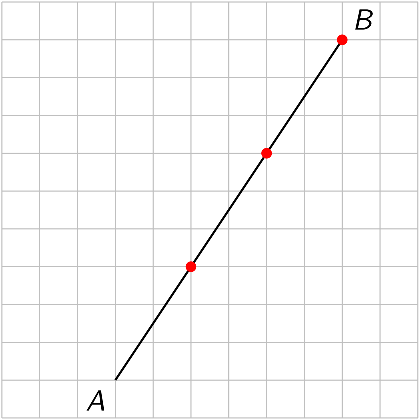
Zliczanie punktów kratowych

Bartłomiej Bzdęga

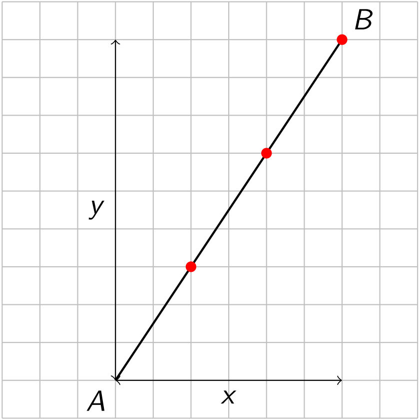
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Pozaniu

28 sierpnia 2022

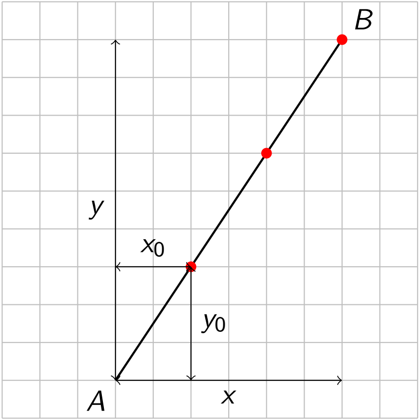
Odcinek kratowy



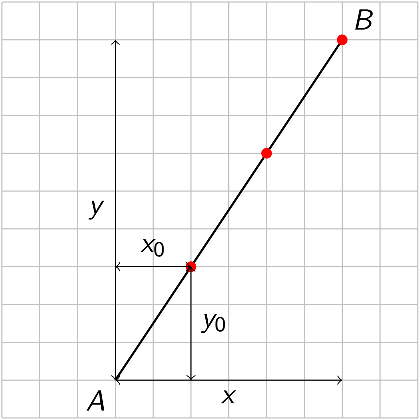
Odcinek kratowy



Odcinek kratowy

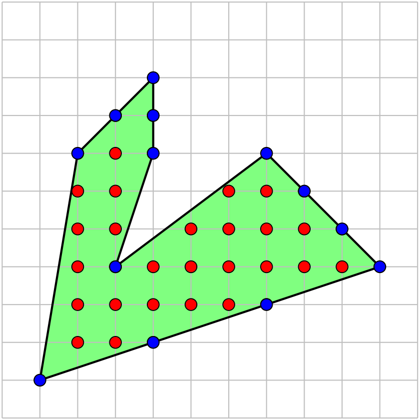


Odcinek kratowy

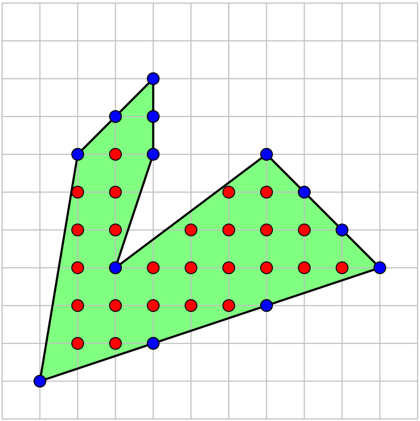


$$\mathcal{L}\big((AB]\big) = \texttt{NWD}(x, y)$$

Wielokąt kratowy



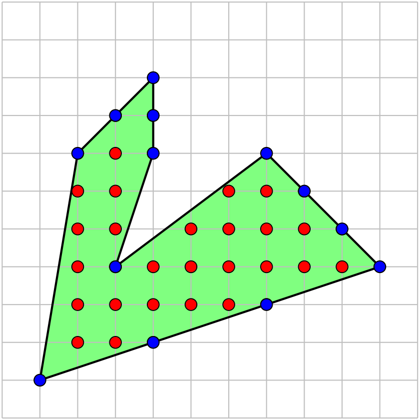
Wielokąt kratowy



Wzór Picka:

$$A = 1 \cdot I + \frac{1}{2} \cdot B - 1$$

Wielokąt kratowy

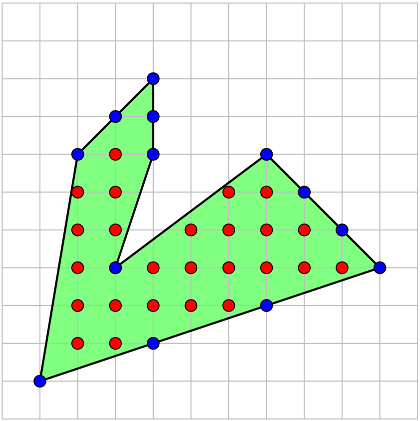


Wzór Picka:

$$A = 1 \cdot I + \frac{1}{2} \cdot B - 1$$

$$\mathcal{L} = A + \frac{1}{2}B + 1$$

Wielokąt kratowy



Wzór Picka:

$$A = 1 \cdot I + \frac{1}{2} \cdot B - 1$$

$$\mathcal{L} = A + \frac{1}{2}B + 1$$

$$B = \sum \mathtt{NWD}(x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i)$$

Dla wielościanu?

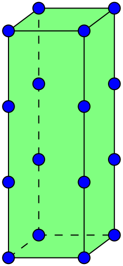
Przypuśćmy, że istnieją stałe c_1, c_2, c_3, dla których

$$V = c_1 I + c_2 B + c_3.$$

Dla wielościanu?

Przypuśćmy, że istnieją stałe c_1, c_2, c_3, dla których

$$V = c_1 I + c_2 B + c_3.$$

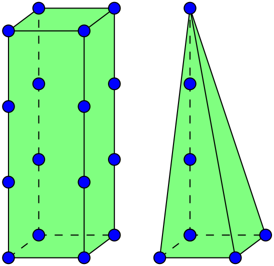


$$n = 4c_2(n+1) + c_3 \quad \Rightarrow c_2 = \frac{1}{4}$$

Dla wielościanu?

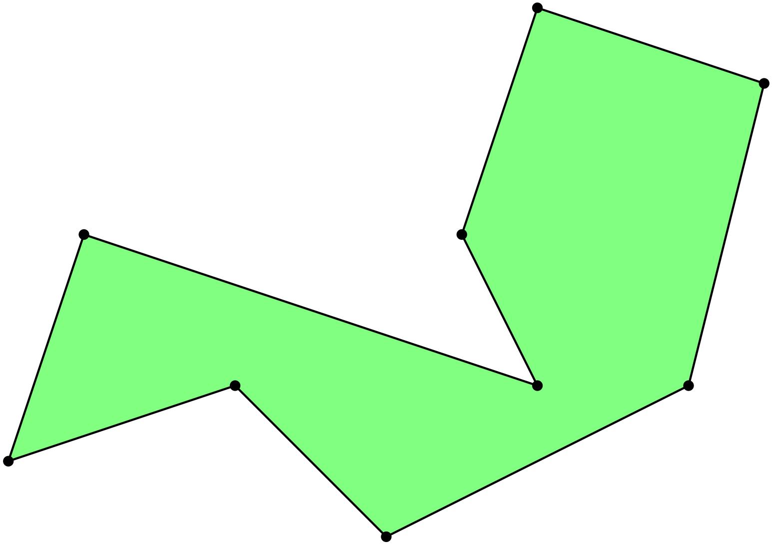
Przypuśćmy, że istnieją stałe c_1, c_2, c_3, dla których

$$V = c_1 I + c_2 B + c_3.$$

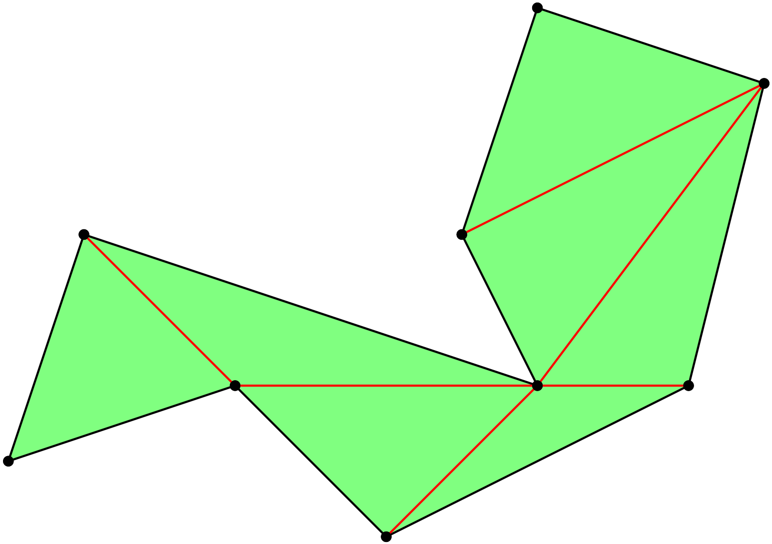


$$n = 4c_2(n+1) + c_3 \quad \Rightarrow c_2 = \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{3}n = c_2(n+4) + c_3 \quad \Rightarrow c_2 = \frac{1}{3}$$

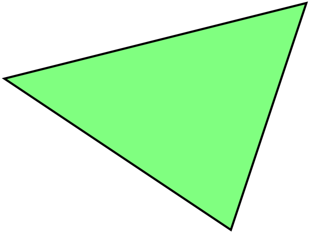
Inny kierunek – wymierne współrzędne



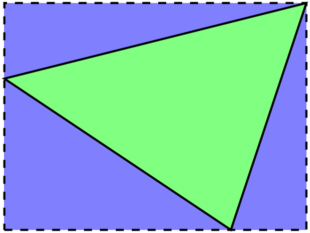
Inny kierunek – wymierne współrzędne



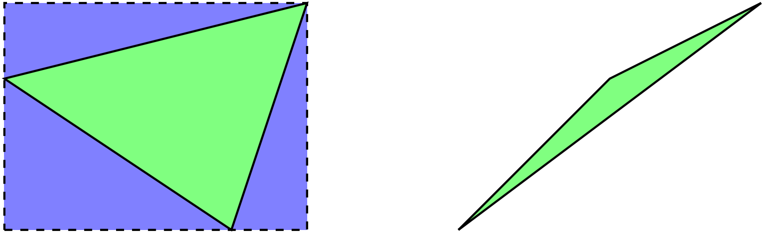
Uzupełnianie do prostokąta



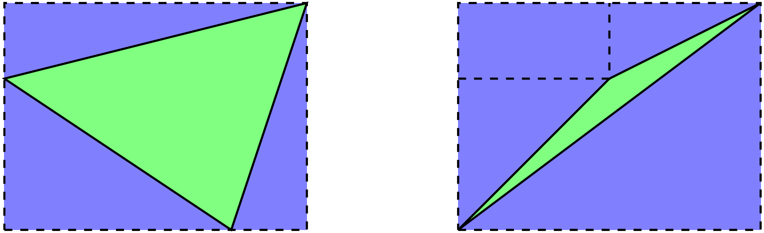
Uzupełnianie do prostokąta



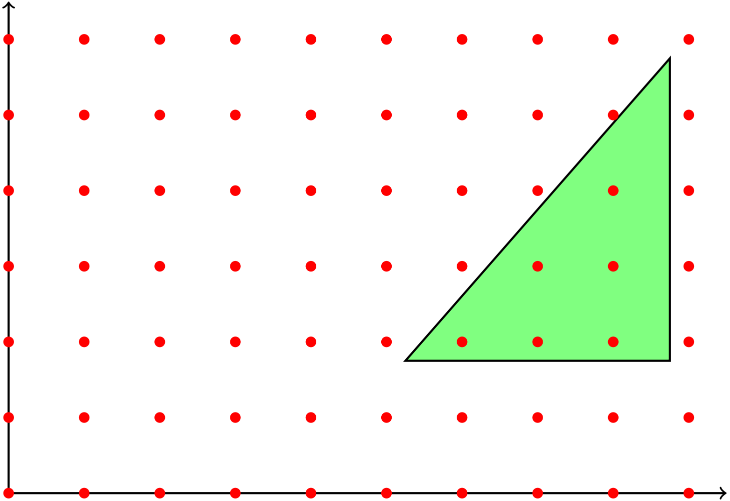
Uzupełnianie do prostokąta



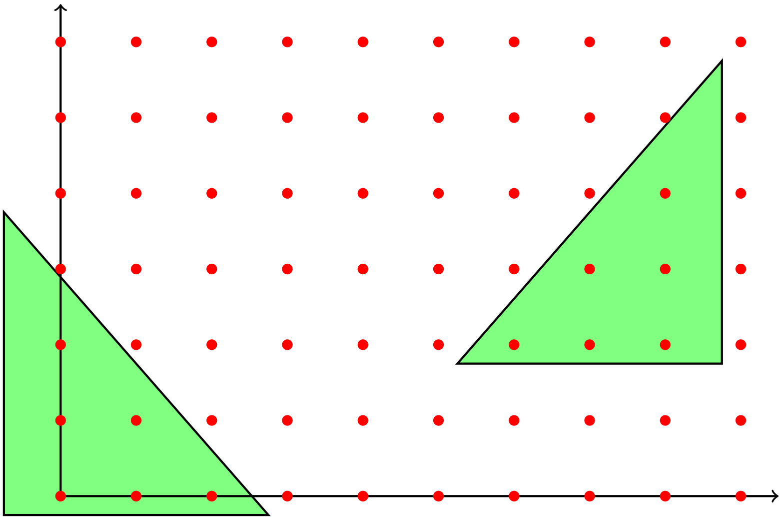
Uzupełnianie do prostokąta



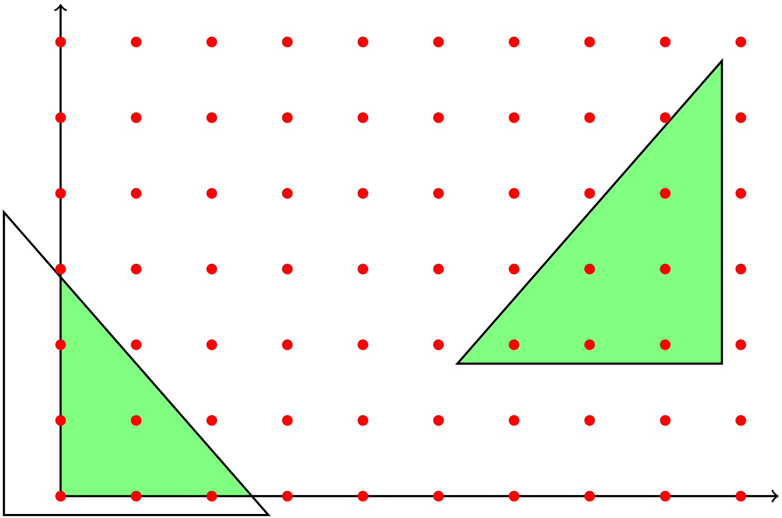
Symetrie i translacje



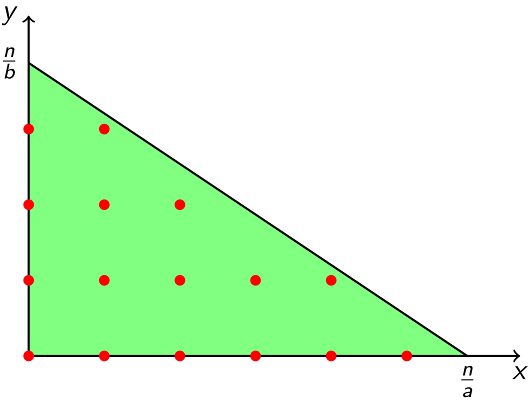
Symetrie i translacje



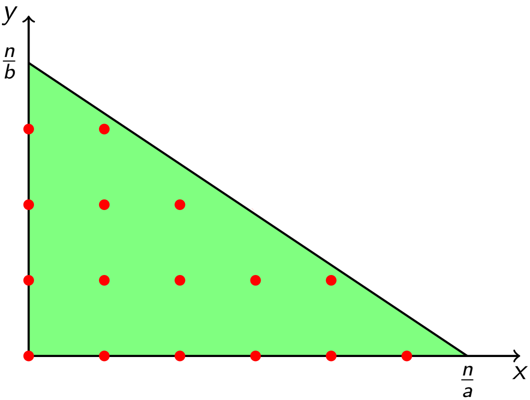
Symetrie i translacje



Trójkąt prostokątny

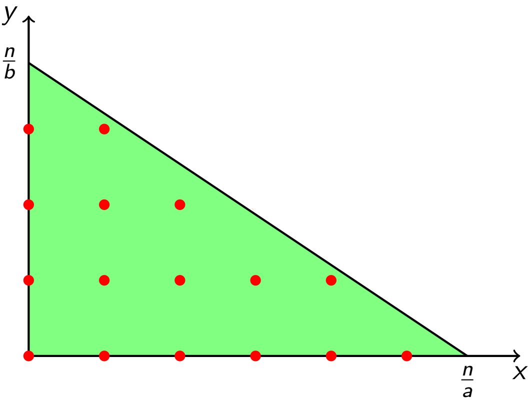


Trójkąt prostokątny



$$\mathcal{L}(n) = \#\left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : ax + by \leqslant n\right\}$$

Trójkąt prostokątny



$$\mathcal{L}(n) = \#\Big\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : ax + by \leqslant n\Big\}$$
$$= \#\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 : ax + by + z = n\Big\}$$

Problem Frobeniusa – rozmiana monet

$$\mathcal{L}(n) = \#\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : ax + by + cz = n\Big\}$$

Problem Frobeniusa – rozmiana monet

$$\mathcal{L}(n) = \#\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : ax + by + cz = n\Big\}$$

Funkcja tworząca dla $\mathcal{L}(n)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= (1 + z^a + z^{2a} + \ldots)(1 + z^b + \ldots)(1 + z^c + \ldots) \\ &= \frac{1}{(1 - z^a)(1 - z^b)(1 - z^c)}. \end{aligned}$$

Bieguny (a, b, c parami względnie pierwsze)

$$\mathcal{L}(n) = \mathtt{coeff}_{z^n}\left(\frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)(1-z^c)}\right)$$

$$g(z) = \frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)(1-z^c)z^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(n) = \mathtt{Res}(g(z), z = 0)$$

Bieguny (a, b, c parami względnie pierwsze)

$$\mathcal{L}(n) = \texttt{coeff}_{z^n}\left(\frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)(1-z^c)}\right)$$

$$g(z) = \frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)(1-z^c)z^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(n) = \mathtt{Res}(g(z), z = 0)$$

Bieguny:

- $z = 0$;

Bieguny (a, b, c parami względnie pierwsze)

$$\mathcal{L}(n) = \texttt{coeff}_{z^n}\left(\frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)(1-z^c)}\right)$$

$$g(z) = \frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)(1-z^c)z^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(n) = \mathtt{Res}(g(z), z = 0)$$

Bieguny:

- $z = 0$;
- $z = 1$ (rzędu 3);

Bieguny (a, b, c parami względnie pierwsze)

$$\mathcal{L}(n) = \mathtt{coeff}_{z^n}\left(\frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)(1-z^c)}\right)$$

$$g(z) = \frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)(1-z^c)z^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(n) = \mathtt{Res}(g(z), z = 0)$$

Bieguny:

- $z = 0$;
- $z = 1$ (rzędu 3);
- $z = \xi_a^k$ dla $k = 1, 2, \ldots, a-1$ (proste), analogiczne dla b i c.

Residua w ξ_a^k dla $k = 1, 2, \ldots, a-1$

$$\mathtt{Res}\left(g(z), z = \xi_a^k\right) = \lim_{z \to \xi_a^k} \left(z - \xi_a^k\right) g(z)$$

Residua w ξ_a^k dla $k = 1, 2, \dots, a-1$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(g(z), z = \xi_a^k\right) &= \lim_{z \to \xi_a^k} \left(z - \xi_a^k\right) g(z) \\
&= \lim_{z \to \xi_a^k} \frac{z - \xi_a^k}{z^{n+1}(1 - z^a)(1 - z^b)(1 - z^c)}
\end{aligned}$$

Residua w ξ_a^k dla $k = 1, 2, \ldots, a-1$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(g(z), z = \xi_a^k\right) &= \lim_{z \to \xi_a^k} \left(z - \xi_a^k\right) g(z) \\
&= \lim_{z \to \xi_a^k} \frac{z - \xi_a^k}{z^{n+1}(1 - z^a)(1 - z^b)(1 - z^c)} \\
&= -\frac{1}{a} \frac{\xi_a^{-kn}}{(1 - \xi_a^{kb})(1 - \xi_a^{kc})}
\end{aligned}$$

Residua w ξ_a^k dla $k = 1, 2, \ldots, a-1$

$$
\begin{aligned}
\mathtt{Res}\left(g(z), z = \xi_a^k\right) &= \lim_{z \to \xi_a^k} \left(z - \xi_a^k\right) g(z) \\
&= \lim_{z \to \xi_a^k} \frac{z - \xi_a^k}{z^{n+1}(1-z^a)(1-z^b)(1-z^c)} \\
&= -\frac{1}{a} \frac{\xi_a^{-kn}}{(1-\xi_a^{kb})(1-\xi_a^{kc})}
\end{aligned}
$$

Suma Fouriera-Dedekinda:

$$
s_r(b, c; a) = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{a-1} \frac{\xi_a^{kr}}{(1-\xi_a^{kb})(1-\xi_a^{kc})}
$$

Residuum w 1

$$\mathtt{Res}(g(z), z = 1) = \mathtt{Res}\Big(g(e^t)e^t, t = 0\Big)$$

Residuum w 1

$$\mathtt{Res}(g(z), z = 1) = \mathtt{Res}\Big(g(e^t)e^t, t = 0\Big)$$

$$g(e^t)e^t = \frac{1}{e^{nt}(1 - e^{at})(1 - e^{bt})(1 - e^{ct})}$$

Residuum w 1

$$\mathtt{Res}(g(z), z = 1) = \mathtt{Res}\Big(g(e^t)e^t, t = 0\Big)$$

$$\begin{aligned} g(e^t)e^t &= \frac{1}{e^{nt}(1 - e^{at})(1 - e^{bt})(1 - e^{ct})} \\ &= -\frac{1}{abct^3} e^{-nt} \frac{at}{e^{at} - 1} \frac{bt}{e^{bt} - 1} \frac{ct}{e^{ct} - 1} \end{aligned}$$

Residuum w 1

$$\mathtt{Res}(g(z), z = 1) = \mathtt{Res}\Big(g(e^t)e^t, t = 0\Big)$$

$$\begin{aligned} g(e^t)e^t &= \frac{1}{e^{nt}(1-e^{at})(1-e^{bt})(1-e^{ct})} \\ &= -\frac{1}{abct^3}e^{-nt}\frac{at}{e^{at}-1}\frac{bt}{e^{bt}-1}\frac{ct}{e^{ct}-1} \end{aligned}$$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}, \qquad \frac{z}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k z^k}{k!}$$

Residuum w 1

$$g(e^t)e^t \equiv -\frac{1}{abct^3}\left(1 - nt + \tfrac{1}{2}n^2t^2\right)\left(1 - \tfrac{1}{2}at + \tfrac{1}{12}a^2t^2\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1 - \tfrac{1}{2}bt + \tfrac{1}{12}b^2t^2\right)\left(1 - \tfrac{1}{2}ct + \tfrac{1}{12}c^2t^2\right)$$

Residuum w 1

$$g(e^t)e^t \equiv -\frac{1}{abct^3}\left(1 - nt + \tfrac{1}{2}n^2t^2\right)\left(1 - \tfrac{1}{2}at + \tfrac{1}{12}a^2t^2\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1 - \tfrac{1}{2}bt + \tfrac{1}{12}b^2t^2\right)\left(1 - \tfrac{1}{2}ct + \tfrac{1}{12}c^2t^2\right)$$

Współczynnik przy t^{-1} jest równy

$$-\frac{1}{2abc}n^2 - \frac{a+b+c}{2abc}n - \frac{a^2+b^2+c^2+3bc+3ca+3ab}{12abc}.$$

W ogólności:

$$\mathcal{L}(n) = \frac{1}{2abc}n^2 + \frac{a+b+c}{2abc}n + \frac{a^2+b^2+c^2+3bc+3ca+3ab}{12abc} + s_{-n}(b,c;a) + s_{-n}(c,a;b) + s_{-n}(a,b;c)$$

$\mathcal{L}(n)$

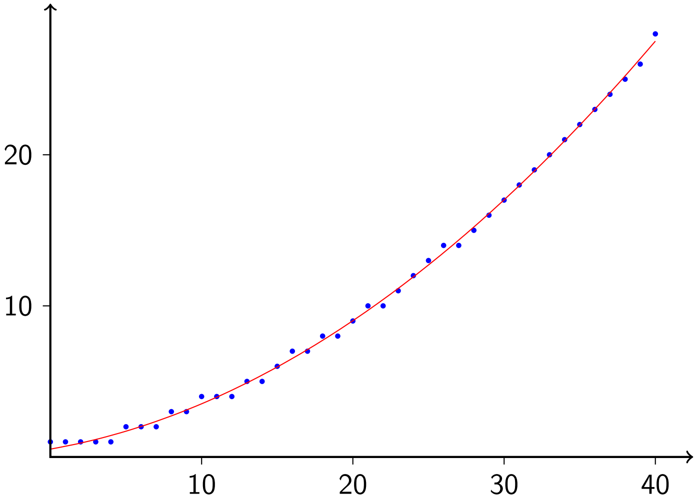
W ogólności:

$$\mathcal{L}(n) = \frac{1}{2abc}n^2 + \frac{a+b+c}{2abc}n + \frac{a^2+b^2+c^2+3bc+3ca+3ab}{12abc} + s_{-n}(b,c;a) + s_{-n}(c,a;b) + s_{-n}(a,b;c)$$

Dla $c = 1$:

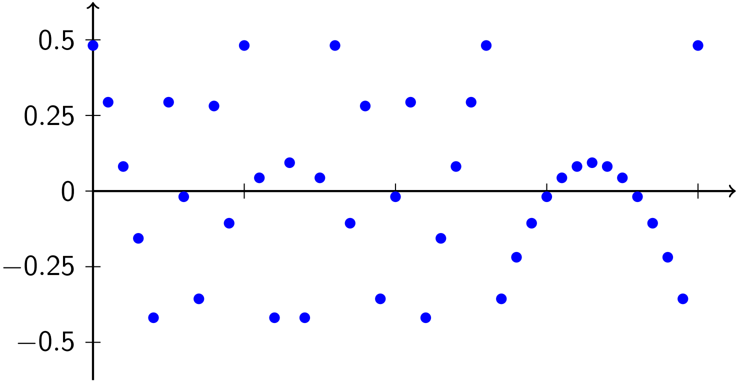
$$\mathcal{L}(n) = \frac{1}{2ab}n^2 + \frac{a+b+1}{2ab}n + \frac{a^2+b^2+3ab+3a+3b+1}{12ab} + s_{-n}(b,1;a) + s_{-n}(a,1;b)$$

Wykres dla $a = 5$, $b = 8$, $n = 0, 1, 2, \ldots, 40$

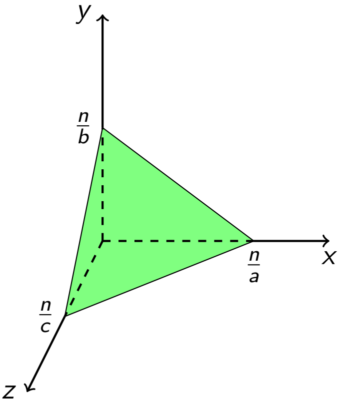


$$\mathcal{L}(n) = \frac{1}{80}n^2 + \frac{7}{40}n + \frac{83}{160} + s_{-n}(5,1;7) + s_{-n}(7,1;5)$$

$s_{-n}(5,1;8) + s_{-n}(8,1;5)$ **dla** $n = 0, 1, 2, \ldots, 40$

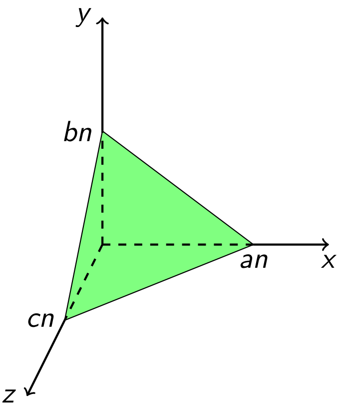


W trzech wymiarach – co mamy



$$\mathcal{L}(n) = \#\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 : ax + by + cz \leqslant n\Big\}$$
$$= \#\Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{N}^4 : ax + by + cz + t = n\Big\}$$

W trzech wymiarach – co jeszcze możemy mieć



$$\mathcal{L}(n) = \#\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : bcx + cay + abz \leqslant abcn\Big\}$$
$$= \#\Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4 : bcx + cay + abz + t = abcn\Big\}$$

Sztuczka

$$\mathcal{L}(n) = \#\Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4 : bcx + cay + abz + t = abcn\Big\}$$

Interesuje nas

$$\mathtt{Res}\left(\frac{1}{(1 - z^{bc})(1 - z^{ca})(1 - z^{ab})(1 - z)z^{abcn+1}}, z = 0\right).$$

Sztuczka

$$\mathcal{L}(n) = \#\Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4 : bcx + cay + abz + t = abcn\Big\}$$

Interesuje nas

$$\mathtt{Res}\left(\frac{1}{(1 - z^{bc})(1 - z^{ca})(1 - z^{ab})(1 - z)z^{abcn+1}}, z = 0\right).$$

Wiemy, że

$$\mathtt{Res}\left(\frac{z^{abcn}}{(1 - z^{bc})(1 - z^{ca})(1 - z^{ab})(1 - z)z^{abcn+1}}, z = 0\right) = 1.$$

Sztuczka

$$\mathcal{L}(n) = \#\Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{N}^4 : bcx + cay + abz + t = abcn\Big\}$$

Interesuje nas

$$\mathtt{Res}\left(\frac{1}{(1-z^{bc})(1-z^{ca})(1-z^{ab})(1-z)z^{abcn+1}}, z=0\right).$$

Wiemy, że

$$\mathtt{Res}\left(\frac{z^{abcn}}{(1-z^{bc})(1-z^{ca})(1-z^{ab})(1-z)z^{abcn+1}}, z=0\right) = 1.$$

Obliczymy zatem

$$\mathtt{Res}\left(\frac{1-z^{abcn}}{(1-z^{bc})(1-z^{ca})(1-z^{ab})(1-z)z^{abcn+1}}, z=0\right).$$

Bieguny (a, b, c - parami względnie pierwsze)

$$g(z) = \frac{1 - z^{abcn}}{(1 - z^{bc})(1 - z^{ca})(1 - z^{ab})(1 - z)z^{abcn+1}}$$

Bieguny (a, b, c - parami względnie pierwsze)

$$g(z) = \frac{1 - z^{abcn}}{(1 - z^{bc})(1 - z^{ca})(1 - z^{ab})(1 - z)z^{abcn+1}}$$

Bieguny:

- $z = 0$;

Bieguny (a, b, c - parami względnie pierwsze)

$$g(z) = \frac{1 - z^{abcn}}{(1 - z^{bc})(1 - z^{ca})(1 - z^{ab})(1 - z)z^{abcn+1}}$$

Bieguny:

- $z = 0$;
- $z = 1$ (rzędu 3);

Bieguny (a, b, c - parami względnie pierwsze)

$$g(z) = \frac{1 - z^{abcn}}{(1 - z^{bc})(1 - z^{ca})(1 - z^{ab})(1 - z)z^{abcn+1}}$$

Bieguny:

- $z = 0$;
- $z = 1$ (rzędu 3);
- $z = \xi_a^k$ dla $k = 1, 2, \ldots, a - 1$ (proste); analogiczne dla b i c.

Residua

$$\texttt{Res}\left(g(z), z = \xi_a^k\right) = -\frac{n}{a}\frac{1}{(1-\xi_a^{bck})(1-\xi_a^k)}$$

Ich suma dla $k = 1, 2, \ldots, a-1$:

$$-\frac{n}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{bck})(1-\xi_a^k)} = -ns_0(bc, 1; a).$$

Residua

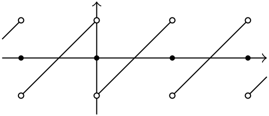
$$\mathtt{Res}\left(g(z), z = \xi_a^k\right) = -\frac{n}{a}\frac{1}{(1-\xi_a^{bck})(1-\xi_a^k)}$$

Ich suma dla $k = 1, 2, \ldots, a-1$:

$$-\frac{n}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{bck})(1-\xi_a^k)} = -ns_0(bc, 1; a).$$

$$\mathtt{Res}(g(z), z = 1) = -\frac{abc}{6}n^3 - \frac{bc+ca+ab+1}{4}n^2$$
$$-\frac{3a^2bc+3ab^2c+3abc^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+3bc+3ca+3ab+1}{12abc}n$$

Sumy Dedekinda

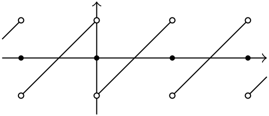


$$((x)) = \begin{cases} \{x\} - \frac{1}{2} & \text{gdy} \quad x \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{gdy} \quad x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Suma Dedekinda:

$$s(a,b) = \sum_{k=0}^{b-1} \left(\left(\frac{ka}{b}\right)\right) \left(\left(\frac{k}{b}\right)\right)$$

Sumy Dedekinda



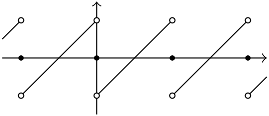
$$((x)) = \begin{cases} \{x\} - \frac{1}{2} & \text{gdy} \quad x \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{gdy} \quad x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Suma Dedekinda:

$$s(a, b) = \sum_{k=0}^{b-1} \left(\left(\frac{ka}{b}\right)\right) \left(\left(\frac{k}{b}\right)\right)$$

Wartość $s(a, b)$ jest okresowa względem a z okresem b.

Sumy Dedekinda



$$((x)) = \begin{cases} \{x\} - \frac{1}{2} & \text{gdy} \quad x \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{gdy} \quad x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Suma Dedekinda:

$$s(a,b) = \sum_{k=0}^{b-1} \left(\left(\frac{ka}{b}\right)\right) \left(\left(\frac{k}{b}\right)\right)$$

Wartość $s(a,b)$ jest okresowa względem a z okresem b.
Prawo wzajemności:

$$s(a,b) + s(b,a) = \frac{a^2+b^2+1}{12ab} - \frac{1}{4}$$

Dyskretna analiza fourierowska

Niech $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ – funkcja o okresie b. Wówczas

$$f(n) = \sum_{k=0}^{b-1} \hat{f}(k)\xi_b^{nk}, \qquad \hat{f}(n) = \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1} f(k)\xi_b^{-nk}.$$

Dyskretna analiza fourierowska

Niech $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ – funkcja o okresie b. Wówczas

$$f(n) = \sum_{k=0}^{b-1} \hat{f}(k)\xi_b^{nk}, \qquad \hat{f}(n) = \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1} f(k)\xi_b^{-nk}.$$

Niech $f(a) = (\!(\frac{a}{b})\!)$. Mamy $\hat{f}(0) = 0$ oraz dla $0 < a < b$:

$$\hat{f}(a) = \sum_{k=0}^{b-1} \left(\!\left(\frac{k}{b}\right)\!\right) \xi_b^{-ak} = \sum_{k=1}^{b-1} \left(\frac{k}{b} - \frac{1}{2}\right) \xi_b^{-ak} = \frac{1}{2b}\frac{1+\xi_b^k}{1-\xi_b^k}.$$

Dyskretna analiza fourierowska

Niech $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ – funkcja o okresie b. Wówczas

$$f(n) = \sum_{k=0}^{b-1} \hat{f}(k)\xi_b^{nk}, \qquad \hat{f}(n) = \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1} f(k)\xi_b^{-nk}.$$

Niech $f(a) = ((\frac{a}{b}))$. Mamy $\hat{f}(0) = 0$ oraz dla $0 < a < b$:

$$\hat{f}(a) = \sum_{k=0}^{b-1} \left(\left(\frac{k}{b}\right)\right) \xi_b^{-ak} = \sum_{k=1}^{b-1} \left(\frac{k}{b} - \frac{1}{2}\right) \xi_b^{-ak} = \frac{1}{2b}\frac{1+\xi_b^k}{1-\xi_b^k}.$$

$$s(a,b) = \frac{1}{4b}\sum_{k=1}^{b-1} \frac{1+\xi_b^k}{1-\xi_b^k}\frac{1+\xi_n^{ak}}{1-\xi_b^{ak}}$$

Dyskretna analiza fourierowska

Niech $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ – funkcja o okresie b. Wówczas

$$f(n) = \sum_{k=0}^{b-1} \hat{f}(k)\xi_b^{nk}, \qquad \hat{f}(n) = \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1} f(k)\xi_b^{-nk}.$$

Niech $f(a) = ((\frac{a}{b}))$. Mamy $\hat{f}(0) = 0$ oraz dla $0 < a < b$:

$$\hat{f}(a) = \sum_{k=0}^{b-1} \left(\left(\frac{k}{b}\right)\right) \xi_b^{-ak} = \sum_{k=1}^{b-1} \left(\frac{k}{b} - \frac{1}{2}\right) \xi_b^{-ak} = \frac{1}{2b}\frac{1+\xi_b^k}{1-\xi_b^k}.$$

$$s(a,b) = \frac{1}{4b}\sum_{k=1}^{b-1} \frac{1+\xi_b^k}{1-\xi_b^k}\frac{1+\xi_n^{ak}}{1-\xi_b^{ak}}$$

$$s_0(a,1;b) = -s(a,b) + \frac{b-1}{4b}$$

Twierdzenie Mordella i Pommersheima

$$\mathcal{L}(n) = \frac{abc}{6}n^3 + \frac{bc+ca+ab+1}{4}n^2 + \Big[\tfrac{3a^2bc+3ab^2c+3abc^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+3abc+1}{12abc} - s(bc,a) - s(ca,b) - s(ab,c)\Big]n + 1$$

Twierdzenie Mordella i Pommersheima

$$\mathcal{L}(n) = \frac{abc}{6}n^3 + \frac{bc+ca+ab+1}{4}n^2$$
$$+ \Big[\tfrac{3a^2bc+3ab^2c+3abc^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+3abc+1}{12abc}$$
$$- s(bc,a) - s(ca,b) - s(ab,c)\Big] n + 1$$

$$\mathcal{L}(1) = \tfrac{abc}{6} + \tfrac{bc+ca+ab}{4} + \tfrac{a+b+c}{4} + \tfrac{bc}{12a} + \tfrac{ca}{12b} + \tfrac{ab}{12c} + 2 + \tfrac{1}{12abc}$$
$$- s(bc,a) - s(ca,b) - s(ab,c)$$

Wielomian Ehrharta

Niech:
$\mathcal{P}$ – d-wymiarowy wielościan zanurzony w $\mathbb{R}^n$;
$n\mathcal{P}$ – wielościan jednokładny do $\mathcal{P}$ wzgldem $\mathbf{0}$ w stosunku $n \in \mathbb{Z}_+$;
$\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(n)$ – liczba punktów kratowych w $n\mathcal{P}$.

Wielomian Ehrharta

Niech:
$\mathcal{P}$ – d-wymiarowy wielościan zanurzony w $\mathbb{R}^n$;
$n\mathcal{P}$ – wielościan jednokładny do $\mathcal{P}$ wzgldem $\mathbf{0}$ w stosunku $n \in \mathbb{Z}_+$;
$\mathcal{L}_\mathcal{P}(n)$ – liczba punktów kratowych w $n\mathcal{P}$.

Twierdzenie Ehrharta.

- jeśli wielościan $\mathcal{P}$ ma wierzchołki w $\mathbb{Z}^n$, to $\mathcal{L}_\mathcal{P}(n)$ jest wielomianem zmiennej n stopnia d;
- jeśli wielościan $\mathcal{P}$ ma wierzchołki w $\mathbb{Q}^n$, to $\mathcal{L}_\mathcal{P}(n)$ jest pseudowielomianem zmiennej n stopnia d.

Źródło

Matthias Beck i Sinai Robins

Computing the Continous Discretely