

$$r'(x_n) = -\varepsilon \cdot \sum_{j \leq n-1} \big(\alpha x_j - \beta(1 - x_j) \big)$$

$$r'(x_{n+1}) = -\varepsilon \cdot \sum_{j \leq n} \big(\alpha x_j - \beta(1 - x_j) \big).$$

$$c_1(x) = \alpha x,$$
$$c_2(x) = \beta(1 - x).$$

$$x_n = argmin_{x\in(0,1)}\left[\varepsilon \cdot \sum_{j\leq n-1} \left(\alpha x_j \cdot x + \beta(1 - x_j) \cdot (1 - x)\right) + r(x)\right].$$

Optymalizacja:

$$r'(x_n) = -\varepsilon \cdot \sum_{j\leq n-1} \left(\alpha x_j - \beta(1 - x_j)\right)$$

$$r'(x_{n+1}) = -\varepsilon \cdot \sum_{j\leq n} \left(\alpha x_j - \beta(1 - x_j)\right).$$

$$r'(x_{n+1}) = r'(x_n) - \varepsilon \, \left((\alpha + \beta)x_n - \beta\right).$$

Jak powstaje dynamika dla Poglądowa?

$$r'(x_{n+1}) = r'(x_n) - \varepsilon\left((\alpha+\beta)x_n - \beta\right).$$

Jak powstaje dynamika dla Poglądowa?

$$r'(x_{n+1}) = r'(x_n) - \varepsilon\ \big((\alpha+\beta)x_n - \beta\big).$$

Zatem funkcją generującą układ dynamiczny jest:

$$f_{a,b}(x) = \Psi^{-1}(\Psi(x) + a(x-b)),$$

gdzie $\Psi = -r'(x)$, $b = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ - równowaga i $a = \varepsilon(\alpha+\beta)$ - parametr intensywności uczenia się.

$$x_{n+1} = f_{a,b}(x_n).$$

Jak powstaje dynamika dla Poglądowa?

$$r'(x_{n+1}) = r'(x_n) - \varepsilon \left((\alpha+\beta)x_n - \beta\right).$$

Zatem funkcją generującą układ dynamiczny jest:

$$f_{a,b}(x) = \Psi^{-1}(\Psi(x) + a(x-b)),$$

gdzie $\Psi = -r'(x)$, $b = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ - równowaga i $a = \varepsilon(\alpha+\beta)$ - parametr intensywności uczenia się.

$$x_{n+1} = f_{a,b}(x_n).$$

Dla $r(x) = x \log x + (1-x)\log(1-x)$:

$$f_{a,b}(x) = \frac{x}{x + (1-x)\exp(a(x-b))}.$$

Podstawowe własności

$$f_{a,b}(x) = \frac{x}{x + (1 - x)\exp(a(x - b))}.$$

Podstawowe własności

$$f_{a,b}(x) = \frac{x}{x + (1-x)\exp(a(x-b))}.$$

- $f_{a,b}$ przedłuża się na $[0,1]$.

Podstawowe własności

$$f_{a,b}(x) = \frac{x}{x + (1-x)\exp(a(x-b))}.$$

- $f_{a,b}$ przedłuża się na $[0,1]$.
- Wewnątrz $(0,1)$ jedynym punktem stałym jest b (równowaga). $f(x) > x$ dla $x < b$ i $f(x) < x$ dla $x > b$.

$$f_{a,b}(x) = \frac{x}{x + (1 - x)\exp(a(x - b))}.$$

- $f_{a,b}$ przedłuża się na $[0, 1]$.
- Wewnątrz $(0, 1)$ jedynym punktem stałym jest b (równowaga). $f(x) > x$ dla $x < b$ i $f(x) < x$ dla $x > b$.
- $f'_{a,b}(b) = ab^2 - ab + 1$, więc b jest odpychającym punktem stałym dla $a > \frac{2}{b(1-b)}$.

Podstawowe własności

$$f_{a,b}(x) = \frac{x}{x + (1-x)\exp(a(x-b))}.$$

- $f_{a,b}$ przedłuża się na $[0,1]$.
- Wewnątrz $(0,1)$ jedynym punktem stałym jest b (równowaga).
  $f(x) > x$ dla $x < b$ i $f(x) < x$ dla $x > b$.
- $f'_{a,b}(b) = ab^2 - ab + 1$, więc b jest odpychającym punktem stałym dla $a > \frac{2}{b(1-b)}$.
- $f_{a,b}$ - bimodalne.

Przyciąganie Cesaro

Dla odwzorowania $f : [0,1] \to [0,1]$ punkt p jest przyciągający w sensie Cesaro jeśli istnieje otoczenie U tego punktu takie, że dla każdego $x \in U$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f^{n}(x) = p.$$

Przyciąganie Cesaro

Dla odwzorowania $f : [0,1] \to [0,1]$ punkt p jest przyciągający w sensie Cesaro jeśli istnieje otoczenie U tego punktu takie, że dla każdego $x \in U$ zachodzi

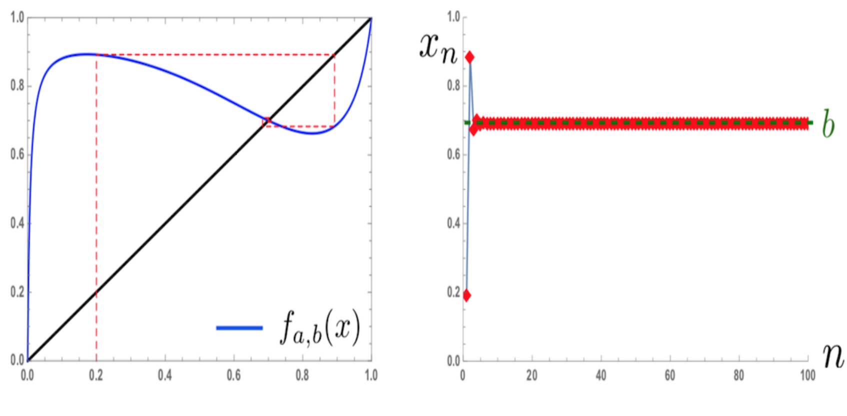
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f^n(x) = p.$$

Przyciąganie Cesaro

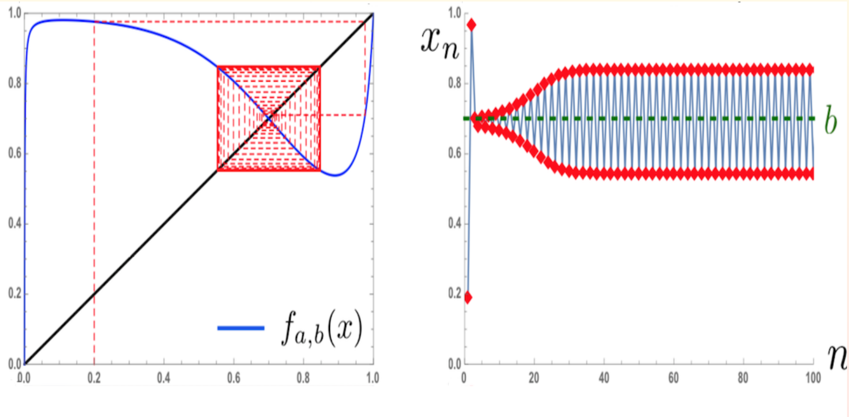
Dla $a > 0$, $b \in (0,1)$ i dla każdego $x_0 \in (0,1)$ zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f^n_{a,b}(x_0) = b.$$

$a = 7$

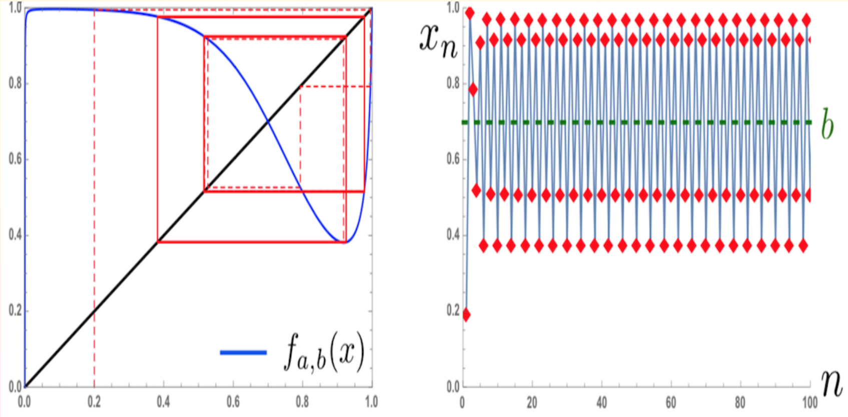


$a = 10.2$

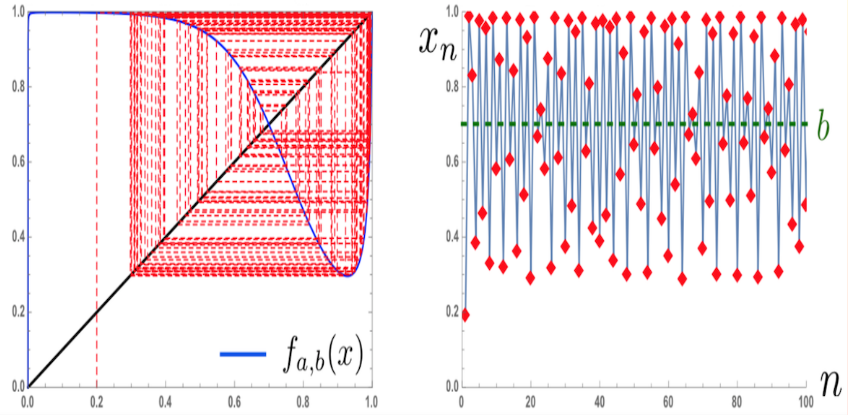


Testowanie zbieżności

$a = 13.2$



$a = 15$



Chaos deterministyczny?

Współistnienie nieregularności orbit i struktury - chaos deterministyczny?
Objawy chaosu:

Chaos deterministyczny?

Współistnienie nieregularności orbit i struktury - chaos deterministyczny?
Objawy chaosu:

- Skrajna niestabilność w formie silnej zależności od warunków początkowych (efekt motyla).

Chaos deterministyczny?

Współistnienie nieregularności orbit i struktury - chaos deterministyczny?
Objawy chaosu:

- Skrajna niestabilność w formie silnej zależności od warunków początkowych (efekt motyla).
- „Mieszanie”, czyli topologiczna tranzytywność.

Chaos deterministyczny?

Współistnienie nieregularności orbit i struktury - chaos deterministyczny?
Objawy chaosu:

- Skrajna niestabilność w formie silnej zależności od warunków początkowych (efekt motyla).
- „Mieszanie”, czyli topologiczna tranzytywność.
- Elementy struktury: bardzo dużo orbit okresowych (zbiór gęsty).

Chaos deterministyczny?

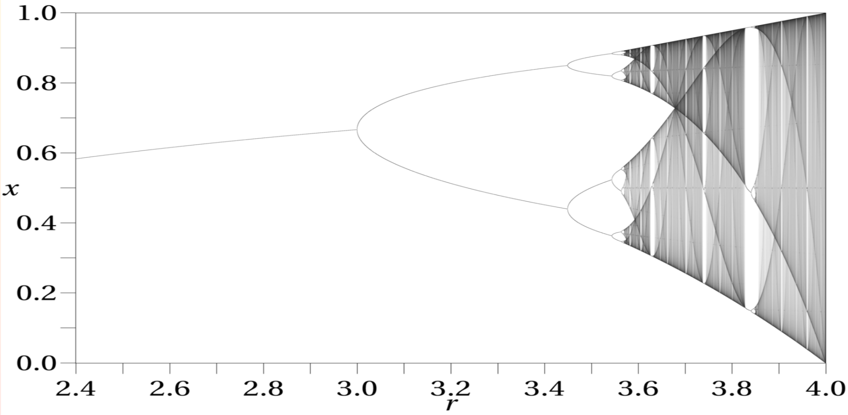
Współistnienie nieregularności orbit i struktury - chaos deterministyczny?
Objawy chaosu:

- Skrajna niestabilność w formie silnej zależności od warunków początkowych (efekt motyla).
- „Mieszanie”, czyli topologiczna tranzytywność.
- Elementy struktury: bardzo dużo orbit okresowych (zbiór gęsty).

Poszlaka: charakterystyczny sposób powstawania: sekwencja podwajania okresów.

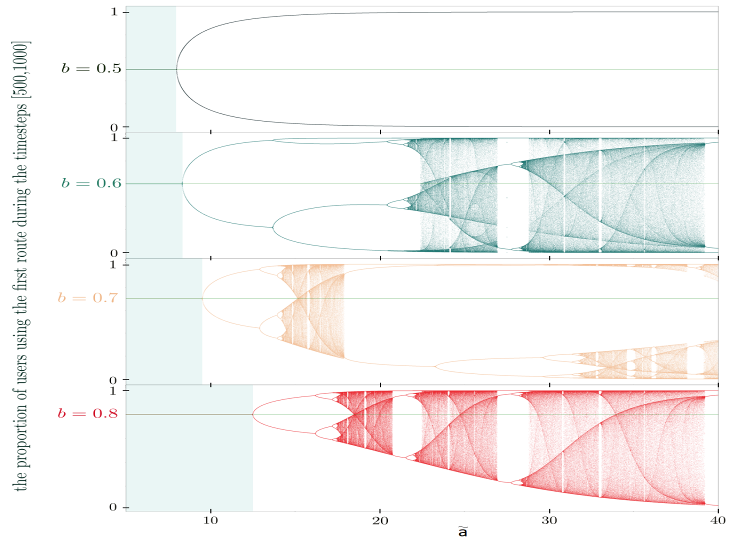
Diagram Feigenbauma

Odwzorowanie logistyczne: $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$.



Poglądowski diagram Feigenbauma

$$f_{a,b}(x) = \frac{x}{x+(1-x)\exp(a(x-b))}$$



Porządek Szarkowskiego

Porządek Szarkowskiego na liczbach naturalnych:
$3 < 5 < 7 < \ldots < 2 \cdot 3 < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 7 < \ldots <$
$< \ldots < 4 \cdot 3 < 4 \cdot 5 < 4 \cdot 7 < \ldots < 2^n < 2^{n-1} < \ldots < 4 < 2 < 1.$

Dowód chaosu: Porządek Szarkowskiego

Porządek Szarkowskiego

Porządek Szarkowskiego na liczbach naturalnych:
$3 < 5 < 7 < \ldots < 2 \cdot 3 < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 7 < \ldots <$
$< \ldots < 4 \cdot 3 < 4 \cdot 5 < 4 \cdot 7 < \ldots < 2^n < 2^{n-1} < \ldots < 4 < 2 < 1.$

Twierdzenie Szarkowskiego

Jeśli odwzorowanie ciągłe $f : [0, 1] \to [0, 1]$ generuje układ dynamiczny, który ma orbitę o okresie m i $m < n$ w porządku Szarkowskiego, to ten układ dynamiczny ma orbitę o okresie n.

Dowód chaosu: Porządek Szarkowskiego

Porządek Szarkowskiego

Porządek Szarkowskiego na liczbach naturalnych:
$3 < 5 < 7 < \ldots < 2 \cdot 3 < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 7 < \ldots <$
$< \ldots < 4 \cdot 3 < 4 \cdot 5 < 4 \cdot 7 < \ldots < 2^n < 2^{n-1} < \ldots < 4 < 2 < 1.$

Twierdzenie Szarkowskiego

Jeśli odwzorowanie ciągłe $f : [0, 1] \to [0, 1]$ generuje układ dynamiczny, który ma orbitę o okresie m i $m < n$ w porządku Szarkowskiego, to ten układ dynamiczny ma orbitę o okresie n.

Twierdzenie Li-Yorke

Istnienie orbity o okresie 3 dla odwzorowania ciągłego $f : [0, 1] \to [0, 1]$ oznacza chaotyczność dynamiki.

Dowód chaosu: Porządek Szarkowskiego

Porządek Szarkowskiego

Porządek Szarkowskiego na liczbach naturalnych:
$3 < 5 < 7 < \ldots < 2 \cdot 3 < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 7 < \ldots <$
$< \ldots < 4 \cdot 3 < 4 \cdot 5 < 4 \cdot 7 < \ldots < 2^n < 2^{n-1} < \ldots < 4 < 2 < 1.$

Twierdzenie Szarkowskiego

Jeśli odwzorowanie ciągłe $f : [0,1] \to [0,1]$ generuje układ dynamiczny, który ma orbitę o okresie m i $m < n$ w porządku Szarkowskiego, to ten układ dynamiczny ma orbitę o okresie n.

Twierdzenie Li-Yorke

Istnienie orbity o okresie 3 dla odwzorowania ciągłego $f : [0,1] \to [0,1]$ oznacza chaotyczność dynamiki.

Do uzyskania dodatniej entropii topologicznej wystarczy, by istniała orbita o okresie, który nie jest potęgą dwójki.

Wykorzystamy twierdzenie:

Li, Misiurewicz, Pianigiani, Yorke (1982)

Jeśli dla odwzorowania ciągłego $f : [0,1] \to [0,1]$ istnieje punkt x taki, że dla pewnego nieparzystego $n > 1$, $f^n(x) < x < f(x)$, to f ma orbitę o okresie 3.

Uczenie się powoduje chaos

Wykorzystamy twierdzenie:

Li, Misiurewicz, Pianigiani, Yorke (1982)

Jeśli dla odwzorowania ciągłego $f : [0,1] \to [0,1]$ istnieje punkt x taki, że dla pewnego nieparzystego $n > 1$, $f^n(x) < x < f(x)$, to f ma orbitę o okresie 3.

Dla naszej dynamiki udowodnimy, że dla odpowiednio dużych a istnieje x taki, że $f^3_{a,b}(x) < x < f_{a,b}(x)$.

Wykorzystamy twierdzenie:

Li, Misiurewicz, Pianigiani, Yorke (1982)

Jeśli dla odwzorowania ciągłego $f : [0,1] \to [0,1]$ istnieje punkt x taki, że dla pewnego nieparzystego $n > 1$, $f^n(x) < x < f(x)$, to f ma orbitę o okresie 3.

Dla naszej dynamiki udowodnimy, że dla odpowiednio dużych a istnieje x taki, że $f^3_{a,b}(x) < x < f_{a,b}(x)$. Indukcyjnie:

$$x_n = f_{a,b}(x_{n-1}) = \Psi^{-1}\left(\Psi(x_0) + a\Big(\sum_{k=0}^{n-1}(x_k - b)\Big)\right)$$

Uczenie się powoduje chaos

Wykorzystamy twierdzenie:

Li, Misiurewicz, Pianigiani, Yorke (1982)

Jeśli dla odwzorowania ciągłego $f : [0,1] \to [0,1]$ istnieje punkt x taki, że dla pewnego nieparzystego $n > 1$, $f^n(x) < x < f(x)$, to f ma orbitę o okresie 3.

Dla naszej dynamiki udowodnimy, że dla odpowiednio dużych a istnieje x taki, że $f^3_{a,b}(x) < x < f_{a,b}(x)$. Indukcyjnie:

$$x_n = f_{a,b}(x_{n-1}) = \Psi^{-1}\Big(\Psi(x_0) + a\big(\sum_{k=0}^{n-1}(x_k - b)\big)\Big)$$

Ψ^{-1} jest malejące, zatem $f_{a,b}(x) > x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < b$,

Wykorzystamy twierdzenie:

Li, Misiurewicz, Pianigiani, Yorke (1982)

Jeśli dla odwzorowania ciągłego $f : [0,1] \to [0,1]$ istnieje punkt x taki, że dla pewnego nieparzystego $n > 1$, $f^n(x) < x < f(x)$, to f ma orbitę o okresie 3.

Dla naszej dynamiki udowodnimy, że dla odpowiednio dużych a istnieje x taki, że $f^3_{a,b}(x) < x < f_{a,b}(x)$. Indukcyjnie:

$$x_n = f_{a,b}(x_{n-1}) = \Psi^{-1}\left(\Psi(x_0) + a\left(\sum_{k=0}^{n-1}(x_k - b)\right)\right)$$

Ψ^{-1} jest malejące, zatem $f_{a,b}(x) > x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < b$, a $f^3(x) < x$ jest równoważne $x + f_{a,b}(x) + f^2_{a,b}(x) > 3b$.

Ma być: $x < b$ i $x + f_{a,b}(x) + f^2_{a,b}(x) > 3b$.

Ma być: $x < b$ i $x + f_{a,b}(x) + f^2_{a,b}(x) > 3b$. Bez utraty ogólności: $b < \frac{1}{2}$, czyli $3b - 1 < b$.

Ma być: $x < b$ i $x + f_{a,b}(x) + f^2_{a,b}(x) > 3b$. Bez utraty ogólności: $b < \frac{1}{2}$, czyli $3b - 1 < b$.
Wybieramy $x \in (3b - 1, b)$. $x < b$ mamy za darmo.

Ma być: $x < b$ i $x + f_{a,b}(x) + f^2_{a,b}(x) > 3b$. Bez utraty ogólności: $b < \frac{1}{2}$, czyli $3b - 1 < b$.
Wybieramy $x \in (3b - 1, b)$. $x < b$ mamy za darmo.
Z założeń $\lim_{x\to 1^+} \Psi(x) = \lim_{x\to 1^+} -r'(x) = -\infty$, więc

Uczenie się powoduje chaos

Ma być: $x < b$ i $x + f_{a,b}(x) + f^2_{a,b}(x) > 3b$. Bez utraty ogólności: $b < \frac{1}{2}$, czyli $3b - 1 < b$.
Wybieramy $x \in (3b - 1, b)$. $x < b$ mamy za darmo.
Z założeń $\lim_{x \to 1^+} \Psi(x) = \lim_{x \to 1^+} -r'(x) = -\infty$, więc

$$\lim_{a \to \infty} f_{a,b}(x_0) = \lim_{a \to \infty} \Psi^{-1}(\Psi(x) + a(x - b)) = 1.$$

Ma być: $x < b$ i $x + f_{a,b}(x) + f^2_{a,b}(x) > 3b$. Bez utraty ogólności: $b < \frac{1}{2}$, czyli $3b - 1 < b$.
Wybieramy $x \in (3b - 1, b)$. $x < b$ mamy za darmo.
Z założeń $\lim_{x\to 1^+} \Psi(x) = \lim_{x\to 1^+} -r'(x) = -\infty$, więc

$$\lim_{a\to\infty} f_{a,b}(x_0) = \lim_{a\to\infty} \Psi^{-1}(\Psi(x) + a(x - b)) = 1.$$

$3b - x_0 < 1$, więc dla dużych a mamy $f_{a,b}(x_0) > 3b - x_0$,

Uczenie się powoduje chaos

Ma być: $x < b$ i $x + f_{a,b}(x) + f^2_{a,b}(x) > 3b$. Bez utraty ogólności: $b < \frac{1}{2}$, czyli $3b - 1 < b$.
Wybieramy $x \in (3b-1, b)$. $x < b$ mamy za darmo.
Z założeń $\lim_{x\to 1^+} \Psi(x) = \lim_{x \to 1^+} -r'(x) = -\infty$, więc

$$\lim_{a\to\infty} f_{a,b}(x_0) = \lim_{a\to\infty} \Psi^{-1}(\Psi(x) + a(x-b)) = 1.$$

$3b - x_0 < 1$, więc dla dużych a mamy $f_{a,b}(x_0) > 3b - x_0$, więc $x + f_{a,b}(x) + f^2_{a,b}(x) > 3b$.

Uczenie się powoduje chaos

Ma być: $x < b$ i $x + f_{a,b}(x) + f^2_{a,b}(x) > 3b$. Bez utraty ogólności: $b < \frac{1}{2}$, czyli $3b - 1 < b$.
Wybieramy $x \in (3b - 1, b)$. $x < b$ mamy za darmo.
Z założeń $\lim_{x \to 1^+} \Psi(x) = \lim_{x \to 1^+} -r'(x) = -\infty$, więc

$$\lim_{a \to \infty} f_{a,b}(x_0) = \lim_{a \to \infty} \Psi^{-1}(\Psi(x) + a(x - b)) = 1.$$

$3b - x_0 < 1$, więc dla dużych a mamy $f_{a,b}(x_0) > 3b - x_0$, więc $x + f_{a,b}(x) + f^2_{a,b}(x) > 3b$.
Zatem dla odpowiednio dużych a mamy $f^3_{a,b}(x_0) < x_0 < f_{a,b}(x_0)$, czyli też orbitę okresową o okresie 3, a więc i chaos (o ile $b \neq \frac{1}{2}$).

Podsumowanie

- Liniowa gra prowadzi do chaosu, więc bardziej skomplikowane zapewne też.

Podsumowanie

- Liniowa gra prowadzi do chaosu, więc bardziej skomplikowane zapewne też.
- Interpretacje: chaotyczna reakcja na bodźce może wynikać ze zwiększonej potrzeby dostosowywania się (np. kryzysy finansowe).

Podsumowanie

- Liniowa gra prowadzi do chaosu, więc bardziej skomplikowane zapewne też.
- Interpretacje: chaotyczna reakcja na bodźce może wynikać ze zwiększonej potrzeby dostosowywania się (np. kryzysy finansowe).
- Może to dobrze? Twórcza destrukcja - Joseph Schumpeter.

Podsumowanie

- Liniowa gra prowadzi do chaosu, więc bardziej skomplikowane zapewne też.
- Interpretacje: chaotyczna reakcja na bodźce może wynikać ze zwiększonej potrzeby dostosowywania się (np. kryzysy finansowe).
- Może to dobrze? Twórcza destrukcja - Joseph Schumpeter.
- Dalsze badania: inne dynamiki, inne gry.

Inne regularyzatory

$r(1-x) = r(x)$, $r''(x) > 0$, $\lim_{x\to 0^+} r'(x) = -\infty$. $\Psi(x) = -r'(x)$

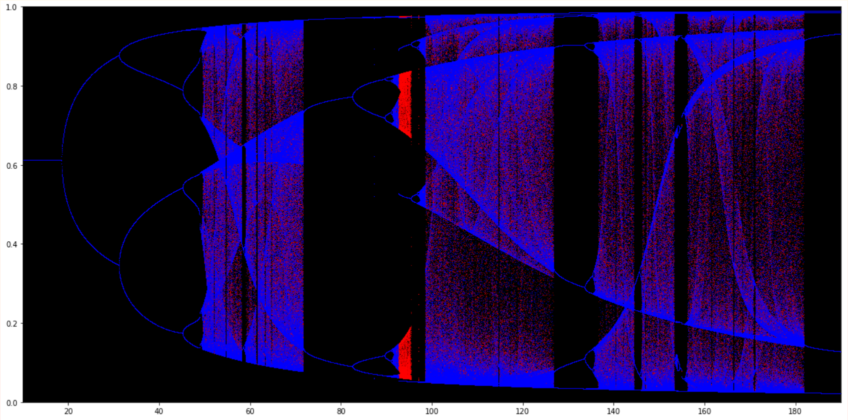
$$f_{a,b}(x) = \Psi^{-1}(\Psi(x) + a(x-b))$$

regularizer	$r(x)$	$\Psi(x)$
Shannon	$x\log x + (1-x)\log(1-x)$	$\log\frac{1-x}{x}$
Havrda-Charvát-Tsallis, $q \in (0,1)$	$\frac{1}{1-q}(1-x^q-(1-x)^q)$	$\frac{q}{1-q}\left(x^{q-1}-(1-x)^{q-1}\right)$
Rényi, $q \in (0,1)$	$\frac{1}{q-1}\log(x^q+(1-x)^q)$	$\frac{q}{1-q}\cdot\frac{x^{q-1}-(1-x)^{q-1}}{x^q+(1-x)^q}$
log-barrier	$-\log x - \log(1-x)$	$\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}$

Regularyzatory Shannona i HCT oraz log-barrier to przykłady regularyzatorów pochodzących od entropii Arimoto, postaci $-\eta(x) - \eta(1-x)$, gdzie η jest funkcją wklęsłą taką, że $\lim_{x\to 0^+} \eta'(x) = +\infty$.

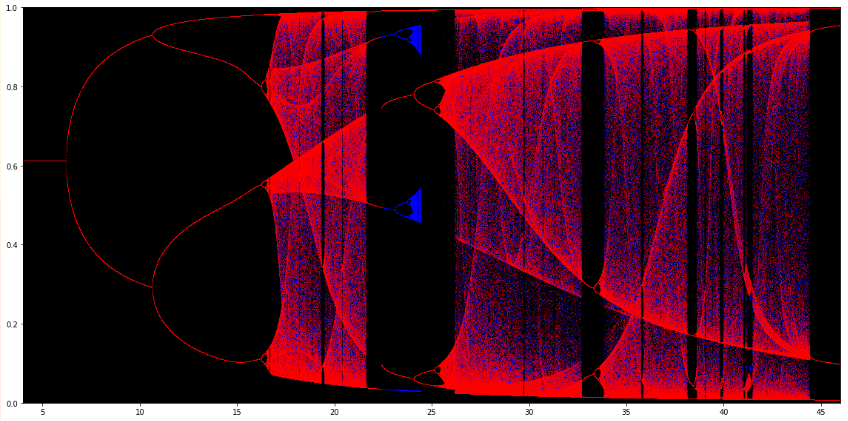
Chaos

Mechanizm powstawania chaosu jest podobny, wystarczy śledzić trajektorie punktów krytycznych.



Log-barrier.

Mechanizm powstawania chaosu jest podobny, wystarczy śledzić trajektorie punktów krytycznych.



HCT z $q = 0.5$.

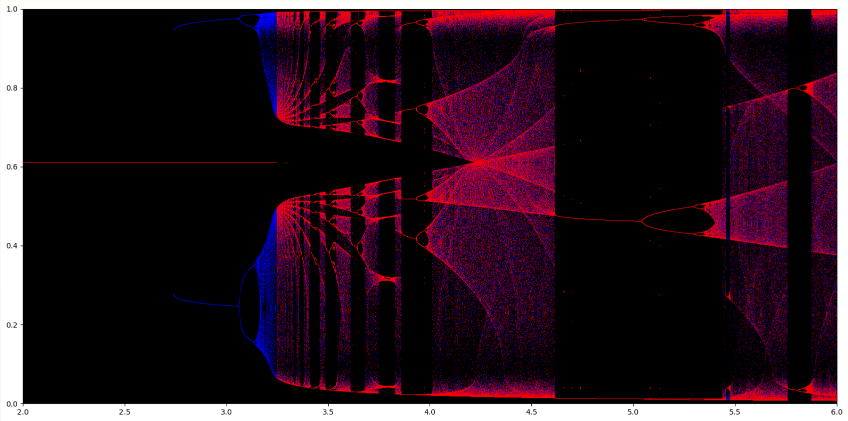
Globalna stabilność równowagi

Dla małych *a* równowaga jest przyciągająca, ale czy globalnie?

Globalna stabilność równowagi

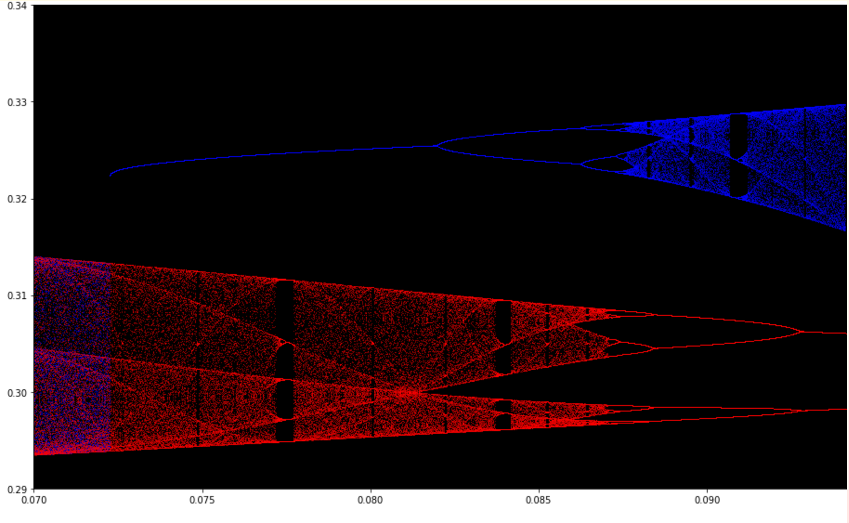
Dla małych a równowaga jest przyciągająca, ale czy globalnie? Tylko gdy $r^{IV} > 0$ (choć klasyczne regularyzatory to spełniają).

Dla małych a równowaga jest przyciągająca, ale czy globalnie? Tylko gdy $r^{IV} > 0$ (choć klasyczne regularyzatory to spełniają).



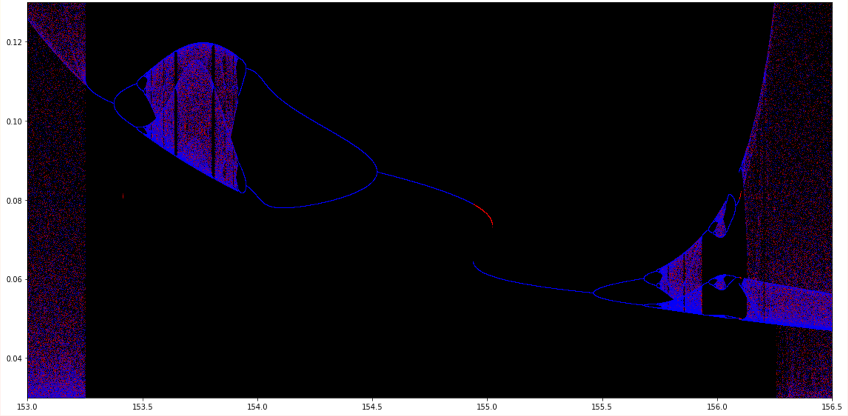
$$r(x) = x \log x + (1-x)\log(1-x) + 0.4167 \cdot \log(x^2 - x - 0.11).$$

Interesujący fenomen, nieobserwowany dla typowych odwzorowań odcinka.



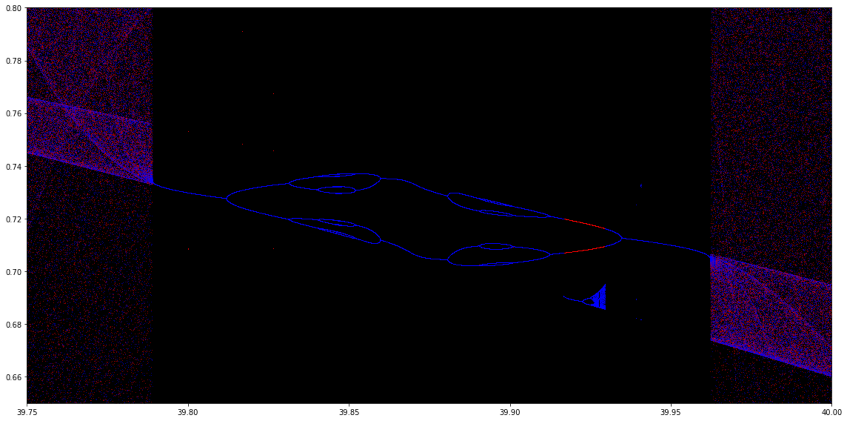
Log-barrier.

Chaos pojawia się i znika.



Log-barrier.

Nie zawsze podwajanie okresu prowadzi do chaosu.



HCT z $q = 0.5$.

Bibliografia

The Route to Chaos in Routing Games : When Is Price of Anarchy Too Optimistic? Thiparat Chotibut, Fryderyk Falniowski, Michał Misiurewicz, Georgios Piliouras; Advances in Neural Information Processing Systems 33 (NeurIPS 2020) S. 1-12.

Follow-the-Regularized-Leader Routes to Chaos in Routing Games Jakub Bielawski, Thiparat Chotibut, Fryderyk Falniowski, Grzegorz Kosiorowski, Michał Misiurewicz, Georgios Piliouras; Proceedings of Machine Learning Research. - vol. 139 (2021), s. 925-935.